

La actividad de modelización en el ámbito de las relaciones espaciales en la Educación Infantil

Luisa Ruiz Higuera

Universidad de Jaén, lruiz@ujaen.es

Francisco Javier García García

Universidad de Jaén, fgarcia@ujaen.es

Elena M^a Lendínez Muñoz

Universidad de Jaén, emlm0002@red.ujaen.es

Fecha de recepción: 06-05-2013

Fecha de aceptación: 06-06-2013

Fecha de publicación: 15-07-2013

RESUMEN

En este trabajo mostraremos, en primer lugar, cómo el sistema de enseñanza no asume, en general, el desarrollo de las competencias necesarias para generar los conocimientos espaciales que todo ciudadano precisa para la vida diaria. En segundo lugar, esbozamos las diferencias existentes entre los conocimientos espaciales y los conocimientos geométricos, atendiendo a la génesis, el vocabulario, la organización de los conocimientos y la naturaleza de la validación. En tercer lugar, describimos la actividad modelización del espacio de forma analógica y geométrica, mostrando que, tanto una como otra, permiten establecer conexiones justificadas entre dos mundos: el mundo sensible y un modelo del mismo, cuyo régimen simbólico está dotado de reglas internas con muy distintos niveles de formalización. Por último, presentamos un conjunto de situaciones cuyo objetivo es que los alumnos de educación infantil realicen una actividad matemática de modelización espacio-analógica e incluso lleguen a aproximarse a la modelización geométrica.

Palabras clave: Modelización espacio-geométrica, educación infantil, situaciones didácticas.

Modeling activity in the field of spatial relations in Early Childhood Education

ABSTRACT

In this paper we will show, first of all, how the educational system does not take charge of the teaching of the spatial competencies every citizen needs for its daily life. Secondly, we will outline differences between spatial knowledge and geometric knowledge, according to their genesis, vocabulary, structure and validation. Thirdly, we describe the analogic and geometrical modeling activity of space, showing that both allow connections between two worlds: the sensitive world and a model of this. Both worlds include different internal rules, with different formalization levels. Finally, we introduce a collection of didactic situations for preschool. The aim of these situations is to get pupils involved in an analogic modeling activity of space, and even a first approach to geometric modeling.

Key words: Space-geometric modeling, early childhood education, didactic situations.

1. Introducción

La representación y el tratamiento de la información espacial constituyen las funciones primeras de los "grafismos" del espacio. Planos, mapas, dibujos técnicos, dibujos geométricos, conservan, para quienes los saben utilizar, informaciones de naturaleza espacial. Estas informaciones se consideran necesarias para la realización de tareas profesionales y también son imprescindibles para el correcto desenvolvimiento de todo ciudadano en su vida corriente. No obstante, su dominio comporta dificultades importantes y concierne al sistema educativo la responsabilidad de asumir su enseñanza desde los primeros niveles escolares.

En el currículo escolar la geometría ha absorbido casi por completo el proyecto didáctico que permite capacitar al alumno para dominar su entorno espacial y existen "puntos ciegos" en relación con determinados conocimientos espaciales.

Desde hace más de veinte años el pensamiento geométrico viene pasando por una profunda depresión en nuestra enseñanza matemática a todos los niveles (infantil, primaria y secundaria). Al hablar de conocimiento geométrico no nos referimos a la enseñanza de la geometría más o menos fundamentada en los Elementos de Euclides, sino a algo mucho más básico y profundo que es el cultivo de aquellas porciones de la matemática que provienen de y tratan de estimular la capacidad del hombre para explorar racionalmente el espacio físico en que vive, la figura, la forma física.

La crisis de los fundamentos de la matemática de principios del siglo XX empujó al matemático hacia el formalismo, hacía el énfasis del rigor, a una cierta huida de la intuición en la construcción de su ciencia.

Lo que fue bueno para la fundamentación fue considerado por muchos bueno también para la enseñanza de los conocimientos matemáticos. Las consecuencias para la enseñanza de las matemáticas en general fueron malas, pero especialmente nefastas fueron para el pensamiento geométrico. (Guzmán, 2001, pp. 21-22)

En general, según se ha constatado en investigaciones, tales como las de Berthelot y Salin (1993, 2003, 2005), y en la pionera en este dominio, realizada por Gálvez (1985), todas ellas dirigidas por Guy Brousseau, o bien en la llevada a cabo por Gobert (2001), los conocimientos espaciales útiles para la vida se excluyen casi sistemáticamente de la enseñanza de las matemáticas escolares. Los ciudadanos acabarán, mal que bien, aprendiéndolos por su cuenta de forma limitada y sesgada, a medida que vayan enfrentándose a los problemas cotidianos en donde se haga necesario ponerlos en funcionamiento.

Este fenómeno de transparencia de los conocimientos espaciales parece lejos de ser superado. A modo de ejemplo, cuando Alsina (2012) destaca la necesidad de trabajar procesos y contenidos en la escuela infantil, estos últimos se categorizan en razonamiento lógico-matemático, numeración y cálculo, geometría, medida y estadística y probabilidad, sin referencia alguna pues a los conocimientos espaciales. Posteriormente, en las actividades que plantea, se observa la presencia de conocimientos espaciales, pero englobados dentro de la categoría de conocimientos geométricos, como si de una parte de estos se tratase.

En este trabajo trataremos de responder a las cuestiones que siguen:

- ¿Asume el sistema de enseñanza el desarrollo de las competencias necesarias para generar los conocimientos espaciales necesarios para la vida diaria de todo ciudadano y para el trabajo profesional?
- ¿Cómo figuran en el currículum escolar estos conocimientos matemáticos?
- ¿Qué diferencia existe entre conocimientos espaciales y geométricos? Los conocimientos espaciales y los geométricos ¿tienen características diferentes?
- ¿Cómo las actividades de modelización espacial pueden permitir a los alumnos de este nivel educativo establecer conexiones entre el mundo sensible y un modelo del mismo?

- ¿En qué consiste la modelización espacial? ¿Podemos llevar a cabo, desde el nivel de Educación Infantil, verdaderos procesos de modelización espacial?
- ¿Qué situaciones podemos diseñar para que los alumnos de este nivel educativo construyan con sentido los conocimientos espaciales?

2. Breve análisis de la posición de los conocimientos espaciales y geométricos en el currículum escolar

Nuestro objetivo es mostrar cómo el sistema de enseñanza a través de los programas oficiales ha favorecido, o no, el desarrollo de las competencias necesarias para generar los conocimientos espaciales necesarios para todo ciudadano en su vida diaria y para el trabajo profesional.

Si nos remontamos a los programas escolares propuestos por el MEC en 1967¹, los contenidos para la educación de párvulos se referían a la identificación de figuras geométricas elementales y, para la educación primaria, incluían "elementos de geometría" y, así, figuraban, entre otros: noción de ángulo, simetría axial, mediatriz de un segmento, rectas perpendiculares, polígonos, circunferencia y círculo, paralelogramos, teorema de Pitágoras, prismas, pirámides, cilindros y conos, áreas y volúmenes, teorema de Tales,...

Es en los programas escolares propuestos por el MEC en el año 1971 para la escuela primaria en los que por primera vez figura el objetivo: Desarrollar la intuición espacial: distancia, proporción, perspectiva, etc. Sin embargo, cuando especifican los contenidos vuelven a figurar solo elementos de geometría: líneas poligonales, descripción funcional de cubos, pirámides, prismas, ángulos, paralelismo y perpendicularidad, círculo, reconocimiento y descripción de poliedros y cuerpos redondos, etc.

