

ASPECTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS EN LA VIRTUALIZACIÓN DE BLOQUES DE BASE DIEZ

Carlos de Castro Hernández – Gabriela Cadenas – Ana Prades
carlos.decastro@uam.es – gabriela.cadenas@smartick.es – ana.prades@smartick.es
Universidad Autónoma de Madrid, España – Smartick, Venezuela – Smartick, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Primaria (6 a 12 años)

Palabras clave: bloques de base 10, manipulativos virtuales, resta con llevada, vídeos didácticos.

Resumen

Los bloques de base diez de Dienes es uno de los materiales manipulativos de los que más versiones virtuales se han realizado. Trasladar un material a un entorno online implica tomar una serie de decisiones didácticas en el diseño del mismo. Algunas decisiones afectan a qué parte del trabajo hace el alumno y qué parte hace el entorno; otras, afectan a la interpretación semántica de las operaciones, viendo la resta como sustracción, diferencia, etc. Otro aspecto a destacar es la relación que se establece entre el material manipulativo virtual y el algoritmo de la operación, entre los objetos y los símbolos. Nos centraremos en el uso de los bloques de base diez para el aprendizaje de la resta con llevada.

Describimos el análisis que hemos realizado de varias virtualizaciones de los bloques de base diez, las decisiones didácticas que hemos tomado en el diseño de nuestra virtualización del material, y cómo articulamos el uso de tutoriales interactivos y la secuenciación de actividades con el material para promover un aprendizaje con comprensión de los algoritmos y del sistema de numeración decimal.

Introducción

Un tema de permanente actualidad en el ámbito de la educación matemática es el uso de materiales manipulativos (físicos y virtuales) en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Una posición que compartimos es que materiales “virtuales y manipulativos se complementan” (Muñoz Santonja y Murcia, 2017). Sarama y Clements (2016), en un monográfico dedicado a los materiales manipulativos virtuales, realizan una revisión profunda acerca de la manipulación física y virtual. De ella deseamos enfatizar solo dos aspectos que dan cuenta del escepticismo con el que muchos expertos y maestros miran la manipulación. Uno de ellos es atribuir a la manipulación un papel más próximo al dominio

afectivo que al cognitivo (los materiales son para jugar más que para aprender), como si fueran dos aspectos que no pueden armonizarse. Otro, que no es la manipulación, sino la reflexión acerca de la manipulación, la que produce conocimiento matemático. Los materiales manipulativos no “hacen magia” y no tienen sentido por sí mismos, sino que deben integrarse en una actividad matemática, y usarse adecuadamente, lo que implica que en algunos casos no es extraño encontrar que la manipulación virtual pueda incluso tener ventajas sobre la manipulación física. En esta línea, García Moreno (2017) enfatiza que “la manipulación no es un objetivo en sí misma, una competencia matemática” (p. 15) y establece comparaciones interesantes entre la manipulación virtual y la física.

Para reflexionar acerca de los aspectos didáctico-matemáticos de las versiones virtuales de los materiales manipulativos, hemos decidido seleccionar un material muy conocido, los bloques de base 10 de Dienes, y una dificultad que suelen tener los alumnos de primeros cursos de educación primaria: el aprendizaje con comprensión de la resta con llevada. Comenzamos planteando en el siguiente apartado algunas opciones cruciales, tanto en la virtualización de los materiales, como en la explicación del uso del material en vídeos didácticos.

El objetivo de este trabajo no es evaluar las virtualizaciones o los vídeos, sino ilustrar con ejemplos de forma clara que el diseño de recursos online para el aprendizaje de las matemáticas, ya sean materiales manipulativos virtuales o vídeos didácticos, más allá de suponer un reto técnico, requiere una importante reflexión didáctico-matemática.

Características y opciones en las virtualizaciones de los bloques de base 10

En este apartado estudiamos algunas características de las virtualizaciones que reflejan opciones didáctico-matemáticas. Entre ellas destacamos: (a) La interpretación semántica de la operación aritmética de restar; (b) Cómo se hace la transición de la operación con materiales manipulativos a la operación escrita; (c) Cómo se trata la parte del algoritmo de la resta que concierne al cálculo de hechos numéricos; (d) Qué parte del algoritmo realiza el alumno y qué parte viene hecha por el recurso sin que el alumno tenga que intervenir. Pasamos a comentar las cuestiones que subyacen a estas opciones.

