

CONJETURAS Y PRUEBAS EN TORNO A UNA ACTIVIDAD GEOMÉTRICA DE ESTUDIANTES QUE INICIAN EL PROFESORADO DE MATEMÁTICA (URUGUAY)

Mario Dalcín
mdalcin00@gmail.com

Instituto de Profesores ‘Artigas’, Departamento de Matemática del CFE

Núcleo temático: Formación del profesorado en Matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Formación y actualización docente

Palabras clave: Conjetura, Prueba, Generalizar, Particularizar

Resumen

La comunicación da cuenta de una experiencia realizada con estudiantes de primer año de Profesorado de Matemática (Uruguay), al mes de haber iniciado sus estudios. Como tarea del curso Geometría Euclidiana se les propuso la siguiente actividad: “ABCD es un cuadrilátero convexo. Las bisectrices interiores de los ángulos DAB y ABC se cortan en E. ¿Puedes establecer una relación entre los ángulos AEB, BCD y CDA? Explica por qué se cumple la relación establecida”. La tarea se propuso para ser trabajada en forma individual y con dos semanas de plazo para entregarla. Se buscó determinar en qué paradigma(s) -si en el ámbito de la Geometría I y/o de la Geometría II (Houdement y Kuzniak, 1999)- abordaba la tarea cada estudiante. Se buscó saber además si los estudiantes consideraban algún(os) cuadrilátero(s) especial(es) en su trabajo. También se buscó saber si recurrían al uso de Geometría Dinámica.

Introducción

Con el objetivo de tener una aproximación al pensamiento geométrico de los estudiantes que ingresaron al profesorado de matemática al Instituto de Profesores ‘Artigas’ en 2016, se le propuso a un grupo de primer año una actividad geométrica en la que tenían que conjeturar y elaborar una prueba para su conjetura. La experiencia previa de los estudiantes que ingresan con el trabajo geométrico suele ser muy variada debido a que pueden ingresar habiendo cursado cualquiera de las diversificaciones del bachillerato, así como al olvido generado por los años sin estudiar de muchos de los estudiantes.

La actividad propuesta

La actividad, propuesta a los 29 estudiantes del grupo, al mes de haber iniciado el curso anual Geometría I (8 horas semanales), para que trabajaran en forma individual, en su casa y con un plazo de dos semanas para ser entregada, está tomada del libro *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano* (Dalcín y Molfino, 2014, p. 83):

Esta sección de *No todo es soplar y hacer botellas* que se inicia consistirá en actividades que posiblemente no se resuelvan en un instante y por tanto requieran que se vuelva una y otra vez sobre ellas.

Además de la resolución matemática de la actividad, y más allá que llegues a resolverlas completamente, nos interesa que relates todo lo que fuiste pensando a medida que la ibas resolviendo. En este relato escribe tanto lo correcto y por qué consideras que es correcto, así como las ideas que pensaste y después viste que eran incorrectas y explica por qué eran incorrectas.

Sólo la resolución matemática de las actividades de esta sección no tiene ningún valor. Lo que nos interesa es que puedas verte a ti mismo buscando resolver un problema y que puedas explicitarlo y comunicarlo de modo que quien lea tu relato pueda seguir los vaivenes de tu pensamiento. Recuerda que importa tanto lo incorrecto y por qué viste es incorrecto como lo correcto y sus porqués.

Puedes hacer uso de Geometría Dinámica (GD) para abordar la actividad.

(ABCD) es un cuadrilátero convexo. Las bisectrices interiores de los ángulos DAB y ABC se cortan en E. ¿Puedes establecer una relación entre los ángulos AEB, BCD y CDA?

Marco teórico

Houdement y Kuzniak (1999) proponen tres paradigmas para la geometría. Cada uno refleja una problemática diferente a abordar por la comunidad de matemáticos involucrada:

Geometría I. La geometría natural. La fuente de validación es la realidad, el mundo sensible. Hay una cierta confusión entre el modelo y la realidad. La deducción se hace centralmente mediante la percepción y el uso de instrumentos.