En el año 1981² los nuevos programas propuestos por el MEC para la educación preescolar incluyen por primera vez un bloque denominado "Exploración del espacio y primeros pasos en geometría". En este sentido, cabe señalar que, el término "conocimientos espaciales" no formó parte de los programas escolares hasta que no se divulgaron las investigaciones piagetinas sobre la construcción del espacio por el niño (Piaget, Inhelder, 1948).

En los diseños curriculares para la educación primaria en la región de Andalucía³ del año 1992, figura el bloque: "Conocimiento, orientación y representación espacial", en el que se considera que:

Al desarrollar los contenidos relacionados con el conocimiento, orientación y representación espacial el alumno progresará, en función de sus vivencias y nivel de competencias cognitivas, desde las percepciones intuitivas del espacio, hasta la progresiva construcción de nociones topológicas, proyectivas y euclidianas, que facilitarán su adaptación y utilización del espacio (Decreto 105/1992, p. 4098).

Los diseños curriculares para la educación infantil (BOJA,1993)⁴, también indican que: "Se deben plantear situaciones que les permitan avanzar en lo que respecta a la orientación espacial: situación de sí mismos en el espacio y la situación de los objetos en relación con el propio cuerpo, de un objeto con otro, de uno mismo con los objetos (hacia arriba-hacia abajo, hacia adelante-hacia atrás, hacia un lado, hacia otro, delante-detrás, arriba-abajo, a un lado a otro, cerca-lejos, juntos-separados)", lo que supone la constatación oficial de la necesidad de llevar a cabo actividades para el desarrollo de los conocimientos espaciales en los niños/as.

¹ Boletín Oficial del Ministerio de Educación y Cultura nº 80 (1967, p. 2429)

² Boletín Oficial del Estado, nº 18 (1981, p. 1384 – 1389)

³ Boletín Oficial de la Junta de Andalucía , nº 56, (1992)

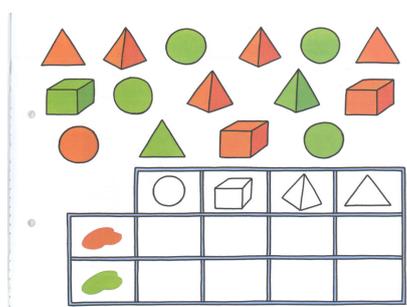
⁴ ORDEN de 16 de marzo de 1993, por la que se establecen criterios y orientaciones para la elaboración de proyectos curriculares de Centro y la secuenciación de contenidos en la Educación Infantil. Recuperable en: <http://www.juntadeandalucia.es/boja/1993/47/32>

El Real Decreto en vigor (RD 1630/2006) supone un retroceso en este avance relativo. La descripción, en general, del área lógico-matemática es más escueta. En lo relativo a conocimientos espaciales, éstos aparecen formulados en el bloque 1 ("Medio físico: elementos, relaciones y medidas", dentro del área "Conocimiento del entorno"), en el que apenas se le dedican tres líneas a la vez que se unen, rápidamente, con saberes geométricos: "Situación de sí mismo y de los objetos en el espacio. Posiciones relativas. Realización de desplazamientos orientados. Identificación de formas planas y tridimensionales en elementos del entorno. Exploración de algunos cuerpos geométricos elementales" (RD 1630/2006, p. 479).

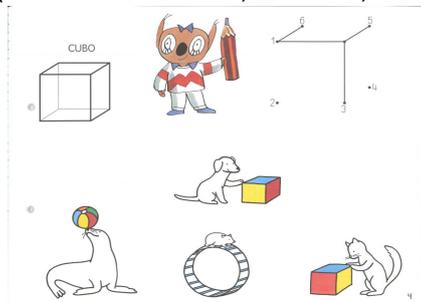
Como se constata, a lo largo de los años ha existido un avance notorio en cuanto a la inclusión de conocimientos espaciales en los programas oficiales (con la excepción del último decreto), sin embargo, en los manuales y fichas escolares, estos conocimientos se reducen, en su gran mayoría, a la identificación de figuras poligonales elementales: cuadrado, triángulo, círculo, rectángulo o incluso poliédricas: cubos, prismas, pirámides, etc., a dibujar la figura simétrica de una dada, a señalar sobre dibujos la posición relativa de algunos objetos, etc. Casi la totalidad de las actividades propuestas responden a conocimientos geométricos, estando ausentes prácticamente los problemas relativos a los conocimientos espaciales. Presentamos varias fichas de educación Infantil (Figura 1) que evidencian la constatación anterior:



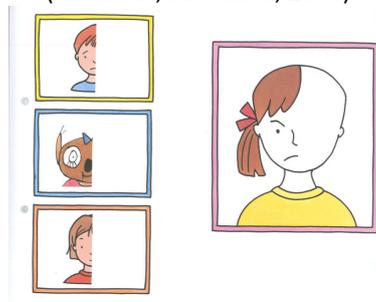
(Los caminos del saber, Santillana, 2012)



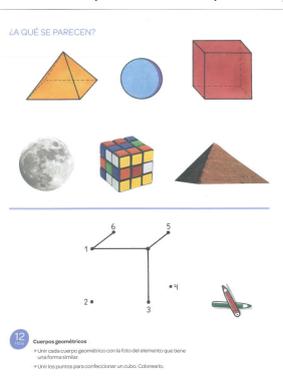
(Chiribitas, Santillana, 2008)



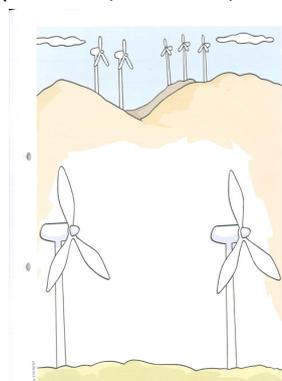
(Chiribitas, Santillana, 2008)



(Chiribitas, Santillana, 2008)



(Los caminos del saber, Santillana, 2012)



Señala los molinos que están más lejos
 (El mundo de Flopi, Everest, 2012)

Figura 1. Conocimientos geométricos en libros de Educación Infantil

Además, en nuestra experiencia con profesores de educación infantil y primaria que participan en grupos de trabajo en los CEPs, se constata que apenas si se trabajan en la escuela problemas en el espacio "real", sino que la mayoría versan sobre conocimientos geométricos (nombrar figuras, dibujar polígonos, memorizar fórmulas, calcular áreas, volúmenes, etc.). Ahora bien, no podemos deducir de estas constataciones que se trate de un problema de buena o mala voluntad de cada profesor para desarrollar, o no, en sus aulas una actividad matemática que permita construir conocimientos espaciales a sus alumnos. Consideramos que se trata de un problema de la "profesión docente": el profesorado de este nivel educativo no conoce, en general, las fecundas aportaciones que la investigación en didáctica de las matemáticas ha realizado en este ámbito, ni tampoco tiene acceso a materiales y recursos adecuados para el desarrollo de dichos conocimientos en el aula. Se hace necesario difundir estos resultados y formar al profesorado investigando activamente la fructífera ingeniería didáctica derivada de estas investigaciones.

3. Diferenciación entre la enseñanza de conocimientos espaciales y la enseñanza de la geometría

Según Berthelot y Salin (1992), por "espacial" entendemos aquello que es relativo al espacio en el que todo individuo debe saber desenvolverse de forma pertinente, aprovechando y/o anticipando las retroacciones del entorno.

