

Semifinal de la XXIV OMA de 2.º ESO. Problema 6

por

JUAN MAYO SAN ADRIÁN

(Fundación San Valero, Zaragoza)

Continuando con la revisión de los problemas de la XXIV Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de ESO celebrada el 21 de marzo de 2015, se analizan en este artículo las contestaciones dadas al problema número 6 de dicha final:

Enunciado

Todas las calles de Secantilandia son líneas rectas, no existen dos calles paralelas en esta singular ciudad. El ayuntamiento de la ciudad ha decidido instalar una fuente en cada cruce de calles.

Sabiendo que no hay ningún punto donde se crucen más de dos calles y que el ayuntamiento ha instalado 66 fuentes. ¿Podrías decirme cual es el número de calles de la ciudad?

Solución

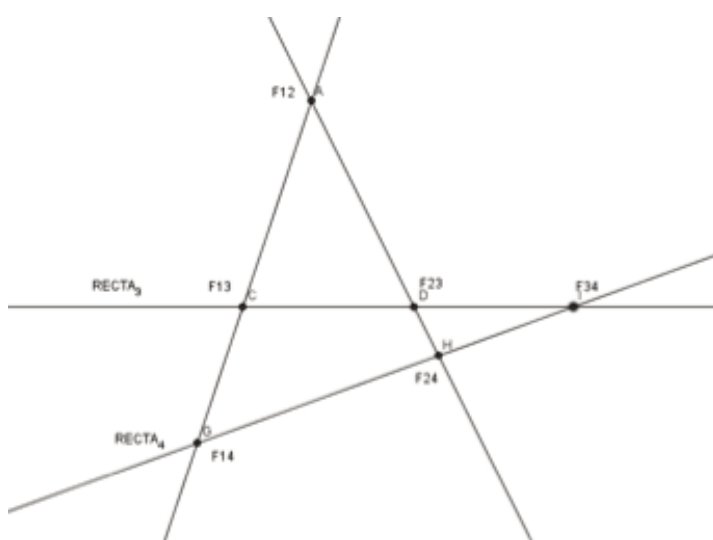
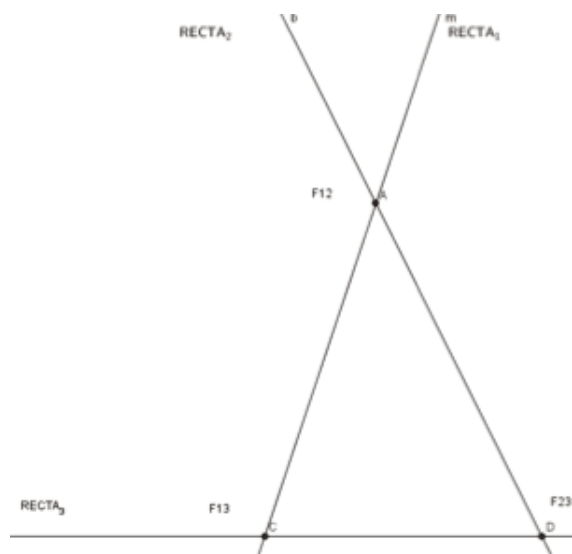
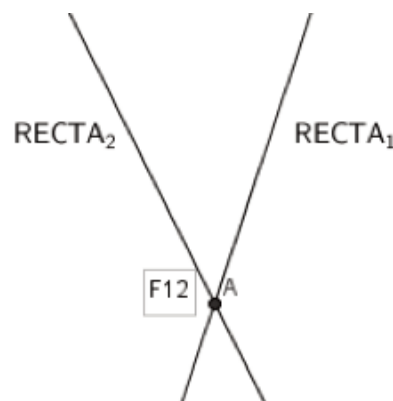
Una docena de alumnos trataron de resolver el problema gráficamente. Sin embargo, según se van dibujando rectas de distintas pendientes, el gráfico se complica y la resolución se torna inviable en el tiempo destinado a resolver la prueba.

La solución correcta se consigue si se reduce el problema a problemas más simples y se adopta una secuencia de trabajo y notación adecuada. Esto es, trazar un buen plan.

Dadas la Calle 1 y la Calle 2, al cruce se le llama F_{12}

Existe el punto F_{12} siempre, ya que si no existiera las calles 1 y 2 serían paralelas.

¿Qué ocurre al introducir una calle más en el pueblo?



