

PENSAMIENTO ALGEBRAICO EN PRIMARIA EN UN ENTORNO ONLINE: LAS LETRAS NO SON EL PROBLEMA

Carlos de Castro Hernández – Marisa Reguero Delgado – Patricia Gutiérrez-Del
Álamo Rodríguez – Mónica Ramírez García

carlos.decastro@uam.es – marisa.reguero@smartick.es
patricia.gutierrezdelalamo@smartick.es – monica.ramirez@edu.ucm.es

Universidad Autónoma de Madrid, Smartick, España, Smartick, España y Universidad
Complutense de Madrid, España

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Modalidad: CB

Nivel educativo: Primaria (6 a 12 años)

Palabras clave: early algebra, educación primaria, igualdades, TICE.

Resumen

Describimos una propuesta para el aprendizaje online de las matemáticas diseñada dentro de una línea de “early algebra”, implementada en la plataforma Smartick. La propuesta está compuesta por dos unidades: a) Pensamiento relacional aditivo con números hasta 100, unidad que consta de 7 lecciones; y b) Pensamiento relacional aditivo hasta 1000, con 9 lecciones. Cada lección diaria se compone de 4 tipos de tareas con igualdades: 1) Tareas de evaluación, con tres sentencias verdaderas o falsas, 2) Tareas de corrección, con una sentencia verdadera o falsa que puede corregirse, 3) Tareas de completar, con una sentencia con un hueco a rellenar, y 4) Tareas con letras, análogas a las de completar, pero con una letra en lugar del hueco.

Uno de los resultados más llamativos de la puesta en práctica de esta propuesta con alumnos de educación primaria es que las tareas con letras no son las más difíciles, como estaba previsto en un inicio al ubicarlas al final de la secuencia. Por el contrario, comentaremos las dificultades (previstas e imprevistas) que han surgido en el trabajo con igualdades y los retos que quedan pendientes como continuación a este trabajo.

Introducción

Durante los últimos decenios del siglo pasado se realizaron un gran número de investigaciones sobre las dificultades y errores de los estudiantes al principio de la educación secundaria obligatoria (Palarea, 1998). Las dificultades detectadas dieron paso a la elaboración de modelos de enseñanza que han recibido el nombre de “transicionales” (Schliemann, Carraher y Brizuela, 2011), porque plantean la cuestión de cómo abordar la problemática del álgebra, su enseñanza y aprendizaje, en el momento de transición de la

educación primaria a la secundaria. Las revisiones de investigaciones sobre estos enfoques de enseñanza muestran, junto a pequeños éxitos puntuales, que el enfoque transicional no ha dado los resultados esperados (Schlieman y otros, 2011).

Partiendo de hipótesis divergentes con las del enfoque transicional, se ha ido desarrollando una línea bajo la etiqueta de *early algebra* (álgebra temprana) basada en unos presupuestos diferentes: Más que corregir los errores detectados en el álgebra de secundaria, el enfoque consistiría en desarrollar, enfatizar, o realzar adecuadamente, las ideas algebraicas implícitas en buena parte de las tareas que *ya* se hacen en la educación primaria. Hoy esta aproximación no puede considerarse como una “novedad”, pues el influyente documento del año 2000 de los *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (NCTM, 2003, en español) ya presenta un estándar de álgebra que abarca toda la escolaridad (desde la educación infantil) y que propone para niñas y niños de 3° a 5° de primaria (8 a 11 años) el objetivo de “Representar y analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos” (p. 162). En España, un trabajo pionero en este enfoque es el de Molina (2006), al cual han seguido otros en el ámbito del pensamiento relacional (Fernández e Ivars, 2015; Molina, 2009) y algunos más en la línea de la búsqueda de patrones y la generalización (Merino, Cañadas y Molina, 2013) o del pensamiento funcional en las primeras edades (Cañadas, 2016).