Geometría II. La geometría axiomática natural. La fuente de validación se basa sobre lo hipotético deductivo en un sistema axiomático lo más preciso posible. Pero dicho sistema axiomático se mantiene lo más fiel posible a la realidad.

Geometría III. La geometría axiomática formalista. Se cortan los lazos de la geometría con la realidad. El razonamiento lógico se impone y los axiomas no se basan en lo sensible, en lo real.

Estas tres geometrías nos dan un marco desde el cual dar cuenta de toda la geometría, desde la que trabaja un estudiante al iniciar su formación en la escuela primaria hasta aquella con la que trabaja un matemático. Para nuestro estudio tendremos en cuenta solo las Geometría I y Geometría II.

Propósito del trabajo

Se buscó determinar en cuál(es) de los paradigma(s) propuestos por Houdement y Kuzniak (1999) trabaja cada estudiante al abordar la actividad planteada, si en la Geometría I y/o en la Geometría II.

Se buscó saber además si consideraban algún –o algunos- cuadrilátero especial al abordar la actividad.

También nos interesó saber si los estudiantes recurrían al uso de Geometría Dinámica para abordar la actividad.

Buscamos saber además si elaboraron alguna conjetura y la fundamentaron.

Lo hecho por los estudiantes

Consignamos lo hecho por los estudiantes en la siguiente tabla. Para ello asignamos números del 1 al 29 al trabajo entregado por cada estudiante. Indicamos con I o II si el estudiante aborda la tarea desde la Geometría I o la Geometría II (Houdement y Kuzniak, 1999). Al prestar atención al cuadrilátero -o los cuadriláteros- considerado por el estudiante al abordar la actividad, distinguiremos entre cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio isósceles, trapecio birrectángulo, trapecio, cuadrilátero general (cuadrilátero convexo distinto a los antes mencionados). Con GD indicaremos en el cuadro cuando hacen uso de Geometría Dinámica. Con ‘si’ y ‘no’ señalaremos si elaboraron alguna conjetura y la fundamentaron. En el caso de estudiantes que creen que las bisectrices de los cuadriláteros considerados son sus diagonales indicaremos ‘dxb’ en la tabla.

Estudiante	Cuadrado	Rect.	Rombo	Paralel.	Trapecio isósceles	Trapecio birrect.	Trapecio	Cuadril gral
E1	II sí							I no
E2								II sí
E3								dxb, II sí

E4								II sí
E5					dxb, no			
E6	I sí GD						I sí GD	I sí GD
E7								II sí
E8								I no GD
E9		II, no bis.						
E10								II sí
E11								dxb
E12								II sí
E13								II sí GD
E14								II no
E15				II, dxb				
E16					II, dxb	II, dxb		
E17	I sí	I sí		I sí	I sí			
E18							II no	
E19				II no				
E20								II sí GD
E21								II sí
E22						I sí		
E23		I sí GD						I sí GD
E24	I sí GD					I sí GD		
E25								II no
E26	I sí	I sí	I sí		I no			I no GD
E27	I sí							
E28					I sí			I sí, II sí
E29	I no	I no			I no	I no		

E1: “...supuse que la relación entre los ángulos E, C y D eran iguales porque mi cuadrilátero era un cuadrado, pero al hacer un romboide me di cuenta que no dan iguales. En el cuadrado me habían dado los tres ángulos 90° porque todos sus ángulos son 90°.”... “Está erróneo mi pensamiento ya que hay un caso en el cual no se cumple la relación.” E1 tiene claro que si hay un ejemplo que no cumple la relación, entonces la relación no es válida. E1 sostiene que los ángulos E, C y D del romboide no miden 90° mirando la figura.

E2 considera la figura de seis cuadriláteros convexos generales, en tres de ellos asigna medidas α , β , γ , δ , ε a los ángulos de vértices A, B, C, D, E y a partir de ecuaciones entre las medidas de los ángulos llega a la relación $\alpha + \beta = 2\varepsilon$ o $(\alpha+\beta)/2 = \varepsilon$, que también expresa en lenguaje coloquial.

E3 basándose en un único cuadrilátero general (similar a un romboide) que construye y en el que traza las diagonales, dice que el ángulo E mide 90° . Luego no usa esta información de origen visual para llegar a que la medida del ángulo E es el promedio de las medidas de los ángulos C y D.