En cuanto a la interpretación semántica de la resta, a esta operación aritmética pueden atribuírsele diversos significados, algunos de los cuales son los siguientes: (1) Puede pensarse

como una acción de quitar, como en los problemas aritméticos verbales de cambio decreciente con la incógnita en la cantidad final. Si tengo una cantidad y quito una parte de la misma, ¿cuántos me quedan?; (2) Como la cantidad que es necesario añadir a otra cantidad para alcanzar o igualar una cantidad mayor, como en los problemas de cambio creciente con incógnita en la cantidad de cambio o como una igualación con incógnita en la diferencia; (3) Como una comparación en la que calculamos la diferencia entre dos cantidades.

La transición de la operación manipulativa a la escrita debe enfocarse desde el punto de vista del aprendizaje por analogía. Al utilizar los bloques de base diez como un modelo intuitivo analógico del sistema de numeración decimal, debemos recordar que el aprendizaje por analogía evoluciona a través de 3 etapas –concreta, puente y simbólica– que corresponden con el uso del material manipulativo aislado, la conexión entre las manipulaciones y los símbolos, y la manipulación simbólica ya “emancipada” de la manipulación de objetos físicos. El objetivo final de toda manipulación de objetos físicos en matemáticas es llegar a prescindir de la manipulación de objetos físicos. Por tanto, es muy relevante plantearnos cómo se hace la transición de un tipo de manipulación (física) a otra (simbólica).

Por otra parte, el algoritmo de la resta implica dos tipos de contenidos matemáticos ligeramente distintos: el cálculo de hechos numéricos –¿cómo calculo $7 - 3$ dentro del algoritmo?; y el procedimiento de “llevada” o el de “pedir prestado”, que afectan a cómo podemos hacer para restar a un 4 del minuendo un 6 del sustraendo y qué significa cambiar el 4 por un 14 en cada caso.

Finalmente, una reflexión didáctica general, no específica de las matemáticas, es la siguiente: En cualquier recurso online hay una parte que realiza el alumno y otra que se ejecuta de forma automática. Si se hace automáticamente, no se da al alumno la oportunidad de hacerlo por sí mismo; solo se le muestra, lo cual tiene como consecuencia que al alumno se le escatima una oportunidad de aprendizaje.

Un par de ejemplos de virtualización: didactmaticprimaria y el proyecto NLVM

A continuación, observamos (Figura 1) varios aspectos a destacar en una virtualización del proyecto didactmaticprimaria (García Moreno, 2014). La resta se hace por “cancelación”, como en los modelos de cargas positivas y negativas para los números enteros. Cada unidad del minuendo se cancela con una unidad del sustraendo, de modo que la resta se interpreta

como una comparación. Esta interpretación de la sustracción no es la más básica, que sería la de “quitar”, pero sí es más cercana al conteo desde la cifra del sustraendo hasta la del minuendo que es la estrategia base que se emplea en el aula en el algoritmo escrito. Este es un ejemplo claro de porqué sería difícil abordar este tipo de análisis desde un punto de vista evaluativo. En cuanto a la transición entre tipos de representaciones, no hay representación simbólica del proceso; solo se escribe con cifras el resultado. Con respecto a la cuantificación de los distintos tipos de unidades y al cálculo de hechos numéricos, tanto las unidades como las decenas aparecen organizadas en grupos de 5: las decenas en filas y las unidades adoptando la configuración del 5 en el dado. Esto permite reconocer cuántos hay en cada momento gracias a la subitización conceptual sin necesidad de contar, lo que facilita realizar la parte del algoritmo relativa a los hechos numéricos. Precisamente, es la parte del algoritmo no relacionada con “la llevada”, a veces desatendida en estos recursos.