En la plataforma *Smartick* (De Castro y Gutiérrez del Álamo, 2016) hemos abordado el proyecto de desarrollar una propuesta online para el desarrollo del pensamiento relacional aditivo con niñas y niños de 3° a 6° de educación primaria (8 a 12 años). Esta propuesta está inspirada en los trabajos de Carpenter, Franke y Levi (2003) y Molina (2006). Uno de los aspectos más difíciles de extrapolar de un contexto de aula a un entorno online es la discusión oral, que constituye un elemento considerado fundamental en la articulación del pensamiento algebraico. Así, los dos grandes retos que asumimos al proponer un modelo de enseñanza online en la línea del *early algebra* para niñas y niños de educación primaria son los siguientes:

(1) Lograr desarrollar procesos de pensamiento algebraico a través de entornos online en los que la interacción entre alumnos y alumno-profesor está modelizada por el sistema y es, *en principio*, más limitada que en el entorno de un aula convencional.

(2) Que la enseñanza de ideas algebraicas llegue a ser de manera efectiva un contenido transversal que, más allá de la adición de algunas unidades aisladas, llegue a impregnar todo el currículo matemático de la educación primaria.

Los cuatro tipos de actividades de la propuesta

Partiendo de las propuestas de pensamiento relacional planteadas en el aula a través de tareas con igualdades (Carpenter y otros, 2003 y Molina, 2006), hemos seleccionado y adaptado a un entorno online algunas de las tareas de estas investigaciones. Las tareas son de los siguientes tipos:

- *Evaluación de igualdades* con 3 opciones, donde se tienen que seleccionar las que sean verdaderas y puede haber 1 o 2 que lo sean (Figura 1, izquierda).
- *Corrección de igualdades*, donde se da la opción de corregir una de las cantidades, que puede ser correcta o incorrecta (Figura 1, derecha).
- *Igualdades a completar*, donde se debe completar una de las cantidades rellenando una casilla vacía con un valor numérico (Figura 2, izquierda).
- *Igualdades con letras*, análogas a las de completar, en las que en lugar del hueco aparece una letra cuyo valor debe averiguarse (Figura 2, derecha).



Figura 1. Actividades de evaluación y de corrección de igualdades

Aunque alguna tarea pueda parecer orientada a realizar operaciones aritméticas, todas ellas han sido seleccionadas para estimular el desarrollo del pensamiento algebraico. Por ejemplo, la Figura 1 (a la izquierda) nos presenta tres igualdades. Una leve inspección nos permite advertir que no es necesario calcular para determinar que la única sentencia correcta es la tercera. El cero es el único número que al sumarse deja al otro sumando inalterado. Es el

único *elemento neutro de la suma* y, por tanto, las otras dos sentencias deben ser falsas, dado que ni el 55, ni el 96 tienen esta propiedad especial del 0.

Completa para que se cumpla la igualdad	Completa el valor de c para que se cumpla la igualdad
<p style="text-align: center;">Las cantidades antes y después del = NO están en EQUILIBRIO, como el balancín. Busca la cantidad que hace que lo estén.</p> $63 + 31 - \square = 63 + 28$ 	$168 + 144 = 173 + c$ $c = \square$

Figura 2. Actividades de completar y actividades con letras

Una mirada a las tareas propuestas en la Figura 2 puede ayudar al lector a comprender por qué esperamos que niñas y niños desarrollen su pensamiento algebraico gracias a actividades de este tipo. Independientemente del formato, vemos que requieren un pensamiento relacional. En la de la izquierda, los niños de 8 años, que la han resuelto en un tiempo medio de 12 segundos, no están acostumbrados al típico procedimiento de las ecuaciones (el 63 está sumando y pasa al otro miembro restando), sino que al ver el 63 a ambos lados deben deducir que 31 menos cierto número (3) debe ser igual a 28. Lo mismo ocurre en la igualdad con letras de la derecha en el que, si 173 es 5 más que 168, para compensar, la c debe ser 5 menos que 144. Es decir, 139.

Estructura de la propuesta: las unidades y las lecciones

En Smartick, cada día el alumno se enfrenta a una lección compuesta por varios tipos de tareas. Si su desempeño en dicha lección es adecuado en términos de rapidez y porcentaje de acierto en las tareas, superará la lección. Las lecciones se integran en unidades, que van conformando a su vez líneas de trabajo, como la de *early algebra* que describimos en este trabajo, compuesta por dos unidades con 7 y 9 lecciones, que abordan tareas de pensamiento relacional aditivo con números hasta 99 y hasta 999. Con los cuatro tipos de actividades que hemos visto en el apartado anterior se elabora la propuesta. Cada tipo de tarea se puede plantear con distintos niveles de dificultad. La Figura 3 presenta ejemplos lo que

consideramos distintos niveles de dificultad para las igualdades que sirven de base en los cuatro tipos de tareas. La propuesta se incorpora en el programa de estudio de Smartick para niños desde 3° de educación primaria.

