

Semifinal de la XXIV OMA de 2º ESO. Problema 5

por

MAIDER GOÑI URRETA

(IES Leonardo de Chabacier, Calatayud)

El 21 de marzo de 2015 se celebró en distintos puntos de la geografía aragonesa la fase semifinal de la XXIV Olimpiada Matemática Aragonesa de 2º de ESO. En esta ocasión, estaban inscritos un total de 1261 alumnos dispuestos a enfrentarse a una colección de 6 problemas, de manera que cada alumno disponía de dos tandas de una hora para abordar 3 problemas en cada tanda. En particular, el 5º de los problemas propuestos fue el siguiente:

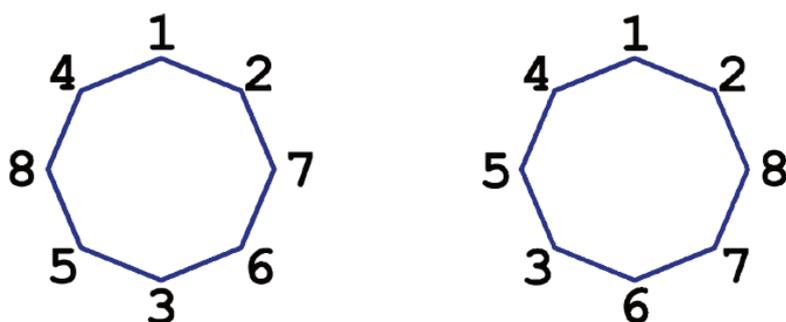
Enunciado

Dibuja un octógono cualquiera y pon en cada vértice un número del 1 al 8, sin repetir ninguno, de tal forma que:

- los números vecinos del 1 sumen 6
- los números vecinos del 8 sumen 9
- los números vecinos del 3 sumen 11
- los números vecinos del 6 sumen 10

Solución

Existen dos soluciones a este problema, dos series de números que cumplen todos los requisitos del enunciado, y son (salvo rotación y simetría del octógono):



Como además se pide que la solución esté razonada, paso a explicar una manera de obtener la solución basada en el análisis de forma implícita de todos los casos posibles.

Se comienza colocando el número 1 en un vértice cualquiera del octógono. Sus números vecinos deben sumar 6. Los pares 1-5 y 3-3 se excluyen inmediatamente porque repetiríamos números, así que la única posibilidad que queda es que los vecinos del 1 sean el 2 y el 4. Por tanto, se colocan dichos números a ambos lados del 1 de manera que, por ejemplo, el 2 queda a la derecha y el 4 a la izquierda. De esta forma, la disposición actual es la 4-1-2. A continuación se examinan los distintos números que pueden continuar la serie como vecinos del 2 y en adelante.

El número 2 no tiene ninguna condición que cumplir, así que, en principio, cualquier número de los restantes podría continuar la serie:

- Si colocamos el 3 (4-1-2-3) se tendría que continuar obligatoriamente con el número 9 para que los vecinos del 3 sumasen 11, hecho que contradice que sólo se pueden utilizar los números del 1 al 8, por lo que la serie 4-1-2-3- queda descartada.
- Si colocamos el 5 (4-1-2-5) se puede continuar con cualquiera de los números restantes ya que el 5 no tiene ninguna condición que cumplir:
 - Si se sigue con el 3 (4-1-2-5-3) el siguiente número debe ser el 6 ya que los vecinos del 3 suman 11. A continuación debe ir el 7 ya que los vecinos del 6 suman 10 y en este punto, solo quedaría por colocar el número 8 que iría enlazado con el 4 inicial. Sin embargo, en esta serie los vecinos del 8 no suman 9 luego no es una solución válida.
 - Si se sigue con el 6 (4-1-2-5-6) el siguiente número tendría que ser el 5, pero ya lo hemos utilizado en la serie, luego esta serie queda descartada.
 - Si se sigue con el 7 (4-1-2-5-7) cualquier número restante puede continuar la serie porque el 7 no tiene que cumplir ningún requisito. Aplicando los criterios del enunciado, ninguna de las series que se obtienen en este caso es factible. Notemos que, por ejemplo, la serie (4-1-2-5-7-3-4) vuelve de nuevo al número de comienzo sin haber empleado todos los números del 1 al 8.