Por conocimientos espaciales designamos los conocimientos que permiten a cada persona dominar la anticipación de los efectos de sus acciones sobre el espacio, su control, así como la comunicación de informaciones espaciales. Estos conocimientos se manifiestan, por ejemplo, cuando conocemos suficientemente bien un espacio urbano y podemos seleccionar los caminos a seguir para optimizar nuestros trayectos, o bien, cuando un niño pequeño pierde de vista su pelota y sabe ir a buscarla detrás de la puerta aunque no la vea; o cuando un electricista sabe cómo evaluar la distancia entre dos puntos aunque no pueda llevar a cabo la medida directa, etc.

Según figura en trabajos precursores en este ámbito, tales como los de Chevallard (1990), Mercier y Tonelle (1991) o Laborde (1988), el "espacio sensible" es el espacio donde están contenidos los objetos y nos es accesible por medio de los sentidos y el espacio geométrico es el resultado de un esfuerzo teórico llamado "geometría" que permite dar razón de lo sensible. La geometría euclidiana está construida sobre un espacio puro y perfecto: no es el estudio del espacio y de nuestras relaciones con el espacio, sino el lugar donde se ejercita una racionalidad llevada a su excelencia máxima.

Conocimientos espaciales y conocimientos geométricos tienen, por lo tanto, características diferentes. Siguiendo el trabajo de Berthelot y Salin (1992, 2001, 2005), sus diferencias se establecen en:

- La génesis: los niños disponen de conocimientos espaciales mucho antes de aprender conocimientos de geometría. La geometría debe ser enseñada para existir. En el caso de los conocimientos espaciales podemos hablar de una génesis "natural" y, en el de los conocimientos geométricos, totalmente "escolar" (o institucionalizada).
- El vocabulario: aunque existe una gran cantidad de palabras comunes, sin embargo no tienen el mismo significado. En la vida corriente o profesional (fuera de las matemáticas) nadie calificaría de rectángulo a un objeto de forma cuadrada; en geometría, por el contrario, afirmar que: Todo cuadrado es un rectángulo constituye la manifestación de un conocimiento particular, de una proposición geométrica que ha sido objeto de enseñanza.
- La organización de los conocimientos: los contenidos de los programas de geometría de los niveles iniciales se organizan de forma bien conocida: figuras, polígonos regulares, posición relativa de rectas, paralelismo, perpendicularidad, clasificación de ángulos, etc., sin embargo, la estructura de los conocimientos espaciales es mucho menos conocida. Se utilizan, normalmente,

para resolver situaciones muy concretas en diferentes campos profesionales: carpintero, delineante, electricista, topógrafo, fontanero, albañil, etc.

- La naturaleza de la validación: en los problemas espaciales, normalmente, “mostramos” la solución que hemos encontrado y validamos su idoneidad utilizando medios empíricos. Por el contrario, los problemas geométricos precisarán una solución matemáticamente probada. En geometría es necesario demostrar, no basta con mostrar.

Hacer salir al alumno del espacio sensible para introducirlo en un espacio puramente geométrico, intelectual, comporta serias dificultades.

El alumno ha de abandonar el control empírico de sus declaraciones para llevar solo un control de sus razonamientos. Debe pasar de un mundo “imperfecto” a otro “perfecto”, es un modo de paso al límite del mundo sensible al mundo intelectual. (Berthelot y Salin, 1992, p. 32).

Las “reglas del juego” cambian sin que los alumnos, en la mayoría de las ocasiones, puedan comprender la razón. Los problemas que presenta la enseñanza de la geometría están ligados a la voluntad de presentar la geometría como una teoría deductiva, en la que se deben hacer demostraciones. (Arsac, 1997, p. 5)

Ante estos hechos, cabría preguntarse:

¿La institución escolar asume la enseñanza de los conocimientos necesarios a toda persona para desenvolverse en el espacio?, o bien, ¿existe una invisibilidad institucional de esta necesidad?

¿Se enseña geometría para contribuir al desarrollo y al dominio de las relaciones del alumno con el espacio sensible?, o bien, ¿se enseña geometría para desarrollar un aprendizaje de conocimientos que son objeto de un saber cultural totalmente formalizado?

Berthelot y Salin (1992, 2001, 2005) postulan que es posible, en el contexto escolar, desde el nivel de la escuela infantil, generar situaciones en las que los alumnos se planteen problemas relativos al espacio que, en principio, tratarán de resolver basándose en sus concepciones espontáneas, pero en las que, posteriormente, los saberes geométricos aparecerán como los mejores instrumentos de control, de anticipación y de modelización de los problemas espaciales.

4. Modelización del espacio vivido

Los trabajos de investigación realizados por Berthelot y Salin (2005) muestran, en sus conclusiones, la necesidad de introducir en la enseñanza, desde los niveles de la escuela infantil, actividades de modelización del espacio desde un doble punto de vista:

- Modelización espacio-analógica: se denomina analógica porque los alumnos, en los procesos de resolución de las situaciones problemáticas propuestas en espacio “vivido”, ponen en funcionamiento estrategias basadas en la construcción de esquemas, croquis, dibujos, grafos, mapas, planos, ... Esta modelización conserva propiedades de naturaleza topológica: proximidad, orden, convexidad, interior, exterior, frontera, continuidad, etc., pero no conserva siempre relaciones geométricas tales como la proporcionalidad, el paralelismo, la perpendicularidad, etc.
- Modelización espacio-geométrica: se designa geométrica porque los alumnos, en la resolución de las situaciones problemáticas propuestas en el espacio “vivido”, construyen técnicas basadas en conocimientos de geometría: ángulos, rectas, polígonos, transformaciones (simetrías, giros, traslaciones...), paralelismo, perpendicularidad, congruencia, semejanza, ... Se trata de una modelización que permite a los alumnos establecer una relación con el espacio de tal manera que las nociones geométricas intervengan como medios de decisión, de acción, o de previsión

razonada sobre un espacio sensible. La resolución de problemas espaciales les conduce a generar prácticas de modelización del espacio por medio del empleo significativo de los objetos de la geometría.

Tanto la modelización analógica como la modelización geométrica permiten establecer conexiones justificadas entre dos mundos: el mundo sensible y un modelo del mismo, cuyo régimen simbólico está dotado de reglas internas que hace falta explicitar. En ambos casos, el problema planteado a los alumnos puede ser el mismo, pero el modelo construido para darle solución tendrá diferente nivel de formalización, según la complejidad y precisión de los conocimientos geométricos que intervienen.

Ahora bien, los alumnos no pasan de forma "natural" de una relación práctica y espontánea con el espacio a una auténtica actividad de modelización geométrica, ya que esta última constituye un verdadero trabajo de racionalidad matemática. Para ello se establece a nivel escolar una primera aproximación al trabajo modelizador del espacio: la modelización analógica. Esta se puede llevar a cabo desde la escuela infantil a través de una serie de situaciones-problema sobre el espacio sensible, para cuya resolución, los alumnos deban construir estrategias de modelización analógica como paso previo a la modelización geométrica.

5. Propuesta de situaciones para la modelización del espacio sensible en la Educación Infantil

En el diseño de estas situaciones "espaciales" se ha tenido en cuenta el carácter funcional de los conocimientos matemáticos y se han construido de manera que provoquen problemas a los alumnos, para que busquen la solución en interacción con un "medio" real, que les cause desequilibrios y les permita poner en acción y modificar cualitativamente sus conocimientos del espacio. De esta forma: "Los saberes geométricos aparecerán como instrumentos de control y de anticipación de los problemas espaciales, construidos por los propios alumnos y bajo las restricciones de la propia situación" (Gálvez, 1985, p. 41-42).