NIVEL	FALSAS	VERDADERAS
0	$87 - 37 = 85 - 34$	$87 - 37 = 85 - 35$
1	$56 + 37 = 56 + 35 + 3$	$56 + 37 = 56 + 35 + 2$
2	$56 + 37 = 56 + 39 - 3$	$56 + 37 = 56 + 39 - 2$
3	$56 - 39 = 58 - 39 - 3$	$56 - 39 = 58 - 39 - 2$
4	$56 - 37 = 56 - 39 + 3$	$56 - 37 = 56 - 39 + 2$

Figura 3. Ejemplos de niveles de dificultad en las igualdades

En la Figura 4 mostramos cómo se articulan los distintos tipos de actividades de *evaluar*, *corregir*, *completar* y *con letras* (Figuras 1 y 2), siguiendo un orden creciente en los niveles de dificultad de cada una de ellas, para elaborar las 7 lecciones que conforman la primera unidad. También presentamos en la parte derecha de la figura, las propiedades (elemento neutro, conmutativa, etc.) que constituyen elementos estructurales (de naturaleza algebraica) que deben interiorizarse (inicialmente, de un modo intuitivo e informal) para resolver las tareas e ir avanzando en la propuesta.

Lección 1	Evaluar	Corregir			Elemento Neutro Conmutativa Compensaciones Nivel 0, 1, 2
Lección 2		Corregir	Completar		
Lección 3			Completar	Con letras	
Lección 4	Evaluar	Corregir			Compensaciones Nivel 0, 1, 2, 3 y 4
Lección 5		Corregir	Completar		
Lección 6			Completar	Con letras	
Lección 7	Evaluar	Corregir	Completar	Con letras	Repaso Compensaciones Nivel 0, 1, 2, 3 y 4

Figura 4. Lecciones que integran la Unidad 1: Pensamiento relacional aditivo con números hasta 99

Resultados de los alumnos en las igualdades con letras

Para valorar el porcentaje de aciertos en las tareas, debemos considerar la referencia del 82,5% que se toma en Smartick para superar una lección. Este porcentaje ha sido elegido como referencia para intentar que el avance de los alumnos a través del camino de enseñanza personalizado que le va diseñando la plataforma se recorra de forma cómoda y posibilitando que el alumno cree un autoconcepto positivo como matemático.

Con todas las tareas, lecciones y unidades del sistema se realiza un análisis descriptivo que incluye un estudio de la eficiencia, en términos de porcentajes de acierto y rapidez de resolución, que ofrece una primera panorámica sobre el desempeño de los alumnos a lo largo del camino de enseñanza diseñado.

Una de las primeras observaciones que merece la pena destacar, tras este primer análisis, es que las tareas con letras no han resultado difíciles para los niños de 8 a 12 años (ver Tabla 1 y Figura 5). Es más, en tercero de primaria, primer curso para el que está diseñada la propuesta, el porcentaje de acierto no ha bajado de un 95%, lo cual da una clara indicación de que las tareas que planteamos no ofrecen grandes dificultades. Esto nos ha llevado a destacar, a modo de titular periodístico, el subtítulo de este trabajo: “Las letras no son el problema”.

Otro aspecto destacable tiene que ver con los tiempos de respuesta. Aunque es difícil inferir de un tiempo de respuesta que los alumnos utilicen una estrategia u otra, sí es cierto que tiempos medios de respuesta de 12 segundos en este tipo de tareas descartan en la práctica la posibilidad de que los niños estén utilizando estrategias de cálculo mental. También parece poco plausible la opción de que empleen técnicas de resolución propias de las ecuaciones, cuando todavía no las han estudiado en la escuela, ni en su camino de enseñanza anterior dentro del sistema.