Se producen nuevas intersecciones con las calles anteriores (la 1 y la 2) que dan lugar a las Fuentes F_{13} y F_{23}
 ¿Qué ocurre al introducir una calle nueva, la n.º 4, en el pueblo?

Se producen nuevas intersecciones que son las Fuentes F_{14} , F_{24} y F_{34} .

¿Qué ocurre al introducir la Calle n.º5?

Llegados a este punto se debe analizar si el plan es bueno o no. Y sí, lo es, pero con matices. Existe el riesgo de hacer un dibujo erróneo y que varias calles corten en el mismo punto o que se añada una recta paralela. Sin embargo si se ha seguido una correcta numeración se observa que la calle n.º5 aporta 4 nuevos cruces F_{15} , F_{25} , F_{35} y F_{45} .

Así que ha llegado el momento de abandonar la resolución gráfica y resolver el problema utilizando únicamente la lógica. A ello contribuye la organización de todos los datos en una tabla.

Calles	Fuentes nuevas	Núm. fuentes nuevas	Núm. total fuentes
Calle 1	No hay	0	0
Calle 1 y Calle 2	F12	1	1
Calle 1, Calle 2 y Calle 3	F13, F23	2	3
Calle 1, Calle 2, Calle 3 y Calle 4	F14, F24, F34	3	6
Calle 1, Calle 2, Calle 3, Calle 4 y Calle 5	F15, F25, F35, F45	4	10
Calle 1, Calle 2, Calle 3, Calle 4, Calle 5 y Calle 6	F16, F26, F36, F46, F56	5	15
Calle 1, Calle 2, Calle 3, Calle 4, Calle 5, Calle 6 y Calle 7	F17, F27, F37, F47, F57, F67	6	21
Calle 1, Calle 2, Calle 3, Calle 4, Calle 5, Calle 6, Calle 7 y Calle 8	F18, F28, F38, F48, F58, F68, F78	7	28
Calle 1, Calle 2, Calle 3, Calle 4, Calle 5, Calle 6, Calle 7, Calle 8 y Calle 9	F19, F29, F39, F49, F59, F69, F79, F89	8	36
Calle 1, Calle 2, Calle 3, Calle 4, Calle 5, Calle 6, Calle 7, Calle 8, Calle 9 y Calle 10	F1_10, F2_10, F3_10, F4_10, F5_10, F6_10, F7_10, F8_10, F9_10	9	45

Para llegar a la solución no haría falta haber completado la tabla pues basta darse cuenta que al añadir la calle n , se generan $(n - 1)$ cruces nuevos. De tal forma que basta ir sumando los números naturales para observar cuando el acumulado de la suma es 66.

Así que tras sumar los 11 primeros naturales y obtener un resultado de 66 se puede afirmar que la solución es 12 calles.

Análisis de los resultados

Con respecto a las soluciones aportadas por los alumnos en la Olimpiada cabe destacar que únicamente 30 alumnos de los 835 que finalmente entregaron solución llegaron a la solución correcta. Esto es un 4% de los alumnos.

Los datos más importantes en la resolución del problema están en el alto índice de respuestas en blanco recibidas para este problema. 550 alumnos o lo que es lo mismo un 65%, es decir dos de cada tres alumnos, no dieron ninguna respuesta al problema. Esto puede ser debido fundamentalmente a pertenecer a la segunda tanda de problemas lo que probablemente en más de un caso influyó para un abandono prematuro tanto del problema como de la competición.

Otra de la respuesta más común fue 33 calles. La respuesta de 33 calles apareció en un 25% de las respuestas. El error fue debido fundamentalmente a que el alumno observó que 2 calles proporcionaban un cruce, pero no comprobó que la tercera calle proporcionaba 2 nuevos cruces.

Un alumno hizo la observación de que Secantilandia debería ser casi infinito en extensión. Su plano de Secantilandia fue muy elaborado y cuando llevaba 7 calles trazadas con sus cruces, decidió analizar su trabajo hasta ese momento para darse cuenta de que si numeraba bien las fuentes no merecía la pena continuar dibujando. Esta respuesta fue calificada con un Sobresaliente por su análisis y explicación.

En este problema se pone de manifiesto la importancia de elaborar un plan de acción ante la resolución de un problema complejo. Comenzar por casos más simples y observar con una notación adecuada, el comportamiento de los elementos que entran en juego en el problema.