

## ANÁLISE MATEMÁTICA E SALA DE AULA - UM CURSO ONLINE PARA PROFESSORES DA EDUCAÇÃO BÁSICA

Agnaldo da C. Esquincalha – Marcelo A. Bairral  
aesquincalha@gmail.com – mbairral@ufrj.br  
UERJ – UFRRJ, Brasil

Núcleo temático: Formação de Professores de Matemática

Modalidade: CB

Nível educativo: Formação e Atualização Docente

Palavras chave: Formação Continuada de Professores de Matemática, Análise Real, Fóruns de Discussão, Relações entre Saber Universitário e Saber Escolar.

### Resumo

*Este trabalho apresenta algumas reflexões a partir das discussões estabelecidas em um curso a distância sobre conceitos usualmente explorados em Análise Real. O curso foi realizado com professores de Matemática atuantes primordialmente na Educação Básica. O objetivo do curso foi o de fomentar nos participantes a percepção de relações mais diretas entre o que é trabalhado em Análise e os conceitos relacionados a números e funções reais, ensinados em nível escolar. Diversos fóruns de discussões e atividades online foram propostas para esse fim, algumas delas fazendo uso de tecnologias digitais para a construção e apropriação das ideias por trás dos conceitos, de modo que sua apresentação em nível escolar fosse possível independente do rigor e da abstração da Matemática Avançada. Esses fóruns e tarefas são apresentados ao longo do texto, que trata, essencialmente, da estruturação do curso.*

### Introdução

Os documentos oficiais brasileiros recentes que tratam da formação de professores têm proposto modificações nas diretrizes curriculares dos cursos de formação inicial e continuada para o magistério na Educação Básica. Merece destaque a proposta de aproximação da formação inicial com a prática da sala de aula, estimulando profunda articulação entre as disciplinas do eixo científico com a prática pedagógica. Com isso, as disciplinas desse eixo, que objetivam explorar o conhecimento matemático de maneira aprofundada, também passam a ter compromisso de buscar interlocuções com conteúdos e práticas da Educação Básica.

Alguns autores têm se debruçado sobre a questão do ensino e da aprendizagem da Análise Real nos cursos de Licenciatura em Matemática. Destacamos aqui os trabalhos de Baroni

(2015), Moreira e Muniz (2014), Moreira, Cury e Vianna (2005), em que a Análise Real é apontada como a disciplina de maior abstração do curso e, conseqüentemente, apresenta altos índices de evasão e retenção. Cabe ainda comentar sobre a recorrente despreocupação dos responsáveis por essa disciplina em promover a articulação com a futura prática dos licenciandos.

Sobre a forma como a Análise é ensinada atualmente nas universidades brasileiras, Mazzi (2014) destaca que é resultado da chamada “era do rigor”. Corroborando, Baroni e Otero-Garcia (2013) traçam uma linha do tempo sobre o ensino dessa disciplina ao longo do Séc. XIX, retratando esta era, e discutindo seu impacto na aprendizagem dos alunos, frequentemente negativo, até os tempos atuais. Ainda sob a ótica da história do ensino da Análise, Ávila (2002) traz uma discussão sobre o ensino de Cálculo e Análise no Brasil no Séc. XX, antes e a partir dos anos 1960, destacando mudanças de abordagens em livros didáticos e fazendo pontuações a respeito da necessidade de tamanho rigor matemático nessa disciplina, para licenciandos.

Em linhas gerais, a disciplina Análise Real promove um estudo axiomático rigoroso sobre o conjunto dos números reais e o comportamento de funções reais de uma variável real. As ideias por trás desses conceitos são, em nível elementar, exploradas ao longo Ensino Médio e, de forma um pouco mais sistematizada, ainda que com pouco rigor matemático, em cursos de Cálculo. Mesmos com algumas dessas ideias já tendo tangenciado a formação de quem foi aprovado em Cálculo, a maneira como esses processos infinitos são explorados em Análise usualmente não fomenta qualquer articulação com cursos anteriores, propiciando nos alunos um sentimento de angústia e de desconhecimento de cursos em que já foram aprovados (MAZZI, 2014).

A partir dessas questões, fica clara a necessidade de se continuar pesquisando sobre os processos de ensino e aprendizagem de Análise, como também, assim como possíveis caminhos que propiciem a interlocução entre os conceitos dessa disciplina com os que permeiam a prática do professor de Matemática, em particular, nos últimos anos da Educação Básica.