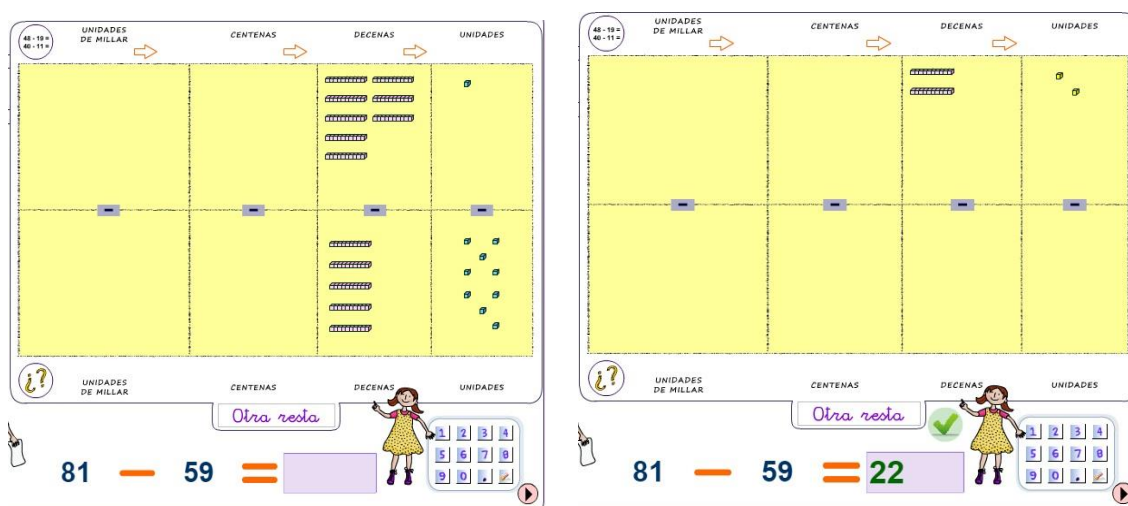


Figura 1. Resta con bloques de base 10 en didacticprimaria.com

En el applet de la [Biblioteca Virtual de Manipuladores Virtuales](#) (NLVM) de la *Utah State University* (Figura 2), la resta se hace por cancelación. Cada unidad azul del minuendo se arrastra hasta superponerse con una roja del sustraendo y ambas desaparecen. Las unidades y las decenas aparecen en una posición aleatorizada, sin adoptar ninguna configuración, lo que impide utilizar el reconocimiento súbito de la cantidad y obliga a contar para saber cuántas unidades hay de cada tipo. En esta virtualización, destaca la transición del material manipulativo al algoritmo escrito. Esta traducción entre registros diferentes se hace de forma

automática; no la hace el alumno. Como vemos en la Figura 2, la parte escrita no puede manipularse.

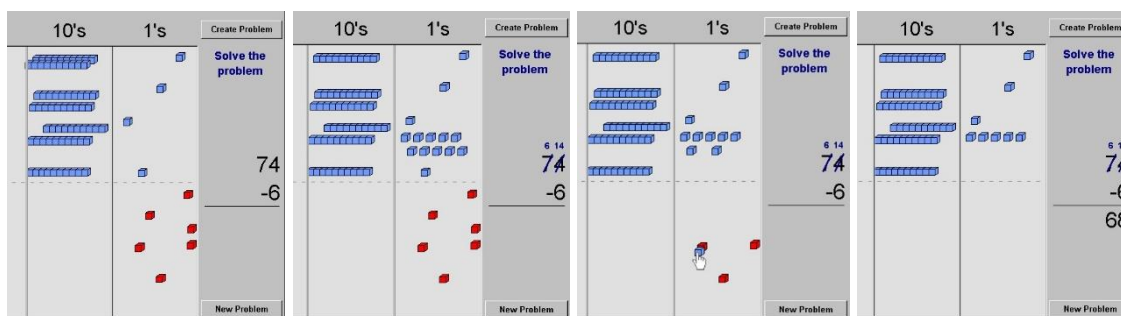


Figura 2. Resta con llevada en el proyecto NLVM.

La única parte de la operación en la que puede intervenir el alumno es el cambio de una decena por 10 unidades y la cancelación de unidades del mismo orden. Una vez finaliza la cancelación, el resultado escrito aparece sin intervención del alumno. Toda la manipulación simbólica está automatizada; en particular, los hechos numéricos. Esto da una idea de que este recurso no se orienta al aprendizaje del algoritmo completo, sino que enfoca específicamente una parte: el cambio de las decenas por unidades.