Todo el trabajo de ingeniería didáctica realizado para la construcción de las situaciones que proponemos se ha fundamentado en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1998) y, en consecuencia, en una hipótesis de aprendizaje constructivista por adaptación al medio.

El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo ha hecho la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 1998, p. 59)

Esta concepción del aprendizaje⁵ está en muchos aspectos muy próxima a la de Piaget: el alumno construye su propio conocimiento y actúa en un medio fuente de desequilibrios. Considera de singular relevancia la elaboración y el estudio del medio, de las situaciones que debemos proponer a los alumnos, que ellos puedan "vivir" y en las cuales los conocimientos matemáticos deben aparecer como la solución óptima a los problemas propuestos. Serán situaciones donde el alumno desarrolle un trabajo intelectual comparable, en algunos momentos, a la actividad científica, es decir, donde actúe, formule, pruebe y construya modelos de lenguaje, conceptos y teorías que intercambie con los demás, donde reconozca aquellos que están conformes a la cultura y donde recoja aquellos que le son útiles y

⁵ La teoría de situaciones de Brousseau (1986, 1998) trata de aproximarse, bajo un modelo teórico, al problema del aprendizaje de las matemáticas a través de un proceso de adaptación al medio. Por ello, proporciona herramientas muy potentes para interpretar los fenómenos específicos que se producen en la construcción de los conocimientos matemáticos.

pertinentes. Son situaciones de creación y no de redescubrimiento, en consecuencia, fuera de todo aplicacionismo⁶.

El gráfico siguiente (Figura 2) muestra las relaciones e interacciones que existen entre las hipótesis de aprendizaje adoptadas por el profesor y la gestión de las variables didácticas y el control de las situaciones de enseñanza-aprendizaje.

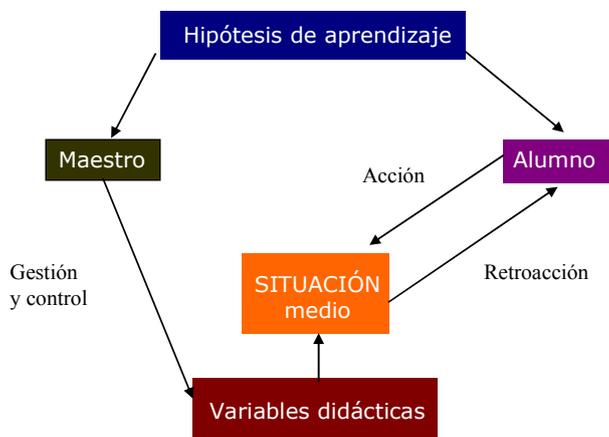


Figura 2. Hipótesis de aprendizaje y variables didácticas (Ruiz-Higuera, 2011, p. 31)

Se trata de enfrentar a los alumnos a una situación-problema cuya solución constituye el conocimiento que han de aprender. La situación proporciona la significación adecuada del conocimiento al alumno, en la medida en que este conocimiento es un instrumento de control de los resultados de su actividad. El alumno construye, así, un conocimiento contextualizado, a diferencia de la secuenciación escolar habitual, donde la búsqueda de aplicaciones de los conocimientos sucede a su presentación descontextualizada.

Brousseau (1998) plantea que es preciso diseñar situaciones didácticas que hagan funcionar el saber, a partir de los contenidos de los programas escolares. Este planteamiento se apoya en la tesis de que el sujeto que aprende necesita construir por sí mismo sus conocimientos mediante un proceso adaptativo (Piaget, 1975). Se trata, entonces, de producir una génesis artificial de los conocimientos, para que los alumnos aprendan haciendo funcionar significativamente el saber. Los alumnos utilizan el saber como un medio para seleccionar, anticipar, ejecutar y controlar las estrategias que aplica a la resolución del problema planteado por la situación didáctica.

Ante estas premisas, nos preguntamos:

- ¿Qué problemas espaciales permitirán ir introduciendo a los alumnos de la escuela infantil en la modelización espacial-analógica?
- ¿Qué problemas espaciales permitirán ir introduciendo a los alumnos de la escuela infantil en la modelización espacial-geométrica?

De manera general, para este nivel educativo, podemos proponer problemas en relación con el espacio sensible, en los que el sujeto debe:

- Reconocer, describir, fabricar o transformar objetos;
- Desplazar, encontrar, comunicar la posición de los objetos;
- Reconocer, describir, construir, transformar un espacio de vida o de desplazamientos.

⁶ Se suele denominar de este modo al modelo de aprendizaje en el cual el profesor indica con precisión al alumno cómo debe resolver una tarea y éste último *aplica* sin más la indicación dada por el profesor.

Estos problemas varían sustancialmente dependiendo del tamaño del espacio: *microespacio*, *mesoespacio* o *macroespacio*⁷. Brousseau (1983) y Gálvez (1985) denominan *microespacio* al espacio de las interacciones ligadas a la manipulación de los objetos pequeños; *mesoespacio* al espacio de los desplazamientos del sujeto, es el espacio que contiene un inmueble, que puede ser recorrido por un sujeto, tanto en el interior como en el exterior; *macroespacio* al espacio para el que no puede el sujeto, con los medios normales, obtener una visión global simultánea (en él se consideran tres categorías: urbano, rural y marítimo).

5.1. Situaciones para reconocer, describir, fabricar o transformar objetos

La fabricación de objetos es una actividad normal en la escuela infantil, pero las condiciones y restricciones bajo las que se realice esta fabricación, hará que los niños puedan desarrollar a través de ella competencias espaciales y geométricas o que sólo realicen actividades simplemente manipulativas. La tarea de fabricar un objeto implica también realizar tareas de descripción y de reconocimiento.

Los niños, para resolver los problemas propuestos en las situaciones (1, 2 y 3) que siguen, deben construir estrategias de conservación de la cantidad, de iniciación a la medida, de comparación de cantidades de longitud, de conservación del paralelismo, la perpendicularidad, la forma, etc. Todas estas estrategias implican poner en funcionamiento conocimientos espaciales y geométricos en una dimensión microespacial.

Situación 1: Fabricamos una bolsa para empaquetar un regalo (Nivel: 4 - 5 años)

Los niños/as con ocasión del día de la madre o del padre, o bien para la Navidad, fabrican en clase un objeto que llevan a casa y lo ofrecen como regalo. El problema que se plantea está relacionado con la necesidad de fabricar, además, una bolsa de papel para meterlo dentro.

1ª Fase: Fabricar una bolsa para empaquetar una piña de Navidad

Se trata de una fase de iniciación, cuyo objetivo es que los niños comprendan bien el problema propuesto. En esta fase el maestro/ debe realizar la devolución⁸ de la situación problema a los alumnos/as.



Figura 3. Alumnos trabajando en la 1ª fase

Material: Una hoja de formato A-3 para cada niño/a. Tijeras y pegamento.

Desarrollo: Tras mostrar a los niños varias bolsas de papel que se usan en el comercio y que son conocidas por todos, pedimos a cada alumno/a que fabrique una para empaquetar su regalo (piña de navidad).

⁷ En el Anexo de este trabajo figura una descripción de las características de cada uno de estos tipos de espacio.

⁸ El sentido dado a la noción de devolución es la que figura en la teoría de Situaciones de G. Brousseau (1998).

Consigna: Con la hoja que os he dado debéis construir una bolsa para empaquetar cada piña. La piña debe caber bien en la bolsa. Se debe poder meter bien y también se debe poder sacar. Como ocurre con las bolsas que nos dan en los comercios.