Dessa forma, ao longo do segundo semestre de 2016 foi realizado um curso piloto, na modalidade a distância, para professores de Matemática atuantes na Educação Básica e Superior, assim como para licenciandos no último ano de formação, com o objetivo de buscar

juntos a construção ou percepção dessas interlocuções, em particular, com recurso ao uso de tecnologias. Esse curso, chamado “Análise Matemática: ensaios em sala de aula” é apresentado a seguir, com algumas pontuações sobre o seu desenvolvimento. Essa pesquisa se insere no projeto do primeiro autor, executado durante seu Estágio Pós-Doutoral no Programa de Pós-Graduação em Ciências e Matemática da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (ESQUINCALHA, 2017), supervisionado pelo segundo autor.

### **Análise Matemática: ensaios em sala de aula – um Curso de Extensão**

Para a realização do curso, foi aberto um edital público que atraiu 321 interessados. Esse é um fato curioso, dada a aversão de boa parte dos professores de Matemática por Análise. Ao longo do curso, os participantes, doravante chamados cursistas, apontaram que, mesmo diante de experiências não tão agradáveis durante a graduação, entendem a importância da Análise e se interessaram pelos tais “ensaios em sala de aula”. Por uma questão de qualidade no acompanhamento, foram aceitas apenas 142 inscrições, com base nos critérios, presentes no edital: 1) ser professor de escola pública, 2) ser licenciando no último ano do curso. Dos 142, apenas 102 iniciaram o curso, 95 professores e 7 licenciados. Ao fim de cada etapa, em média 10 cursistas não prosseguiram com o curso. A instituição pública estadual que permitiu o uso de seu ambiente virtual, tem dados estatísticos não publicados com as taxas de evasão dos últimos dez anos em seus cursos na área de Matemática, que revelam que a cada 150 ingressantes, apenas 10 os concluem com aproveitamento.

No caso do curso em tela, dos 102 ingressantes, 22 o concluíram com aprovação, e outros 8 foram até o fim, mas foram reprovados por não entregarem a maior parte das tarefas, apenas participando de alguns fóruns de discussão. Apesar do estudo da evasão não ser um objetivo dessa pesquisa, foi enviada por e-mail uma enquete aos desistentes e a resposta mais frequente foi o abandono pelo acúmulo de atividades outras, seguida da dificuldade em perceber articulações entre as ideias que fundamentam a Análise com os conceitos trabalhados na escola. Essa segunda justificativa reforça a importância de cursos como esse, pois é fundamental que professores da Escola Básica identifiquem articulações, diretas ou não, entre as disciplinas cursadas durante a Licenciatura e sua prática ensinando Matemática na Escola.

O curso, com 60 horas de duração estimada, foi desenhado a partir de uma revisão de literatura realizada sobre o assunto. Seu objetivo principal era abordar algumas ideias fundamentais da Análise, que pudessem ser explorados de forma integrada, explorando, de forma simultânea, conhecimentos matemáticos, pedagógicos e tecnológicos.

O Quadro 1 apresenta as 8 etapas do curso: duas delas dedicadas para reflexões sobre os porquês de se estudar Análise na Licenciatura, três delas sobre números reais e outras três sobre limites, continuidade, derivadas e integrais de funções reais. Cada etapa percorreu cerca de 15 dias e foi permeada por fóruns de discussão e envio de tarefas. Após o quadro, são realizadas algumas pontuações sobre as discussões realizadas e tarefas propostas em cada do curso.