EDAD	PORCENTAJE DE ACIERTOS	TIEMPO MEDIO (SEGUNDOS)	NÚMERO DE ALUMNOS	NÚMERO DE PROBLEMAS
8	95,28	12	83	2.162
9	95,25	12	145	3.980
10	94,29	12	122	3.553
11	93,47	11	98	2.803
12	94,43	11	64	1.760

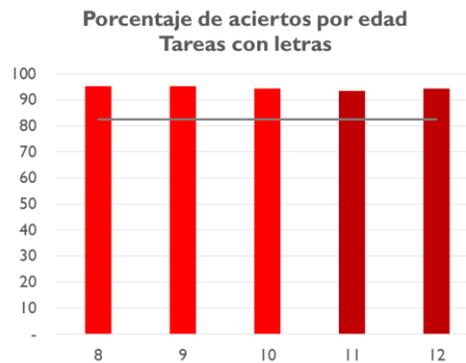


Tabla 1 y Figura 5. Porcentajes de acierto en tareas con letras

Dificultades encontradas en la aplicación de la propuesta

En la Figura 6 quedan registrados los porcentajes de acierto para cada tipo de tarea, perteneciente a cada lección de la unidad de pensamiento relacional aditivo con igualdades con números del 10 al 99. Vemos que las tareas más difíciles son siempre las de evaluar (ver tareas en Figura 2 y resultados en Figura 6).

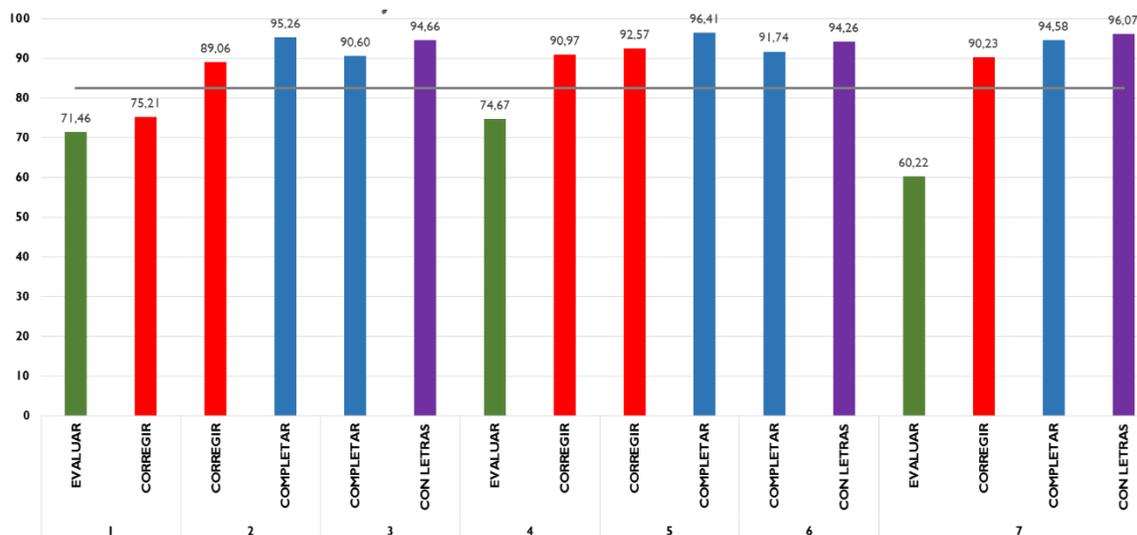


Figura 6. Porcentajes de acierto por unidad y tipo de tarea

A pesar de que el porcentaje de acierto se puede considerar alto (71,46%, 74,67% y 60,22%), no lo evaluamos así dentro del contexto del funcionamiento de la plataforma, donde un porcentaje inferior al 82,5% puede implicar que el alumno no supere la lección. Podemos decir, por tanto, que las dificultades que describimos tienen un carácter relativo a un determinado criterio que establece cómo se produce el avance de los alumnos a través de sus

caminos de aprendizaje que diseña la plataforma. Como se aprecia en la Figura 6, casi todos los tipos de tareas tienen un porcentaje de acierto superior al 90%.