Continuando con este razonamiento se consiguen analizar implícitamente todas las posibles soluciones y descartar fácilmente aquellas que no son validas. Sólo en el caso de las series 4-1-2-7-6-3-5-8 y 4-1-2-8-7-6-3-5 se vuelve al principio habiendo cumplido todos los apartados del enunciado.

En el siguiente dibujo se puede ver el diagrama de árbol construido para encontrar las posibles soluciones al problema.

Otra manera de abordar la resolución del problema consiste en analizar las distintas parejas de vecinos. Teniendo en cuenta las condiciones del enunciado y analizando las posibles sumas se tiene que:

- Posibles vecinos del 1: 2 y 4
- Posibles vecinos del 3: 4 y 7, 5 y 6
- Posibles vecinos del 6: 2 y 8, 3 y 7
- Posibles vecinos del 8: 2 y 7, 3 y 6, 4 y 5

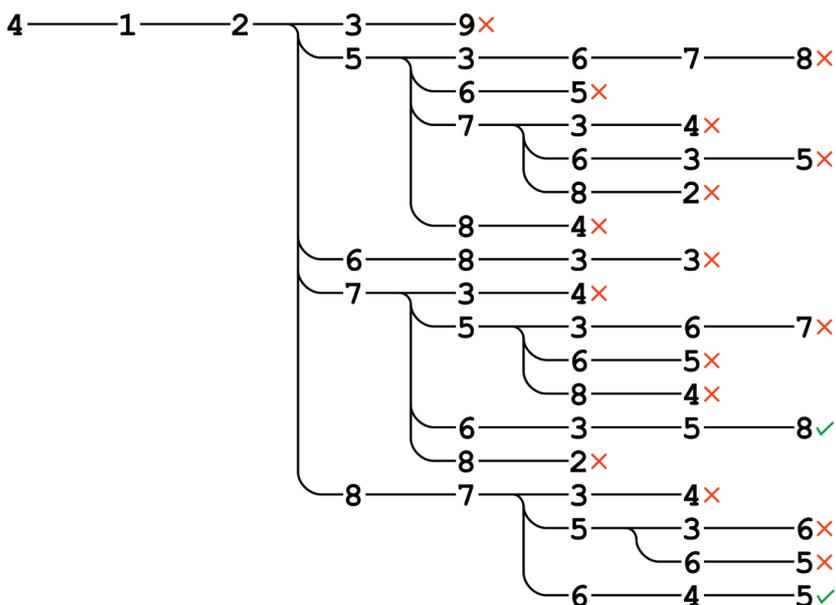
Si nos fijamos en los posibles vecinos del 3 observamos que el 8 no es uno de ellos, es decir, el 3 y el 8 no van a ser vecinos. Por tanto podemos descartar la pareja 3 y 6 del conjunto de posibles vecinos del 8 (posibles vecinos del 8: 2 y 7, ~~3 y 6~~, 4 y 5).

Si examinamos los posibles vecinos del 8 observamos que el 6 no es uno de ellos (antes estaba, pero lo hemos descartado), es decir, el 6 y el 8 no van a ser vecinos. Así, podemos descartar la pareja 2 y 8 del conjunto de posibles vecinos del 6 (posibles vecinos del 6: ~~2 y 8~~, 3 y 7).

A la vista de este último paso nos damos cuenta de que, ahora, el 3 y el 6 son vecinos seguro, por tanto podemos descartar la pareja 4 y 7 como posibles vecinos del 3 (posibles vecinos del 3: ~~4 y 7~~, 5 y 6).

Recapitulando, los vecinos del 1 son 2 y 4, los vecinos del 3 son 5 y 6 y los vecinos del 6 son 3 y 7. Únicamente en el caso del número 8 existente dos parejas de posibles vecinos:

- Si los vecinos del 8 son 2 y 7: al colocar estos números sobre los vértices del octógono el resto de nodos quedan directamente determinados por las relaciones de vecindad y la solución que se obtiene es la : 4-1-2-8-7-6-3-5.