Explicaciones en vídeo sobre el uso de bloques de base 10

Algunos de los aspectos y opciones a los que atendemos en las virtualizaciones pueden también valorarse en vídeos didácticos. Analizamos aquí el vídeo de Nuévalos, Pérez, Planells y Vela (2014) sobre la resta con llevada. La operación que se explica en el vídeo es $745 - 226$. En la Figura 3 observamos dos momentos de la explicación. En el primero, dado que a 5 unidades no se le pueden quitar 6, se observa la transformación de 1 decena en 10 unidades, que aparecen en la esquina superior derecha de la imagen preparadas para el cambio. A la derecha, tras cambiar la decena por las unidades, los autores del vídeo explican: “Si a quince, le quitamos seis, nos quedarán nueve” mientras van quitando 6 cubitos (unidades) del minuendo. Verbalmente, la resta se interpreta como acción de quitar “a quince, le quitamos seis”, pero la manipulación representa el minuendo y el sustraendo como dos cantidades diferentes. Es decir, el sustraendo no aparece representado con bloques como una parte del minuendo que se retira del mismo, sino que la representación evoca más una comparación. No se representa el paso del algoritmo manipulativo al algoritmo escrito. Sólo se representan con cifras el minuendo, el sustraendo y la diferencia, pero no el proceso. Por ejemplo, no aparece representado con cifras el cambio de 1 decena por 10 unidades.

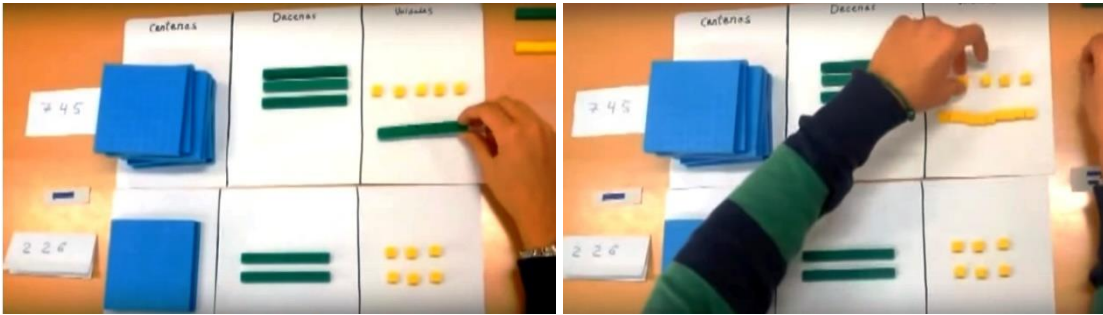


Figura 3. Dos momentos del vídeo de Nuévalos, Pérez, Planells y Vela (2014) sobre la resta.

Las opciones en la virtualización de los bloques en Smartick

En la plataforma online Smartick (De Castro y Gutiérrez del Álamo, 2016), hemos desarrollado nuestra propia virtualización de los bloques de base 10 de Dienes. En ella hemos puesto un especial énfasis en la traducción de la manipulación al algoritmo simbólico, pero también en la interpretación de la resta como un cambio decreciente con la incógnita en la cantidad final (una acción de quitar y ver cuántos quedan). Para ello, inicialmente no representamos con bloques el sustraendo (Figura 4), sino que el sustraendo debe quitarse al minuendo para ver al final cuánto queda en la fila de arriba (Figura 5, izquierda). Las unidades se presentan en filas de 5, lo que hace también posible el uso de la subitización conceptual para identificar la cantidad de cubitos (unidades) que hay sin contarlos (Figura 4, derecha).