Reflexiones finales

En la línea de los planteamientos de Schliemann y otros (2011), de estos resultados positivos en el aprendizaje de tareas que requieren un pensamiento algebraico con niñas y niños en edades tan tempranas (8-9 años, tercero de educación primaria), se puede concluir que no es cierto que exista una dificultad insalvable, ligada al desarrollo cognitivo, para el desarrollo del pensamiento algebraico en la educación primaria.

Si bien, como suele ocurrir en las investigaciones educativas, resulta difícil generalizar los resultados, estos nos parecen prometedores. Más que por el número de alumnos o de tareas cuyos datos hemos descrito (Tabla 1 y Figura 5), por la diversidad del alumnado en términos geográficos, de tipo de escuela (pública o privada), de edad (8 a 12 años), etc. En la línea sugerida en la exposición de resultados, necesitamos realizar entrevistas a los niños y niñas que han participado en la propuesta para confirmar nuestra hipótesis de que efectivamente están empleando el tipo de pensamiento relacional que hemos conjeturado y cuyo desarrollo constituía el objetivo principal de nuestra propuesta.

Una cuestión que requiere profundización es la dificultad detectada en las tareas de evaluación. Dichas tareas (Figura 1) no figuraban entre las más difíciles en nuestras predicciones iniciales. La taxonomía de Bloom establece que las tareas de evaluación son las más complejas¹. Esta hipótesis nos parece razonable en un contexto en que hemos diseñado tareas de evaluación que, más allá de juzgar la corrección o incorrección de una sentencia aritmética mediante un cálculo, se espera que conduzcan a los alumnos a juzgar la corrección o incorrección en términos estructurales (algebraicos); por ejemplo, utilizando su conocimiento informal de las propiedades de las operaciones (conmutativa, asociativa, elemento neutro, etc.).

Un aspecto interesante de las dificultades encontradas es que constituyen un punto de partida para desarrollos posteriores del sistema. En Smartick, igual que en otros modelos de enseñanza online, el sistema enseña (modeliza un docente) y está obligado a aprender “cómo mejorar como profesor”. Un criterio de evaluación del sistema es favorecer que los alumnos transiten con fluidez (sin atascos) a través de los caminos de enseñanza que el sistema diseña para ellos. Esto implica estudiar, y encontrar una explicación, para los casos que presentan

¹ Agradecemos esta idea que nos aportó Ana Belén Montoro en un Seminario de Pensamiento Numérico y Algebraico de la SEIEM.

una dificultad inesperada. Este tipo de indagación frecuentemente retroalimenta nuestras perspectivas teóricas. Por ejemplo, en este trabajo nos ha llevado a reflexionar sobre la aplicación de la taxonomía de Bloom revisada a tareas matemáticas en un entorno online.

Finalmente, para que este enfoque sobre el desarrollo del pensamiento algebraico a lo largo de toda la educación primaria pueda extenderse, serán necesarios múltiples y diversos esfuerzos de desarrollo curricular, implicando un cambio en el tratamiento de cuestiones algebraicas en los textos de educación primaria (Ramírez y Rodríguez, 2011). También será necesario formar e implicar a maestras y maestros de educación primaria en un nuevo papel como promotores del desarrollo del pensamiento algebraico (Fernández e Ivars, 2015).

Referencias bibliográficas

- Cañadas, M.C. (2016). Álgebra escolar: un enfoque funcional. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 73, 7-13.
- Carpenter, T.P., Franke, M.L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth. Heinemann.
- De Castro, C., y Gutiérrez del Álamo, P. (2016). Integración curricular de una plataforma online para el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. *EDMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC*, 5(1), 143-164.
- Fernández, C. e Ivars, P. (2015). Pensamiento relacional en primaria: el papel del maestro. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas*, 73, 14-22.
- Merino, E., Cañadas, M.C. y Molina, M. (2013). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 2(1), 24-40.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.
- Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Palarea, M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. La Laguna: Universidad de la Laguna.
- Ramírez, M. y Rodríguez, P. (2011). Interpretaciones del signo igual: Un estudio de libros de texto. *Unión: revista iberoamericana de educación matemática*, 26, 41-55.
- Schliemann, A.D., Carraher, D.W. y Brizuela, B.M. (2011). *El carácter algebraico de la aritmética: De las ideas de los niños a las actividades en el aula*. Buenos Aires: Paidós.