2ª Fase: Fabricar una bolsa para empaquetar un dragón.

Se trata de una situación a-didáctica de acción. Los niños deben construir estrategias de iniciación a la medida de cantidades de longitud.

Consigna: Disponemos de papel de regalo decorado. La maestra da a cada uno una hoja de papel decorado con formato A-2. Vamos a hacer bolsas muy bonitas para empaquetar los dragones que hemos construido. Hoy colocaremos todos los dragones sobre mi mesa. De aquí no se podrán mover.

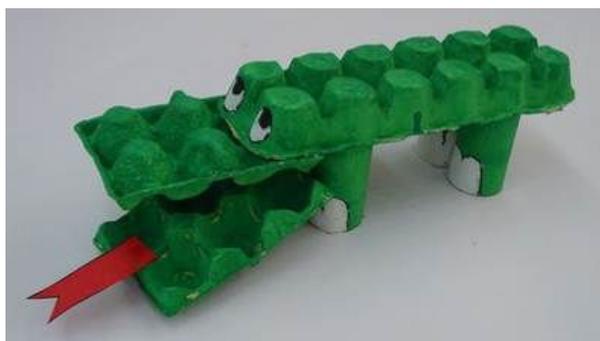


Figura 4. Material fase 2.

Cada uno debe fabricar su bolsa trabajando en su mesa, podéis venir a mi mesa a ver vuestros dragones siempre que queráis, pero no los podéis llevar a vuestra mesa. Cuando tengáis la bolsa terminada, cada uno podrá coger su dragón y comprobar si la bolsa que ha construido es buena: si cabe perfectamente el dragón y se puede transportar. Disponéis de cuerdas y de palitos, por si los queréis utilizar.

Estrategias que emplean los niños en la construcción de la bolsa:

- Los niños doblan el papel sin ningún control.
- Pegan los extremos del papel y no dejan hueco para meter la piña (o, en su caso, el dragón).
- Enrollan el papel alrededor de la piña (o del dragón) y arrugan el papel sobrante de los extremos.
- Pliegan la hoja por la mitad y pegan todos los contornos. El objeto no puede entrar.
- Pliegan la hoja por la mitad y pegan un sólo lado del contorno.
- Pliegan la hoja por la mitad y pegan dos lados del contorno.
- Comienzan a medir las dimensiones del objeto con palmas, con cuerdas, con lápices, con palitos, ... y esta información la llevan sobre el papel de regalo para controlar la forma y las dimensiones que darán a la bolsa

Situación 2: Construimos puentes para que pasen los coches. (Nivel: 4 - 5 años)

Esta situación pone en funcionamiento, según la TSD (Brousseau), una situación a-didáctica de acción (2ª fase), una situación a-didáctica de formulación (3ª fase) y, en ambas fases, se produce una validación autónoma por parte de los niños/as. La construcción de puentes permitirá que los niños movilicen estrategias de iniciación a la medida de cantidades de longitud y a expresar por escrito estas medidas.

Material:

- Coches de diferentes tamaños. Cada niño dispone de un sólo coche (que podrá ir cambiando la maestra según el desarrollo de la actividad).
- Piezas de construcción.



Figura 5. Materiales situación "Construimos puentes"

Consigna: Cada niño/a debe construir un puente por el que pase su coche utilizando piezas de construcción de esta caja.

1ª Fase: Las piezas de construcción y los coches pueden estar simultáneamente sobre la mesa en la que trabajan los niños/as.

2ª Fase: Las piezas de construcción con las que se debe construir el túnel están en un extremo de la clase. El coche está en la mesa de la profesora y no puede moverse. Los niños pueden ir a esta mesa cuantas veces quieran para tomar informaciones sobre su coche. Sólo podrán mover el coche cuando tengan el túnel completamente terminado, para validar su trabajo: constatar si efectivamente, bajo el puente construido pasa su coche.

3ª fase: Situación de comunicación escrita. Pedro debe escribir un mensaje a María en el que le indique cómo debe construir un puente para que pase su coche.

Estrategias de los niños:

- Para dar solución al problema presentado en la 1ª fase, los niños movilizan estrategias de acción utilizando unidades arbitrarias de medida de cantidades de longitud: pajitas, palillos, cuerdas,... Con ellas proceden a medir las dimensiones de su coche y, posteriormente, con dichas medidas producen una cantidad de longitud equivalente, construyendo, de este modo, el puente.



Figura 6. Niños midiendo la altura con pajitas

- Las estrategias que movilizan para dar solución al problema propuesto en 2ª fase muestran cómo los niños intentan hacer, inicialmente, un "copiado" de su puente y, con ello, construir un

mensaje, para que otro compañero (que no ha visto su coche) pueda construir con toda precisión un puente por el que pase.



Figura 7. Niños formulando mensajes de sus puentes

Las estrategias que movilizan para dar solución al problema propuesto en 2^a fase muestran cómo los niños intentan hacer, inicialmente, un "copiado" de su puente y, con ello, construir un mensaje, para que otro compañero (que no ha visto su coche) pueda construir con toda precisión un puente por el que pase.

En estas producciones podemos observar cómo los alumnos conservan los ángulos, el paralelismo, la perpendicularidad, las cantidades de longitud equivalentes, etc. También conservan el tamaño. Son transformaciones isométricas.

Ejemplos de estrategias puestas en juego por algunas alumnas:

- La producción de Flori muestra una estrategia de formulación de la medida de las tres cantidades de longitud que determinan el puente, utilizando como unidad de medida una pieza del juego de construcción. El puente representado por Flori en su mensaje conserva las mismas dimensiones que el real.
- La producción de Mercedes nos muestra cómo ha formulado un mensaje en el que indica con toda precisión la medida de las tres longitudes que determinan el puente. No reproduce en su mensaje, como en el caso de Flori, las mismas cantidades de longitud del puente real. Sólo dibuja la forma del puente a una escala mucho menor que la real. A Mercedes le basta expresar con precisión la medida de cada lado y la forma. Su producción nos muestra la conservación de las propiedades de una verdadera transformación equiforme.

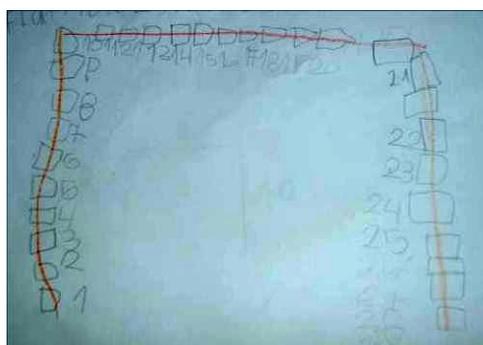


Figura 8. Producción de Flori

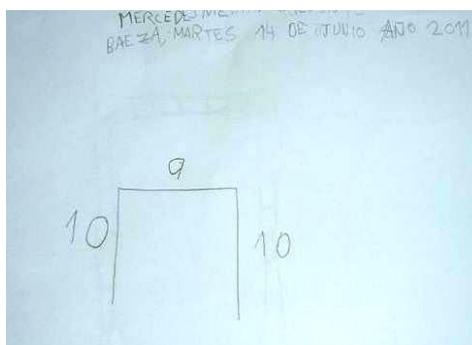


Figura 9. Producción de Mercedes

Para diseñar en la escuela infantil toda una familia de situaciones a-didácticas, como las anteriormente presentadas, de tal manera que permitan a los niños construir conocimientos espaciales y geométricos en los que sea necesario movilizar la medida de cantidades de longitud, la conservación de la amplitud

angular, el paralelismo, la perpendicularidad, etc., podemos basarnos en la estructura de la siguiente situación fundamental⁹.