E4 dibuja un cuadrilátero general, asigna medidas β, χ, α a los ángulos C, D y E respectivamente y a partir de las ecuaciones $\chi + \beta + B + A = 360^\circ$ y $\alpha + B/2 + A/2 = 180^\circ$, resolviendo el sistema concluye que $2\alpha = \chi + \beta$.

E5 relata que inicialmente busca en Internet el significado de convexo y de bisectriz. Construye un trapecio isósceles, traza sus diagonales y nombra E a su intersección. Construye la circunferencia de centro E que pasa por A y B porque “cada vez que veo intersecciones que se cruzan internas a una forma pienso en un círculo”... “pienso que debe tener que ver con que el ángulo interno mida el doble.”

E6 usa Geogebra. “Pensé que la suma de los ángulos E, C y D podría ser constante, pero no. Luego lo que hice (no sé por qué realmente, no es que lo hice porque sí, solo que pensaba que al ser una relación entre ángulos debía ser alguna cuenta, entonces intenté sumarlos, restarlos, multiplicarlos, y eso me llevó a lo que hice) fue multiplicar el ángulo E por tres y al menos en los cuadriláteros que utilicé esa multiplicación me dio lo mismo que la suma de los tres ángulos. Estos tres ejemplos [que hace en papel] son algunos de los tantos que intenté, y esos confirman lo que suponía.” El trabajo en GD le permite descartar su conjetura inicial y confirmar su nueva conjetura, en ambos casos trabajando en el ámbito de la Geometría I.

E7 no relata el proceso de trabajo y se limita a escribir en lenguaje coloquial las ecuaciones que plantea a partir de un cuadrilátero general y que le permiten concluir que $E = (C + D)/2$.

E8, al no tener al alcance Geogebra, construye un cuadrilátero en el que “observé que en este caso el ángulo E estaba cerca de ser recto, lo que se me ocurrió pensar si los ángulos B y A serían suplementarios”. Piensa y busca información sobre esta supuesta propiedad sin hallar nada. “Entonces pensé en trazar distintos cuadriláteros convexos tratando de refutar mi teoría en forma práctica y que se viera a simple vista; y lo logré”. Luego, trabajando en Geogebra, “observé que E era un ángulo similar a A y B pero no igual. Era intermedio. Se me ocurrió sumar B y A y luego dividirlo entre 2. Me dio exactamente la medida de E. Por lo tanto concluyo que $E = (A + B)/2$.”

Queda claro que E8 trabaja en el ámbito de la Geometría I. Lo que no queda claro es si la afirmación falsa entregada en papel se corresponde con lo visto en Geogebra.

E9 considera un rectángulo y construye AE y BE que no son bisectrices ni diagonales. Asigna medidas a, b, c, d a diversos ángulos, establece ecuaciones y concluye que $C = D$.

E10 no relata el proceso limitándose a dibujar un cuadrilátero general y a escribir las ecuaciones a partir de las cuales concluye que $E = (C + D)/2$.

E11 solo construye un cuadrilátero general y sus diagonales.

E12 dice que primero prolongó AE y BE, formó así nuevos triángulos, pero que luego no pudo avanzar en establecer relaciones entre sus ángulos. Luego cambia de estrategia y considera la suma de los ángulos del cuadrilátero, lo del triángulo ABE, y así deduce que $E = (C + D)/2$.

E13, trabajando en Geogebra conjetura inicialmente que “el ángulo E es el doble de C y que a su vez D es el triple que C”. Pensando en un cuadrado se da cuenta que no es cierta la conjetura anterior. Conjetura luego que $C + D + E$ es constante y constata mediante arrastre que no. Conjetura luego la relación $(C + D)/2 = E$, la confirma mediante arrastre y elabora una demostración trazando una paralela a CD por E.

E14 considera un cuadrilátero general, asigna medidas α y β a los ángulos A y B, y halla la medida de E en función de α y β .

E15 a partir del paralelogramo al que trazó sus diagonales en vez de sus bisectrices, marca ángulos alternos internos iguales.