**Quadro 1:** Etapas do Curso de Extensão “Análise Matemática: ensaios em sala de aula”.

| Nº. | Título da Etapa  | Texto de apresentação das etapas   |
|-----|--|--|
| 1   | Por que Análise Matemática na Licenciatura?                    | Nessa etapa discutiremos sobre os possíveis porquês de se estudar Análise na Licenciatura em Matemática, a partir da leitura do texto base.  |
| 2   | O problema da comensurabilidade e a expansão decimal dos reais | Algumas inquietações para nortearem as leituras... tente responde-las mentalmente, organize as ideias e as esboce em um arquivo de texto. Em seguida, leia os artigos disponibilizados e tente responde-las novamente. Suas concepções mudaram?<br>1) Dados dois segmentos de reta, sempre existirá uma unidade, expressa por um número racional, que possibilite escrever um como múltiplo do outro? Como você entende isso? Como explicaria para um aluno?<br>2) Como é feita a expansão decimal de um número real? A expansão é sempre possível? Se dá da mesma forma para os racionais e os irracionais ou muda algo? Se muda, o que? Como você entende isso? Como explicaria para um aluno? |
| 3   | A densidade dos racionais sobre os reais                       | Continuaremos explorando o conjunto dos números reais, sua construção e algumas de suas propriedades. Não se espantem se retomarmos algumas questões, o objetivo é refinar nosso entendimento e buscar articulações mais profundas entre o que se estuda em Análise e o que se estuda na escola, além, claro, de nos provocar do ponto de vista didático-pedagógico.   |
| 4   | Números Reais, Sequências e Séries Numéricas                   | Aqui encerraremos as discussões sobre os números reais com dois fóruns simultâneos: no primeiro, analisaremos as respostas de alunos dos Ensinos Fundamental, Médio e da Licenciatura em Matemática a um questionário sobre números reais, preparado originalmente para ser respondido por alunos do último ano do Ensino Fundamental. Já no segundo fórum, trataremos sobre os conceitos de sequências e séries numéricas por meio do GeoGebra.   |

|   |   |  |
|---|---|--|
| 5 | Os conceitos de limite e continuidade   | Aqui pensaremos um pouco sobre as ideias associadas aos conceitos de limite e continuidade, fazendo uso de algumas atividades desenvolvidas com o GeoGebra.  |
| 6 | O problema das retas tangentes a uma curva, taxas de variação e o conceito de derivada. | As ideias associadas ao conceito de derivada, exploradas por meio de diferentes tipos de atividades, são o mote dessa etapa.   |
| 7 | A área de uma região plana e o conceito de integral.                                    | Aqui trataremos de alguns problemas que talvez permitam explorar a gênese do conceito de integral no Ensino Médio.   |
| 8 | Mais uma vez: por que Análise Matemática na Licenciatura?                               | Ao longo dessas semanas tivemos a oportunidade de discutir sobre diferentes conceitos envolvendo números reais e limite, derivada e integral de funções reais a uma variável real. Utilizamos diferentes abordagens, como a de tentar conceituar a partir de ideias mais elementares, muitas vezes intuitivas, fizemos uso de calculadora e de <i>Mathlets</i> desenvolvidos no GeoGebra, elaboramos problemas, sequências didáticas e tentamos revisitar alguns conceitos importantes da Análise e que podem se articular com conceitos sobre números e funções reais como estudados na escola. Nosso objetivo não foi o de um curso de Análise, mas, como propõe o título, realizar alguns ensaios possíveis para sala de aula. No fórum dessa última etapa, convido vocês a responderem novamente: por que Análise na Licenciatura? Fiquem à vontade para usar exemplos do curso que justifiquem ou não suas respostas, de forma positiva ou negativa, inclusive. |

Fonte: os autores.

Na Etapa 1 foi solicitado que, a partir das experiências individuais e da leitura de Moreira, Cury e Vianna (2005), os cursistas discutissem em grupos e apresentassem uma razão para a obrigatoriedade da disciplina ou uma razão para que seja extinta dos cursos de Licenciatura. De forma geral, apontaram a necessidade de manutenção da disciplina, pontuando a necessidade do estudo rigoroso da Matemática. Apenas dois propuseram a extinção da disciplina, defendendo que apenas sejam ensinados na Licenciatura aqueles conteúdos que serão trabalhados em sala de aula escolar.

As Etapas 2, 3 e 4 foram dedicadas ao estudo dos números reais. Os temas foram o problema da comensurabilidade, a expansão decimal dos reais, a densidade dos racionais sobre os reais, sequências e séries numéricas. Ao longo dessas etapas foram discutidos textos e apresentadas atividades resolvidas por alunos dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior sobre os conceitos de comensurabilidade e densidade, para que fossem analisadas pelos cursistas a luz dos textos discutidos nos fóruns e de suas experiências. A ideia era realizar uma análise dos textos produzidos pelos estudantes, tentando identificar o que estava errado, e fazer

inferências sobre os porquês desses erros. Muitos cursistas ficaram tímidos e só se manifestaram após muita insistência do professor responsável pelo curso, primeiro autor desse texto, o que já era esperado, pois mesmo estando em um ambiente de formação, é compreensível que um professor não queira expor suas eventuais fragilidades diante de seus pares.