Situación fundamental – Medida de una cantidad de longitud

Acción: Dada una cantidad de longitud L_1 , una persona A debe construir con la mayor precisión posible una cantidad de longitud L_2 equivalente a L_1 (en un lugar de la clase desde donde no se puede ver L_1).

Comunicación/formulación: Dada una cantidad de longitud L_1 , una persona A debe comunicar (oral y /o por escrito) a otra persona B informaciones suficientes para que B pueda construir una cantidad de longitud L_2 equivalente a L_1 .

Mientras B construye L_2 no puede ver L_1

L_1 y L_2 se podrán ver simultáneamente en el momento de la validación.

5.2. Situaciones que supongan desplazar, encontrar, comunicar la posición de objetos

Proponemos en esta sección toda una familia de situaciones a-didácticas, en cuya resolución, los niños deben construir conocimientos espaciales que permitan localizar objetos, determinar con precisión la posición de un objeto y/o comunicar esta posición mediante un mensaje (oral o escrito). Todas estas situaciones pertenecen a la situación fundamental que sigue:

Situación fundamental – Localización de objetos (*microespacio*)

Dada una colección de cajitas (todas iguales), una persona A esconde un objeto (*tesoro*) en una de las cajitas presentes y debe informar oralmente (o por escrito, mediante una representación) a otra persona B (que no ha visto el lugar en el que A ha escondido el *tesoro*) para que pueda localizarlo correctamente a través de las informaciones (orales o bien escritas) que le ha dado A.

Situación 4: Localizamos un tesoro escondido

Se trata de una familia de situaciones cuyo objetivo es provocar en los niños la construcción de conocimientos espaciales que permitan determinar con precisión la posición de los objetos en el *microespacio*, como son: la determinación de referentes para la correcta orientación espacial, la conservación del orden, la conservación de la cantidad de objetos, la representación gráfica de un *microespacio* (tridimensional) en una hojita (bidimensional) que conserve todas las propiedades de la realidad, etc.

Localización de objetos en el microespacio

Material: Disponemos de muchas cajas pequeñas idénticas ubicadas sobre una maqueta (jardín, isla del tesoro, granja, lago,...)

⁹ En la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (1998), cada conocimiento matemático se caracteriza por una familia de situaciones a-didácticas específicas de dicho conocimiento, que constituye lo que se denomina una Situación Fundamental.



Figura 10. Maquetas para localización de objetos en el *microespacio*

Descripción de la situación:

Dividimos la clase en dos grupos: emisores y receptores. Los emisores esconden un “tesoro” en una caja (sin que puedan verlo los receptores). Los emisores deben comunicar a los receptores oralmente o por escrito – en un mensaje – el lugar donde está el tesoro escondido. Los receptores deben encontrarlo, a partir de la interpretación del “mensaje” (oral o escrito) que le faciliten los emisores. Gana el juego el equipo de:

- emisores que haya realizado una comunicación correcta del lugar en el que está el tesoro escondido,
- receptores que haya sabido interpretar correctamente el mensaje de los emisores y haya localizado el tesoro.

Producciones de los niños:

La Figura 11 muestra sendas producciones de David y María. David, en su representación del *microespacio* JARDIN, no conserva la cantidad de cajitas, ni la posición de las mismas y no informa adecuadamente de la posición del tesoro. María, para dar solución correcta al problema presentado, no necesita reproducir el *microespacio* LAGO en la posición real, le basta representar el orden de las cajitas y la referencia de la muñeca, para indicar con precisión la posición de los elementos del tesoro.



Figura 11. Maquetas de David y María para localización de objetos en el *microespacio*

Situación 5: La pesca del pez

Descripción de la situación: Una caja de cartón (60 cm x 50 cm x 5 cm) en la que se coloca un trozo de papel (3 cm x 5 cm) (un pececito) a la vista de los alumnos.

1ª Fase: Se tapa la caja con una tela y se pide que intenten localizar el pez clavando un alfiler sobre la tela para atraparlo. Se levanta la tela para ver el resultado. Si el alumno “gana”, se dobla el pez por la mitad y se procede de nuevo a jugar. Y, así, sucesivamente. Gana el niño que es capaz de acertar con

el pez más pequeño posible. Más tarde, tras tapan la caja, ésta se mueve, se cambia de orientación, para hacer que los niños, busquen referencias para la orientación espacial.

2^a Fase: Un niño esconde el pez en la caja bajo la tela y ha de hacer un “plano” para que otro niño (que no ha visto la ubicación del pez) pueda localizarlo sin error, pinchando sobre la tela.



Figura 12. Niños jugando a la situación “La pesca del pez”

El objetivo más significativo de esta situación es suscitar en los niños la necesidad de determinar referentes para poder tener éxito en la tarea. De esta manera, cuando la maestra cambia la orientación de la caja, los niños sufren un fuerte desequilibrio y tratan de buscar e indicar referencias que les permitan localizar con precisión el pez.

5.3. Situaciones que supongan reconocer, describir, construir, transformar un espacio de vida o de desplazamientos

Las situaciones que proponemos a continuación se desarrollan en el *mesoespacio*, normalmente en el aula, el gimnasio o el patio del colegio. El objetivo fundamental es construir modelos analógicos del espacio vivido y de los desplazamientos realizados sobre el mismo. Para construir estos modelos, los niños deben poner en funcionamiento conocimientos tales como: conservación de la cantidad, conservación del orden, lateralidad, determinación de sistemas de referencia, paralelismo, perpendicularidad, codificación y descodificación de sus desplazamientos, etc.

Situación 6: Desplazamientos sobre una malla en el patio (3, 4 y 5 años)

Para el desarrollo de esta actividad se necesita que un sector del patio (o de la clase) esté cuadrículado. Dependiendo del curso, se recomienda realizar con los alumnos este cuadrículado, por ser una excelente actividad para aplicar conceptos de paralelismo y perpendicularidad, entre otros. El tamaño de cada uno de los cuadros de la malla debe ser aproximado al largo del paso que puedan dar los niños. Primero se determinan puntos de partida, luego por turno los niños se desplazan por la malla, obedeciendo las órdenes dadas por el profesor; por ejemplo: dos pasos hacia adelante, uno hacia la izquierda, tres hacia atrás, etc. En una segunda fase, con objeto de construir un modelo gráfico de los desplazamientos, se propone que un niño recorra un camino por la malla y otro registre estos desplazamientos. Entre todos inventan códigos que permitan comunicar, por escrito, los desplazamientos que se realizan en el cuadrículado. De esta forma, dado un código, el niño podrá desplazarse por el cuadrículado marcado, o viceversa.

1^a fase: Hacemos recorridos sobre una malla cuadrículada.

Se construye una malla cuadrículada (3 x 3) adhiriendo cinta adhesiva negra al suelo de la clase. Sus dimensiones deben ser apropiadas para que los niños puedan, con un solo paso, desplazarse de un cuadrado a otro.

Consigna para recorrer la malla: Sólo son válidos los desplazamientos que nos permiten pasar, de un cuadrado a otro, atravesando los lados, no podemos pasar por las esquinas. Coloca, por ejemplo, en la

Intervención de la profesora: Debemos exigir a Jesús que nos dé más informaciones para que podamos interpretar con toda seguridad su dibujo "a la primera". Tras numerosos debates con la profesora y entre los propios niños. Jesús enriquece su dibujo (Figura 15).