- Si los vecinos del 8 son 4 y 5: al colocar estos números sobre los vértices del octógono el resto de nodos quedan directamente determinados por las relaciones de vecindad y la solución que se obtiene es la : 4-1-2-7-6-3-5-8.

Análisis de los resultados

Con respecto a las soluciones propuestas por los alumnos, de los 835 que finalmente participaron en la olimpiada, el 85% encontró, al menos, una solución a este problema, un 14% lo intentó pero no llegó a la solución y el 1% restante dejó el problema en blanco.

Si se analizan por separado los distintos apartados del enunciado se pueden observar algunos aspectos interesantes. Por ejemplo, el enunciado pide, en primer lugar, que se dibuje un octógono cualquiera. Por lo tanto, no es necesario que el octógono sea regular. Sin embargo, el 16% de los participantes ha dibujado un octógono regular con regla y compás. Además cabe destacar que la tendencia ha sido el octógono regular, puesto que del 82% de los participantes que han dibujado un octógono irregular, la mayoría pretendía que fuera regular. Otro tipo de octógonos irregulares han aparecido con menor frecuencia en la resolución de algunos participantes, en su mayoría convexos aunque alguno cóncavo se ha colado, ya fuera estrellado o no. Si bien es cierto que un 2% no ha dibujado ningún octógono ya sea porque ha representado una estrella de ocho puntas, un polígono con más de ocho lados o ha dejado el ejercicio en blanco.

Otro aspecto llamativo ha sido descubrir que la indicación «pon en cada vértice» no ha sido entendida por todos los participantes ya que el 9% ha situado los números sobre las aristas. Este error puede deberse a que o bien no entienden el concepto de vértice o lo confunden con el de arista o bien no han leído esa parte del enunciado y han colocado los números donde les ha parecido oportuno.

En cuanto al tipo de resolución empleada en este problema, un 89% lo ha hecho por tanteo o ensayo-error mientras que solo el 11% ha dado una respuesta razonada. La mayoría de los ejercicios presentan solo la solución y solo unos pocos tienen algún esbozo o intento de razonamiento pero nada más. Es curioso observar que solo una tercera parte de los participantes ha escrito la comprobación de la solución.

Si nos centramos en los que han razonado la respuesta, el razonamiento empleado ha sido similar en todos ellos. Comienzan por el número 1, quizá porque es el primero que aparece en las condiciones del enunciado. Por un lado, llegan a la conclusión de que los vecinos del 1 son el 2 y el 4 de la misma manera que se propone en este artículo, por descarte. Muchos de ellos establecen las posibilidades para los vecinos de cada número y van descartando algunas de ellas conforme avanzan poniendo números en la serie. Eso sí, hay una tendencia clara a ir cumpliendo las condiciones del enunciado en el mismo orden en que aparecen.

Al no dar un razonamiento completo, llega un momento en el que se arriesgan con un número y continúan la serie a partir de la opción elegida. Resulta curioso observar que el 70% de los alumnos propone la solución 4-1-2-7-6-3-5-8, el 30% la solución 4-1-2-8-7-6-3-5, y solamente dos participantes proponen ambas.

Los errores más frecuentes encontrados en la resolución de este problema se pueden clasificar en varios tipos: los que tienen que ver con la lectura del enunciado y los relacionados con los conceptos involucrados. Además de los ya mencionados errores sobre la representación de un octógono o la no situación de los números sobre los vértices, hay que mencionar que muchos de los participantes no han entendido las instrucciones dadas sobre los criterios a cumplir. Llama la atención encontrar varias pruebas en las que el participante no entiende el concepto de *vecino* ya sea porque considera al propio número su vecino o piensa que son vecinos solo el inmediatamente siguiente o siguientes a uno solo de los lados. En cualquier caso, cinco participantes concluyen que el problema no tiene solución.

En general, creo que muchos alumnos no están acostumbrados a leer minuciosamente el enunciado de un problema y tienden a interpretar lo que leen en parte. Además, hay una tendencia clara a no explicar el procedimiento empleado para resolver un problema. Para muchos alumnos, basta con hacer las operaciones necesarias en la cabeza y escribir solo la solución, cuando lo verdaderamente interesante sería que escribieran y explicaran cada paso de la resolución del problema.