De fato, vários cursistas apontaram passagens das soluções dos estudantes que estavam certas como erradas, assim como usaram argumentos equivocados para justificar falhas conceituais dos estudantes. Isso fez com que mais tempo fosse dedicado ao estudo aprofundado dos conceitos e, apenas depois de muita discussão a respeito, foram retomadas as análises das soluções dos estudantes.

Para discutir a expansão decimal dos reais e sequências e séries numéricas, foram utilizados recursos digitais. A *MusiCALColorida*, um “ambiente computacional semelhante a uma calculadora que possibilita, entre outras coisas, representar os algarismos da parte decimal de um número por meio de uma pintura ou música” (SOUZA, 2010, p. 18), foi utilizada para trabalhar a expansão decimal dos reais, e *Mathlets* desenvolvidos com o *GeoGebra* foram utilizados para estudar o comportamento de sequências e séries numéricas. O objetivo era fazer uso de recursos tecnológicos digitais para (re)construir conceitos matemáticos de forma dinâmica e investigativa.

As etapas seguintes, 5, 6 e 7, abordaram o estudo de limites, continuidade, derivadas e integrais de funções reais a uma variável real. Até então, por mais que os conceitos discutidos não fossem explicitamente abordados no Ensino Médio, havia uma relação mais direta, pois tratavam-se de números reais, e os cursistas se colocavam de forma aparentemente mais segura e confortável. Já nesse momento do curso, o número de postagens caiu drasticamente, sendo necessário um aumento significativo de intervenções e postagens de estímulo por parte do professor responsável pelo curso.

Nessas três etapas, o que merece maior destaque é a dificuldade com conceito de limite. Esquinhalha (2017) apresenta uma pesquisa realizada com 80 professores do Ensino Superior, questionados a respeito do que seria essencial em um curso de Análise Real para licenciandos em Matemática. Vários desses professores apontaram a compreensão do conceito de limite e dos processos infinitos como primordiais. Abaixo, a fala de um desses professores universitários, que aqui não será identificado.

*Ao meu ver, o grande problema é o conceito de limite, que está intimamente associado à estrutura da reta real, com os números irracionais. Os números irracionais são uma boa introdução ao conceito de limite. Sem uma compreensão plena do conceito de limite, aplicado a sucessões e a funções, fica impossível trabalhar significativamente com os conceitos de derivada e de integral. As ideias sobre irracionais e limites dos alunos que chegam a universidade são lamentáveis. Eles são excelentes alunos: repetem exatamente as barbaridades dos livros didáticos.*

Por meio das discussões estabelecidas ao longo dessas etapas, ficou evidente que os cursistas, em sua maior parte, precisam desconstruir conceitos equivocados sobre limites e continuidade, essencialmente. O que o professor universitário comenta no excerto acima acontece não apenas com os estudantes que chegam à universidade, que muitas vezes replicam o que ouviram de seus professores na escola, que por sua vez, replicam livros didáticos, que perpetuam equívocos. Por exemplo, uma tarefa recorrente ao longo dessas etapas era buscar em livros didáticos escolares, atividades que permitissem explorar ideias associadas a processos infinitos, taxas de variação e áreas de regiões planas, e caberia aos cursistas adaptar essas atividades para propiciar interlocuções com os conceitos de limite, derivada e integral, respectivamente. Alguns cursistas foram felizes em suas escolhas, mas poucos conseguiram compreender ou justificar as escolhas de seus colegas.

Da mesma forma, muitos cursistas repetiam conceitos equivocados, como o de continuidade em um ponto associado com a ideia de não tirar o lápis do papel. Foi necessário um exaustivo processo de intervenção nos fóruns de discussão para desconstruir esses conceitos, por meio do estudo das definições, propriedades, exemplos e contraexemplos para que os cursistas dessem, em suas postagens, indícios de aprendizado, o que felizmente aconteceu com uma parte significativa deles, e será apresentado e discutido em um próximo trabalho.