Figura 4. La transformación de 1 decena en 10 unidades y la disposición de las unidades

En esta virtualización se puede manipular tanto la parte “física” como la parte simbólica. Una vez hemos transformado la decena en unidades, debemos anotar en el algoritmo escrito los pasos del proceso que hemos realizado con los bloques: Las 7 decenas que había se tachan, y sustituyen por las 6 que quedan. También añadimos un 1 delante de la cifra de las unidades, convirtiendo 4 unidades en 14 (Figura 5). En la derecha de la Figura 5, vemos la

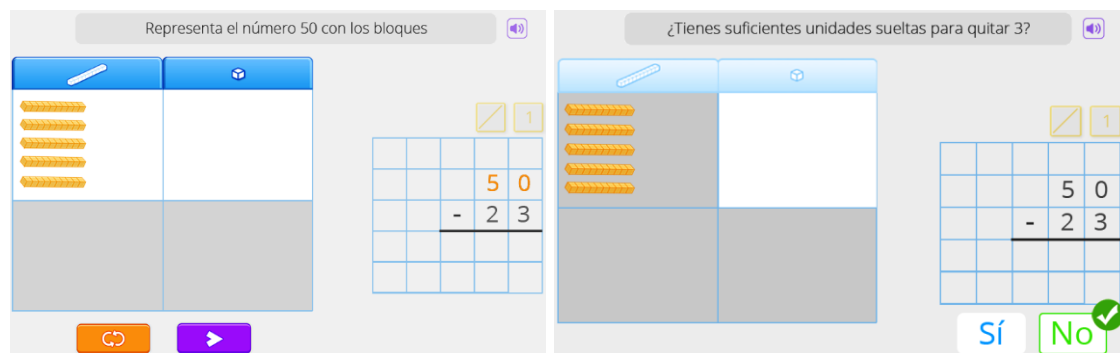
retroalimentación que proporciona el entorno cuando nos equivocamos en un paso de la operación; en este caso, en el cálculo de $13 - 7$.



Figura 5. La transición del material manipulativo a la escritura y la retroalimentación

El tutorial interactivo para la resta con llevada

El tutorial interactivo diseñado en Smartick presenta un proceso de resolución guiado a través de preguntas. Si las actividades de apartados anteriores proporcionan un entorno de práctica para asentar el procedimiento con comprensión gracias al uso del material, el tutorial suministra una oportunidad de aprendizaje guiado para el algoritmo. La Figura 6 presenta 6 momentos diferentes del tutorial: (1) En el primero, no aparecen materiales y se solicita al alumno que represente el minuendo con los bloques; (2) Dado que el cambio de una decena por una unidad debe ser motivado por una necesidad, se pregunta si tenemos suficientes unidades para restar las que se nos piden; (3) El siguiente paso presenta el cambio de 1 decena por 10 unidades; (4) y (5) Le siguen las anotaciones en la parte simbólica de los cambios que hemos hecho en la parte manipulativa a través del tachado de las decenas y añadiendo 10 a las unidades; (6) Finalmente, debe escribirse el resultado en el algoritmo escrito, para completar el proceso de transferencia analógica.



