Fractales: una aproximación. El expresionismo abstracto

por

CLAUDIO MARTÍNEZ GIL

(IES Alhama, Corella)

Este artículo trata de explicar el concepto de dimensión fractal, dando unas pinceladas de su evolución histórica. Una vez conseguido lo anterior se aplica este concepto a una corriente pictórica del siglo XX, el expresionismo abstracto, cuyo principal exponente es el pintor estadounidense Jackson Pollock.

Dimensión fractal

Puede considerarse que el origen de los fractales, tal como lo conocemos ahora, es el artículo de Benoit Mandelbrot «How long is the coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension» aparecido en la revista *Science* en el año 1967.

Benoit Mandelbrot es el principal exponente del interés por la Geometría fractal. Mostró cómo los fractales aparecen en muchos campos, tanto en las Matemáticas como, sobre todo, en la Naturaleza. Fractal viene del latín fractus, que significa roto o fracturado.

En 1982 publica su obra más conocida, *Fractal Geometry of Nature*, donde expresa que los fractales son más naturales que los objetos basados en la geometría euclidiana, que han sido suavizados artificialmente:

> Las nubes no son esferas, las montañas no son conos, las costas no son círculos, y las cortezas de los árboles no son lisas, ni los relámpagos viajan en una línea recta.

Los fractales pueden venir definidos por sus características:

1. Son estructuras que se repiten en escalas cada vez más pequeñas (self-similarity).
2. Son demasiado irregulares para ser descritos por la Geometría Euclídea.
3. Son estructuras geométricas divididas en partes, cada una de las cuales es (al menos aproximadamente) una copia de tamaño reducido de la estructura original.
4. Se forman por iteración: La definición es recursiva.

Como primera aproximación pensemos que la dimensión fractal de una línea es 1, una superficie tiene dimensión 2, un volumen tiene dimensión 3 y un punto tiene dimensión 0.

Cuadrado: dimensión 2

1. ¿Cuántas copias del cuadrado juntaremos para hacer un cuadrado de tamaño doble? 4 ($2^2=4$)
2. ¿Cuántas copias del cuadrado se han de juntar para hacer un cuadrado de tamaño triple? 9 ($3^2=9$)

Cubo: dimensión 3

1. ¿Cuántas copias del cubo se han de juntar para hacer un cubo de tamaño doble? 8 ($2^3=8$)
2. ¿Cuántas copias del cubo se han de juntar para hacer un cubo de tamaño triple? 27 ($3^3=27$)

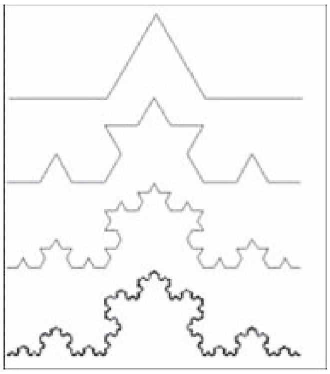
Tenemos un objeto para el que necesitamos ensamblar N copias para construir una versión más grande con un factor de escala S. La dimensión fractal del objeto se define como el número real positivo d, que cumple:

$$S^d = N$$

Ejemplo 1. Curva de Koch

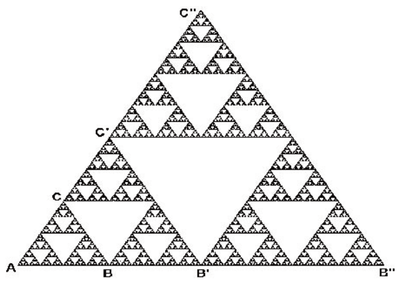
1. ¿Cuántas copias de la curva original son necesarias para construir una versión más grande? 4.

2. ¿Cuál es el factor de escala que hay que aplicar a la Curva de Koch para obtener la curva más grande inmediatamente posterior? 3 (La longitud del segmento 'que hace el mismo papel' en una versión y en la posterior está multiplicada por 1/3)
3. Así: $3^d = 4$, entonces, $d = log(4)/log(3) = 1{,}26185.....$



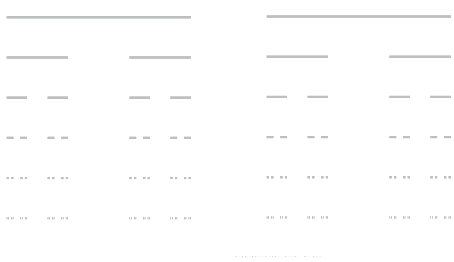
Ejemplo 2. Triángulo de Sierpinski

1. Tenemos que ensamblar tres copias del Triángulo de Sierpinski para crear una versión más grande, que es el doble de tamaño que el original. (La longitud de los lados del triángulo grande es doble de la longitud de los lados del triángulo original)
2. Así: $2^d = 3$, entonces, $d = log(3)/log(2) = 1{,}585.....$



Ejemplo 3. Conjunto de Cantor

1. Tenemos dos copias de la iteración n del conjunto de Cantor para conseguir la iteración posterior. La longitud del segmento de la iteración $n+1$ es $1/3$ de la longitud del segmento de la iteración n 'que hace el mismo papel'.
2. Así: $3^d = 2$, entonces, $d = log(2)/log(3) = 0{,}6309....$



Estos 3 ejemplos son dimensiones de fractales *perfectos*. En general la dimensión fractal se calcula de manera aproximada por métodos numéricos, de entre los que destaca el *box-counting method*.

El expresionismo abstracto

Jackson Pollock fue un pintor estadounidense y un referente del expresionismo abstracto. Suyas son varias pinturas que se encuentran entre las más caras del mundo. Una de ellas es la *Number 5* que se vendió en 148 millones de dólares. Sus pinturas son consideradas como *pintura fractal*.

Pollock era una persona aislada y tenía problemas de alcoholismo los cuales enfrentaba día a día durante toda su vida. En 1945 se casó con la artista americana Lee Krasner, quien se convirtió en una influencia importante en su carrera y legado.

Pollock murió a los 44 años en un accidente automovilístico debido a que conducía ebrio. En diciembre de 1956, meses después de su muerte, Pollock fue conmemorado con una retrospectiva en el Museo de Arte Moderno de Nueva York. En el año 2000 un filme basado en la vida de Jackson Pollock, dirigido y protagonizado por Ed Harris, ganó un premio de la Academia.

Las pinturas de Jackson Pollock tienen una dimensión fractal característica, a dos escalas, que se acentúa con los años (Richard Taylor)

Fractal de Mandelbrot

Dadas las constantes c_1 y c_2, el fractal de Mandelbrot se define por la recurrencia:

$$(x_0, y_0) = (0, 0)$$
$$(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n^2 - y_n^2 + c_1, 2x_n\ y_n + c_2)$$

Elegimos constantes K, c_1, c_2 con $||(x_n, y_n)|| < K$, para $n \in \mathrm{N}$.