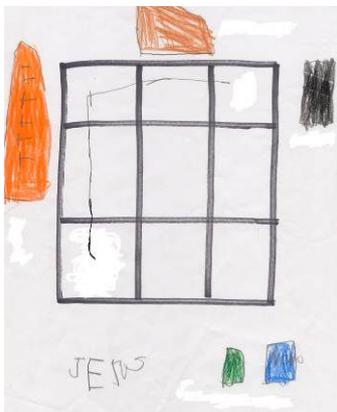


Figura 15. Producción de Jesús "enriquecida"

Como podemos ver, Jesús (3 años) ha necesitado incluir en la representación de su recorrido, además de la malla, la imagen de varios objetos de la clase: "arriba" la mesa de la profesora, "abajo" los archivadores, a un lado las perchas y al otro, la puerta.

Los niños que interpreten su "mensaje" ya saben que deben iniciar el recorrido colocándose "delante" de los archivadores y caminar dos pasos por los cuadraditos que están justo al lado de las perchas, luego deben dar dos pasos hacia la puerta de la clase.

Nuevas producciones de los niños:

Otros niños (3 años) realizaron diversos recorridos y los representaron "enriquecidos" con sistemas de referencia (Figura 16).



Figura 16. Desplazamientos en la malla: producciones "enriquecidas" de otros niños

La situación "Recorridos sobre una malla" provoca adaptaciones en los niños y permite la construcción de nuevos conocimientos mediante la modificación de la estrategia inicial. Estas adaptaciones del niño no son fruto de conocimientos adquiridos formalmente, sino acomodaciones que lleva a cabo el propio niño, verdaderas reorganizaciones internas de orden estructural, y asimilaciones.

La situación fundamental, a partir de la que generar múltiples situaciones de desplazamientos sobre una maya, puede ser descrita en los siguientes términos:

Situación fundamental-Recorridos en una malla

Una persona A realiza un recorrido sobre una malla (*mesoespacio*) y debe representarlo en una hoja (o en la pizarra) para que otra persona B (que no ha visto el recorrido hecho por A) pueda realizarlo con toda precisión a través de las informaciones que le ha dado A por medio de su representación.

A medida que los niños van creciendo, la modelización analógica del recorrido sobre la malla de lugar a otros tipos de códigos más económicos y sintéticos (Figura 17).



Figura 17. Codificaciones más económicas y sintéticas de desplazamientos sobre una malla

Situación 7: Orientarse y hacer recorridos en la clase

1ª fase: Los niños han de realizar, fuera de la clase, de manera colectiva y con ayuda del profesor, una maqueta de la clase. Tomarán una gran hoja de papel que representará el suelo y cubos que representarán el mobiliario. Podrán obtener un primer plano de la clase señalando el borde de los cubos con un lápiz. Cuando vuelvan a la clase deben comparar el dibujo que acaban de realizar con la clase "real" y corregir los errores.

En esta actividad hay un espacio representado y un espacio que lo representa o que lo modeliza de manera analógica: la hoja con los cubos, en primer lugar, y, después, la hoja con los trazos realizados sobre el papel a partir de los cubos. El objetivo de aprendizaje es "orientarse sobre un plano" y esto supone saber interpretar y saber utilizar el modelo analógico y determinar con precisión sistemas de referencia para orientarse correctamente.



Figura 18. Niños de educación infantil (5 años) construyendo la maqueta de su clase

2ª fase: ¿Dónde está la bolita?

El objetivo de esta fase es que los niños aprendan a utilizar una maqueta para codificar y decodificar el espacio representado. Para ello, deben establecer correspondencias entre los elementos del espacio circundante y los de la maqueta.

Se divide la clase en grupos de cuatro o cinco niños cada uno. Cada grupo se encarga, por turnos y sin que lo vea el resto de sus compañeros, de esconder una bolita en una de las mesas de la clase y señalar con una pegatina la mesa correspondiente en la maqueta. Otro grupo de alumnos, por turnos, solo con la información que le suministra la maqueta, debe identificar el lugar en el que está la bolita escondida.

En principio, la maqueta y la clase tendrán la misma orientación, posteriormente, al cabo de varias jugadas, se girará la maqueta 90° o 180° y continuará el juego.



Figura 19. Localización de la bolita en una clase de infantil (4 años)

3º fase: Comporta actividad colectiva e individual. En la actividad colectiva, el profesor representa un desplazamiento sobre el plano de la clase con la ayuda de flechas, un niño (por turnos) debe realizar este desplazamiento en la clase "real" y otro debe describirlo verbalmente, bajo el control de sus compañeros. Posteriormente, un alumno se desplaza libremente por la clase y otro debe representar este desplazamiento sobre el plano.

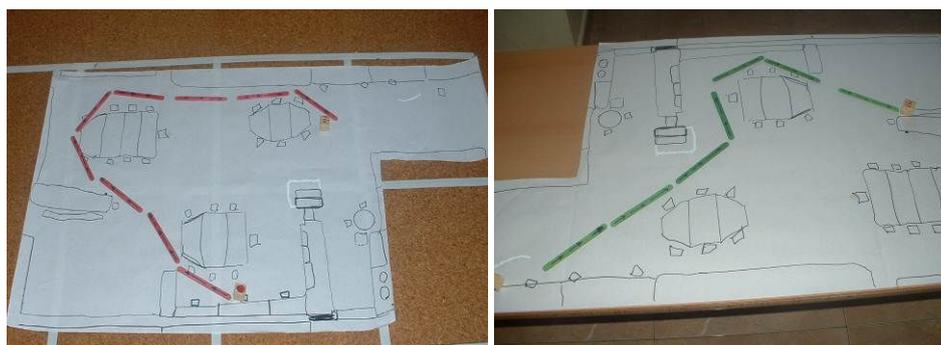


Figura 20. Representación de recorridos sobre el plano de una clase (niños 5 años)

Situación 8: Orientarse y hacer recorridos en el gimnasio del colegio

Se trata de una situación análoga a la anterior, la diferencia radica en que desarrollaremos las diferentes fases en el gimnasio del colegio (Figura 21).



Figura 21. Gimnasio del colegio y maqueta

En primer lugar, los niños pueden "jugar" a establecer correspondencias entre los objetos en la maqueta y en la realidad. Posteriormente giramos la maqueta, lo que implica que los alumnos tienen que conservar la correspondencia, identificando elementos que actúen como referencia.



Figura 22. Correspondencias entre la maqueta y el gimnasio (maqueta orientada y no orientada)

Posteriormente, y de forma análoga a la situación anterior, los niños hacen recorridos por el gimnasio y otros niños tienen que codificar, y posteriormente decodificar, dichos recorridos (Figura 23).



Figura 23. Recorridos en el gimnasio, y codificación realizada por una niña

Los niños construyen la representación analógica del recorrido que han realizado en el gimnasio, para que otros niños, que no han estado presentes mientras se ejecutaba este recorrido, puedan, por medio de la interpretación de sus grafos, realizarlo correctamente (Figura 24).