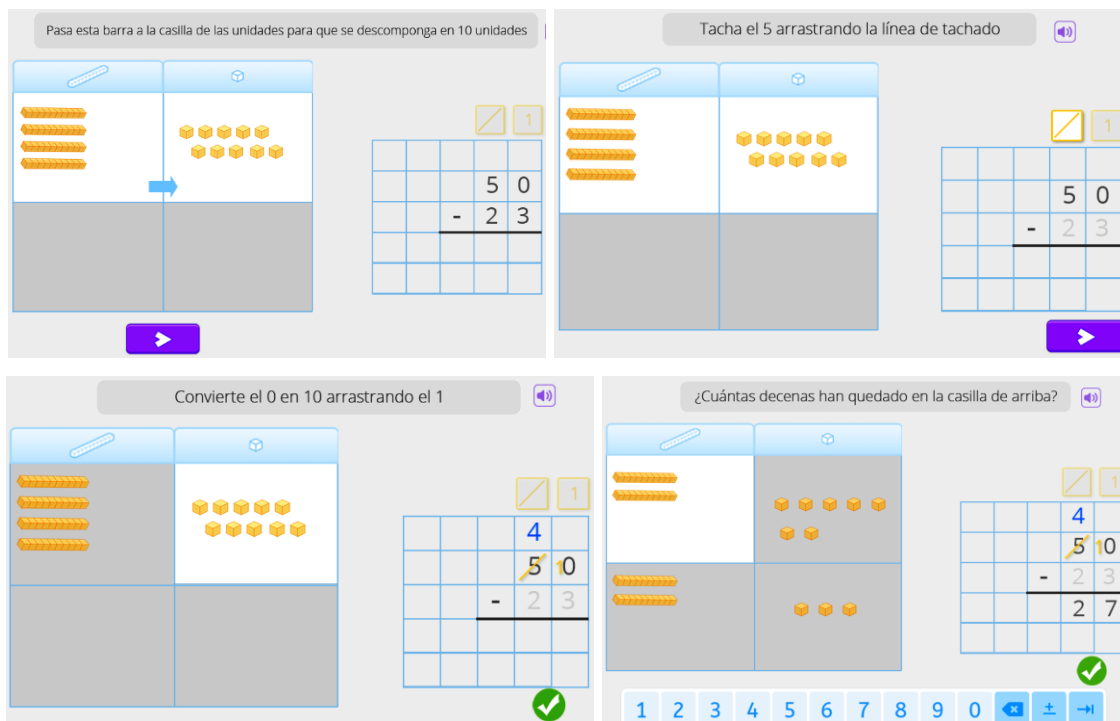


Figura 6. Seis momentos del tutorial interactivo sobre la resta con llevada

Reflexiones finales

Finalizamos el trabajo con una breve reflexión acerca del diseño y evaluación de recursos online. Este es un tema en el que deben ir de la mano los desarrolladores, profesores y expertos en educación matemática. Si ha habido históricamente críticas y objeciones a las excesivas expectativas puestas en el uso de materiales manipulativos para la enseñanza de las matemáticas, parecida cautela debemos guardar hacia los recursos online. Si los materiales manipulativos son solo objetos sin propiedades mágicas, lo mismo podemos decir de los materiales manipulativos virtuales. Más importante que el recurso es la actividad (o la secuencia de actividades) en la que se emplea el recurso como ayuda.

Volviendo a la introducción, insistimos en que no adoptamos una posición evaluativa. No valoramos los recursos online analizados, porque los criterios que aplicamos para el análisis deben referirse a los objetivos del recurso online para poder funcionar como criterios de evaluación. Si en este trabajo hemos comentado, por ejemplo, que el recurso de la Figura 2 no obliga a los usuarios a calcular hechos numéricos y se limita a recrear el cambio de decenas por unidades es posiblemente porque... ¡este sea su objetivo!, lo cual puede tener

perfecto sentido dentro de una propuesta de aprendizaje (concentrarse en un único aspecto o dificultad de una operación).

Finalmente, dejamos pendiente reflexionar sobre la diferencia entre un recurso puntual, o una actividad online, y una trayectoria de enseñanza con recursos online. Cada vez más enfoques didácticos, como el de Sarama y Clements (2016), aprecian que la mirada en los procesos de aprendizaje y enseñanza debe centrarse más en las trayectorias (en procesos prolongados, secuencias, etc.) que en actividades aisladas o recursos puntuales. Esperamos haber colaborado a orientar futuros esfuerzos de desarrollo de recursos online para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas y a poner el foco en decisiones didácticas que no deben pasar desapercibidas en estos diseños.

Referencias bibliográficas

- De Castro, C., y Gutiérrez del Álamo, P. (2016). Integración curricular de una plataforma online para el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, 5(1), 143-164.
- García Moreno, J. (2014). *Bloques base 10. SND, suma y resta*. Consultado 1/03/2017 en: <http://www.didactmaticprimaria.com/2014/10/bloques-base-10.html>
- García Moreno, J. (2017). Manipulativos físicos y virtuales. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 14-21.
- Muñoz Santonja, J. y Murcia, J.A. (2017). Virtuales y manipulativos se complementan. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 75, 4-6.
- Nuévalos, S., Pérez, M., Planells, J.A. y Vela, C. (2014). *Bloques Multibásicos: Resta con llevadas*. <https://www.youtube.com/watch?v=jDhQQE3zGn8> Consultado 1/03/2017
- Sarama, J. y Clements, D.H. (2016). Physical and Virtual Manipulatives: What Is “Concrete”? P.S. Moyer-Packenham (ed.), *International Perspectives on Teaching and Learning Mathematics with Virtual Manipulatives, Mathematics Education in the Digital Era* (pp. 71-93). Switzerland: Springer.