Por fim, a última etapa retomou à pergunta inicial “Por que Análise Real na Licenciatura?” e, de forma geral, as respostas podem ser condensadas da seguinte forma: “porque números e funções reais são dos temas mais importantes do Ensino Médio, e é fundamental conhecer as teorias que os regem do ponto de vista matemático e pedagógico, de forma integrada”. Essa resposta, por nós generalizada, vai ao encontro do principal objetivo do curso, que era o de propiciar a busca de interlocuções possíveis entre o elementar e o avançado em Matemática. Cabe ressaltar que, no início do curso, as respostas poderiam ser lidas apenas como “porque é importante conhecer o rigor matemático”, como se o rigor matemático

existisse apenas em Análise e não permeasse outros campos da Matemática estudados ao longo da Licenciatura.

### **Considerações finais**

Esse trabalho buscou tratar brevemente da necessidade de mais pesquisas sobre o cuidado com o ensino de disciplinas do eixo científico dos cursos de Licenciatura em Matemática, em particular, da Análise Real. Como reforçam documentos oficiais brasileiros sobre a formação docente, é importante que essas disciplinas também chamem para si o papel de articular os assuntos que são usualmente explorados apenas no Ensino Superior com a prática do futuro professor de Matemática. Nesse intuito, o presente texto objetivou compartilhar um caminho possível para a formação continuada de professores da Educação Básica e também da Educação Superior, fomentando discussões e atividades que possibilitem a percepção dessas conexões tão necessárias.

Em particular, compartilhamos o percurso desenvolvido ao longo de oito etapas de um curso de extensão, oferecido a distância, que buscou ensaios possíveis em sala de aula escolar, com as ideias por trás dos principais conceitos trabalhados em Análise Real. Os elementos disparadores das discussões realizadas em fóruns, em que os cursistas estavam separados por grupos, foram sinteticamente apresentados, assim como alguns comentários tecidos. Nosso objetivo foi o de relatar uma experiência desafiadora, mas possível e com indícios de sucesso. Sobre o processo formativo, cabe ainda destacar a necessidade de rever a abordagem dos conceitos de Análise Real nos cursos de Licenciatura, é premente que o rigor continue sendo trabalhado, mas que também haja espaço para que os licenciandos entendam os porquês matemáticos de estarem estudando aqueles conteúdos e como isso pode se articular com sua futura prática. Por fim, um ponto que não foi destacado ao longo do texto é a possibilidade de formação que extrapole os conceitos de espaço e tempo, permitindo um visitar e revisitar permanente das falas dos outros cursistas, possibilitando tempo para reflexão e amadurecimento, o que pode ser particularmente bem promovido em cursos na modalidade a distância, desde que realizados com compromisso e direcionamento adequados por parte dos responsáveis e cursistas.

### **Referências bibliográficas**



ÁVILA, G. (2012). O ensino do Cálculo e da Análise. **Revista Matemática Universitária**, n. 33, p.83-95, São Paulo.

BARONI, R. L. S. (2015). Algumas questões sobre o ensino de Análise em cursos de formação de professores de Matemática. In: **Anais do III Fórum de Discussão Parâmetros Balizadores da Pesquisa em Educação Matemática**, PUC-SP, São Paulo, 2015.

\_\_\_\_\_, OTERO-GARCIA, S. C. (2013). **Análise Matemática no Século XIX**. Campinas: SBHMat, 2013.

ESQUINCALHA, A. C. (2017). **Buscando interlocuções entre Análise Real e a Matemática Escolar em um curso a distância com professores da Educação Básica**. Relatório de Pesquisa de Pós-Doutorado. Seropédica: UFRRJ/PPGEduCIMAT.

MAZZI, L. C. **Experimentação-com-GeoGebra: revisitando alguns conceitos da Análise Real**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Rio Claro, SP: UNESP, 2014.

MOREIRA, P. C., CURY, H. N., VIANNA, C. R. (2005). Por que Análise Real na Licenciatura? **Zetetiké**, v. 13, n. 23, p.11-42, Campinas.

MOREIRA, S. F., MUNIZ, T. O. M. (2014). O ensino de Análise: contribuições e perspectivas na formação do professor de Matemática. In: **Anais do I Simpósio Educação Matemática em Debate**, UDESC, Joinville.

SOUZA, F. R. (2010). **Explorações de frações equivalentes por alunos surdos: Uma investigação das contribuições da MusiCALColorida**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Bandeirante de São Paulo, SP, Brasil.