E16 considera un trapecio isósceles ($A = B$) y un trapecio birrectángulo ($B = C$) y sus diagonales. A partir de plantear ecuaciones erradas concluye que $E = C = D$. En el trapecio birrectángulo considerado los ángulos E y C se ven distintos.

E17 empieza considerando diagonales en cuadrado y paralelogramo. Considera luego un paralelogramo de ángulo $A = 80^\circ$ donde sí construye las bisectrices; luego las bisectrices de un rectángulo, de un trapecio birrectángulo con $A = B = 90^\circ$ y conjetura que $(A + B)/2 = E$. Construye luego un trapecio isósceles con $A = 130^\circ$ y $B = 50^\circ$. Después de esto vuelve a leer la letra de la actividad, se da cuenta que estaba relacionando mal los ángulos y cambia la igualdad anterior por $(C + D)/2 = E$ expresando “como dije anteriormente, no se cómo llegué

a esta fórmula”. La verifica recurriendo a un cuadrado, un rectángulo, un paralelogramo con $A = 120$, un trapecio isósceles con $A = 135^\circ$ y $B = 45^\circ$.

E18 dice hacer “un bosquejo de un cuadrilátero convexo ‘genérico’ (sin valores) con las bisectrices mencionadas en la letra” pero representa un trapecio con AD paralelo a BC. “A partir del bosquejo procedía buscar propiedades estudiadas anteriormente.” Esto evidencia que trabaja en el ámbito de la Geometría II en la medida que recurre a propiedades del curso y no a medir ángulos con un semicírculo por ejemplo. No llega a dar una respuesta a la actividad.

E19 construye un paralelogramo, ubica el punto E y afirma que $C + D = 180^\circ = A + B$ y que por ser bisectrices la suma de EAB y ABE es igual 90° y por lo tanto $E = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$.

E20 parecería basarse en su razonamiento en la propiedad ‘los ángulos conjugados internos entre paralelas suman 180° ’, usando además que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° . Si bien no llega a establecer una relación entre los ángulo C, D y E, evidencia trabajar en Geometría II, claro que acotado al caso del paralelogramo que consideró.

E20 dice “lo primero que intenté hacer fue buscar una relación visible probando en Geogebra con distintos cuadriláteros. No encontré ninguna entonces pensé en plantear la relación entre los ángulos del cuadrilátero.” Se dibuja un cuadrilátero general y plantea las ecuaciones $A + B + C + D = 360^\circ$ y $A/2 + B/2 + E = 180^\circ$, de donde obtiene $E = (C + D)/2$.

E21 considera un cuadrilátero general y conjetura “parecerían sumar 180° ”. Considerando una nueva figura de un cuadrilátero general concluye “la intersección de dos bisectrices no tiene por qué formar ángulos rectos”. Dejando la conjetura inicial de lado y basándose en una nueva figura de un cuadrilátero general deduce que $2E = C + D$. También expresa la relación como $E = (C + D)/2$, $C = 2E - D$, $D = 2E - C$.

[Lo hecho por los estudiantes 22 a 29 puede verse en el Anexo.]

Conclusiones

La relación entre los estudiantes que trabajan exclusivamente en el ámbito de la Geometría I o de la Geometría II es de 2 a 3. Solo dos estudiantes muestran trabajar en ambos paradigmas a la vez en la actividad.

La relación entre estudiantes que consideran exclusivamente uno o más cuadriláteros particulares (cuadrado, rectángulo, rombo, paralelogramo, trapecio isósceles, trapecio birrectángulo, trapecio) o exclusivamente un cuadrilátero general es de 1 a 1. Cinco estudiantes consideran cuadriláteros particulares junto a un cuadrilátero general.

La cuarta parte de los estudiantes hace uso del ambiente dinámico, usando Geogebra, en el transcurso de su actividad. Quienes trabajan parcial o todo el tiempo en el ámbito de la Geometría I usan la GD para descartar conjeturas (E1, E6, E8, E13). Una sola estudiante (E20) dice que la GD no le sirve para encontrar una relación entre los ángulos y establece dicha relación deductivamente.

Los estudiantes se formularon preguntas y elaboraron una amplia variedad de conjeturas: i) los ángulos consecutivos de un cuadrilátero son suplementarios (E8); ii) el ángulo E es el doble del ángulo C y a su vez el ángulo D es el triple que C (E13); iii) la suma de los ángulos C, D y E es constante (E6); iv) la suma de los ángulos C, D y E es 180° (E21); v) la intersección de dos bisectrices consecutivas de un cuadrilátero no tiene por qué formar ángulos rectos (E22); vi) los ángulos C, D, E son iguales (E1); vii) $E = (A+B)/2$ (E8); viii) la suma de los ángulos C, D, E es el triple del ángulo E (E6); ix) E es intermedio entre C y D (); x) el ángulo E se encuentra aproximadamente entre los valores de los ángulos C y D (E24); xi) $E = (C + D)/2$ (E21); xii) $2E = C + D$ (E21); xiii) $2E = C + D$ (E21); xiv) $C = 2E - D$ (E21); xv) $D = 2E - C$ (E21).

Las fundamentaciones dadas por estudiantes que trabajan en el ámbito de la Geometría I se basan en lo visual o en mediciones de ángulos, ya sean hechas con semicírculo (E17, E23, E27) o mediante Geogebra (E6, E24). Las fundamentaciones mediante medición pueden recurrir a un solo cuadrilátero particular (E22), a dos (E24) o a varios (E17), a considerar cuadriláteros especiales y cuadrilátero general (E6, E23) o considerar solo un cuadrilátero general (E8, E26).

Las fundamentaciones elaboradas en el ámbito de la Geometría II se basan en propiedades acordadas en el mes previo de curso (ángulos alternos internos entre paralelas son iguales, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° , la suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es 360°) y en la concatenación deductiva de las mismas. Dos estudiantes (E18, E19) consideran un solo cuadrilátero particular y no logran elaborar una fundamentación deductiva; dos estudiantes (E1, E28) consideran cuadriláteros particulares y general, y

elaboran demostraciones; diez estudiantes (E2, E4, E7, E10, E12, E13, E14, E20, E21, E25) consideran exclusivamente un cuadrilátero general y ocho de ellos elaboran una fundamentación deductiva, así como dos no lo consiguen. En siete casos la demostración consiste en considerar que $A + B + C + D = 360^\circ$, que $A/2 + B/2 + E = 180^\circ$ y operando con estas dos igualdades concluir que $E = (C + D)/2$. E13 es el único caso que elabora una demostración diferente considerando una paralela a CD por E, intersecando esta recta con AD y BC en J y K respectivamente y luego estableciendo relaciones entre los ángulos de los triángulos AEJ, ABE, BKE deduce que $E = (C + D)/2$.

Algo que no estaba dentro de las finalidades de este estudio pero que surgió de los trabajos es que cinco estudiantes consideran que las bisectrices de los cuadriláteros considerados son sus diagonales y uno construye semirrectas que no son bisectrices ni diagonales. Es decir que la quinta parte de los estudiantes no tiene claro qué es la bisectriz de un ángulo. Ninguno de estos estudiantes había trabajado en un ambiente dinámico.

Referencias bibliográficas

- Dalcín, M. y Molfino, V. (2014). *Geometría Euclidiana en la formación de profesores. Exploración inicial del plano*. Montevideo: Ediciones Palíndromo.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Geometrie et paradigmas geometriques. *Petit x*, 51, pp. 5-21.

Anexo

Lo hecho por los estudiantes 22 a 29

E22 al hacer una figura a mano, en el mismo libro, se da cuenta que necesita hacer una figura más grande y en una hoja aparte. “Al hacerlo de esta forma aproveché para darle ángulos con números enteros y para facilitarme aún más le puse valores múltiplos de diez. Al conocer el valor de los ángulos iba a poder hacer una figura en la cual viera algo general pero poder comprobarlo con el ejemplo. Fue de esa forma que pude encontrar la relación”. El cuadrilátero construido es un trapecio birrectángulo con $A = 70^\circ$ y $B = C = 90^\circ$. E27 aborda la actividad en el ámbito de la Geometría I.

E23 trabaja en Geogebra e inicialmente no ve ninguna relación entre los ángulos. Un compañero le dice que en los rectángulos y paralelogramos los ángulos cumplen la relación

$E = (C + D)/2$. En base a las medidas de los ángulos C, D, E de tres cuadriláteros generales distintos hechos en Geogebra confirma -“sin fundamento teórico”- la relación.

E24 a partir de medir en un cuadrado afirma que los tres ángulos son iguales. Como duda si está midiendo bien con el semicírculo recurre a Geogebra, a partir de lo cual considera dos trapecios birrectángulos con $A = D = 90^\circ$ y $B = 135^\circ$ en un caso y $B = 45^\circ$ en el otro. Confirma así que su afirmación anterior “no se daba para cualquier cuadrilátero convexo”. Finalmente “concluí que el valor del ángulo E se encuentra aproximadamente entre los valores de los ángulos C y D.”

E25 se dibuja un cuadrilátero general y llega a escribir $E + ABE + EAB = 180^\circ$ y $A + B + C + D = 360^\circ$, pero no llega a una relación entre los ángulos.

E26 considera inicialmente un trapecio isósceles con $C = D = 120^\circ$ y mide mal el ángulo E. Luego considera un cuadrilátero general y no puede establecer una relación en base a las mediciones hechas. Luego construye cuadrado, rectángulo y rombo y concluye que $B = E = C = 90^\circ$. Finalmente usa Geogebra sin lograr establecer una relación entre los ángulos.

E27 construye un cuadrado y mediante compás las bisectrices de los ángulos A y B que se cortan en E. Supone “a simple vista” que el ángulo E es igual a $A = B = C = D$. Se plantea como paso siguiente “corroborar que mi pensamiento es correcto midiendo E”... “concluyendo que mi pensamiento es correcto.”

E28 construye un trapecio isósceles con $A = B$. Midiendo conjetura que $C = D = E$. Luego traza “otro cuadrilátero un poco más irregular donde los ángulos C y D sean distintos”. En este caso no se cumple la igualdad “por lo que podemos ‘suponer’ que $(D + C)/2 = E$.” Midiendo D y C con semicírculo sustituye los valores en la expresión anterior. Luego mide E y “teniendo en cuenta el margen de error” le “parece razonable, habría que demostrarlo en forma general”. Cosa que hace.

E29 construye a mano –sin recurrir a regla, compás ni semicírculo- cuadrado, trapecio birrectángulo con $A = D$, trapecio isósceles con $A = B$, rectángulo. No mide y solo recurre a la vista para concluir que no puede establecer una relación.

La actividad de E1

Lo primero que hice fue leer la consigna y hacer el cuadrilátero convexo junto con las bisectrices en los ángulos pedidos.

Luego supuse que la relación entre los ángulos \hat{E} , \hat{C} y \hat{D} eran iguales porque mi cuadrilátero era un cuadrado, pero al hacer un romboide me di cuenta que no dan iguales. En el cuadrado me habían dado los 3 ángulos 90° porque todos sus ángulos son 90° .

Primer cuadrilátero pensado: Segundo cuadrilátero pensado:

Está erróneo mi pensamiento ya que hay un caso en el cual se cumple la relación.

La actividad de E14

Viernes labr. 6:30 am

1^a parte de la definición de cuadrilátero convexo. Si tomo 2 puntos interiores A y B cualquiera del cuadrilátero y observo el segmento \overline{AB} que ~~form~~ determinan, todos los puntos de \overline{AB} deben estar dentro del cuadrilátero

Dediqué 10 min y me fui a realizar actividades del hogar y luego me fui a clases.

Leí y empecé a pensar y nombren ang.
 Sab. 2 abr 7:30, 7:38 me fui a preparar un café y una galleta de arroz de mermelada
 7:55 volví a pensar después de comer, Estoy escuchando música alegre mientras

$$180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$$

$$180 - (\alpha + \beta) - \beta = 180 - \alpha - 2\beta$$

Estoy pensando e investigando relación de ángulos de cuadriláteros irregulares pero q. al intersectar las 2 bz obtubo 2 triángulos y 2 cuadriláteros y ocupo razonar cuadriláteros irregulares pues ellos contienen a los 2 q. quiero relacionar con \widehat{AEB}