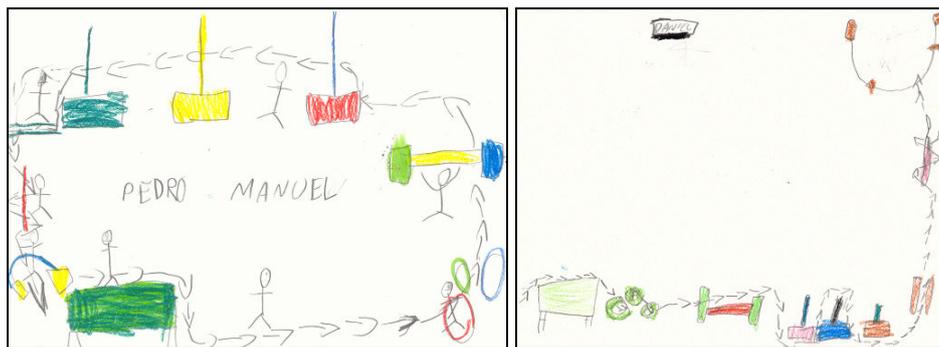


Figura 24. Representaciones analógicas de recorridos en el gimnasio

Para construir con precisión la representación analógica del recorrido, los niños deben: conservar la cantidad de objetos que intervienen en el mismo (medir cantidades y producir cantidades), ordenar una colección, codificar y descodificar los desplazamientos realizados en un *mesoespacio* tridimensional (R^3 – Gimnasio) en un *microespacio* bidimensional (R^2 - hoja de papel), conservar la orientación y la lateralidad, etc.

Situación 9: Construcción del plano del recorrido de una excursión (*macroespacio*)

El objetivo de esta tarea es que los niños elaboren códigos para la representación gráfica de trayectos realizados en su ambiente urbano, que unifiquen estos códigos a través de la discusión colectiva y verifiquen su eficacia mediante actividades de codificación y descodificación. Se trata de establecer correspondencias entre el *macroespacio* urbano y el *microespacio* constituido por su representación en un plano.

1ª fase: En el curso de un paseo se propone a los alumnos hacer un plano que represente el itinerario seguido. Bien colectivamente, bien individualmente, el profesor ayuda en sus decisiones a los alumnos hasta que producen el plano y reconocen los lugares de referencia. Los criterios sobre cómo han de ser los planos deben surgir de la discusión colectiva, así como las posibles rectificaciones.

2ª fase: Dividir la clase en grupos. Un grupo, junto a un adulto, da un paseo por los alrededores del colegio y representa su itinerario en un papel. Otro grupo, solo con el plano que le aporta el grupo anterior, debe hacer idéntico recorrido. Si no logra este objetivo, se debate la necesidad de rectificar las codificaciones del plano y las dificultades encontradas en su interpretación.



Figura 25. Niños de educación infantil (5 años) representando el recorrido de una excursión

Las situaciones 7, 8 y 9 presentadas pertenecen a la Situación Fundamental que sigue:

Situación fundamental – Recorridos en el espacio

Recorridos en el espacio: Una persona A realiza un recorrido en un espacio (*mesoespacio* o *macroespacio*) y debe representarlo en una hoja (o en la pizarra) para que otra persona B (que no ha visto el recorrido hecho por A) pueda realizarlo con toda precisión a través de las informaciones que le ha dado A por medio de su representación.

6. A modo de conclusión

En este trabajo hemos intentado dar respuesta a las cuestiones formuladas en la introducción. Así, hemos mostrado, en primer lugar, cómo el sistema de enseñanza no asume, en general, el desarrollo de las competencias necesarias para generar los conocimientos espaciales que todo ciudadano precisa para la vida diaria. Si bien, a lo largo de los años ha existido un avance notorio en cuanto a la inclusión de conocimientos espaciales en los programas oficiales, sin embargo, en los manuales y fichas escolares, así como en las manifestaciones expresadas por el profesorado, podemos afirmar que éstos se reducen, en su gran mayoría, a conocimientos geométricos.

En segundo lugar, hemos esbozado las diferencias existentes entre los conocimientos espaciales y los conocimientos geométricos, atendiendo a la génesis, el vocabulario, la organización de los conocimientos y la naturaleza de la validación, mostrando que los alumnos deben pasar de un mundo "imperfecto" a otro "perfecto", es un modo de paso al límite, pasar del mundo sensible al mundo intelectual.

En tercer lugar, hemos descrito la actividad modelización del espacio de forma analógica y geométrica, mostrando que, tanto una como otra, permiten establecer conexiones justificadas entre dos mundos: el mundo sensible y un modelo del mismo, cuyo régimen simbólico está dotado de reglas internas con muy distintos niveles de formalización.

Por último, hemos presentado un conjunto de situaciones, diseñadas bajo una hipótesis de aprendizaje constructivista por adaptación al medio y desarrolladas bajo el control de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau, cuyo objetivo es que los alumnos de educación infantil, en interacción con un "medio" real, que les causa desequilibrios, pongan en acción y anticipen soluciones movilizando conocimientos espaciales. En la resolución de estas situaciones, los alumnos de la escuela infantil realizan una actividad matemática de modelización espacio-analógica e incluso llegan a aproximarse a la modelización geométrica, ya que los saberes geométricos van apareciendo como instrumentos de control y de anticipación de los problemas espaciales.

Por otra parte, este trabajo ha mostrado la necesidad de dar a conocer investigaciones, tales como las presentadas, ya que facilitan a los profesores/as ingenierías didácticas construidas bajo la vigilancia epistemológica de la didáctica de las matemáticas.

Cabe destacar, por último, la necesidad de que las instituciones responsables del currículo de matemáticas, para cualquier nivel educativo, tengan en cuenta los serios y fecundos resultados que está generando la investigación en didáctica de las matemáticas, ya que una gran parte de las causas de los errores y déficit de los alumnos no sólo deben recaer sobre sus dificultades cognitivas, sino que su origen hay que buscarlo también en la propia institución escolar, en cómo ésta organiza el estudio¹⁰ del saber matemático.

¹⁰ "... la didáctica es la ciencia del estudio de las matemáticas. Su objetivo es llegar a describir, caracterizar y explicar (pero también diseñar, ayudar a gestionar, evaluar) los procesos de estudio de las comunidades que se ven llevadas a estudiar matemáticas en el seno de ciertas instituciones (Gascón, 1998, p. 27).

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado al amparo del proyecto "La modelización matemática en la formación del profesorado de Infantil y Primaria en matemáticas y en ciencias naturales" (EDU2012-39312-C03-02).

Referencias

- Alsina, A. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en Educación Infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Arsac, G. (1997). Cours sur l'axiomatique de la geometrie. En R. Noirfalise (Ed.), *Actes de l'Université d'Été: Formation de formateurs en Didactique des Mathématiques* (pp. 5-50). IREM de Clermont-Ferrand, Université de Montpellier, France.
- Artigue, M. (1996). Ingeniería didáctica. En Artigue, Douady, Moreno, Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-71). México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1992). L'enseignement de l'espace et de la geometrie dans l'escolarité obligatoire. Thèse de doctorat. Université de Bordeaux.
- Berthelot, R. y Salin, M. H. (1993). Conditions de l'apprentissage des plans et cartes dans l'enseignement élémentaire. En Bessot et Varillon (Eds.), *Espaces graphiques et graphiques d'espaces* (pp. 87-115). La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Berthelot, R., et Salin, M. H. (1994). « L'enseignement de la géométrie à l'école primaire (I), Grand N, 53, p.39-56.
- Berthelot, R., et Salin, M. H. (2000). L'enseignement de l'espace à l'école primaire, Grand N, n°65, pp. 37 à 59.
- Berthelot, R., et Salin, M. H., (2001). L'enseignement de la géométrie au début du collège, Petit X, n°56, pp. 5 à 34.
- Berthelot R., et Salin, M. H. (2005). Vers une problématique de modélisation dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. En M. H. Salin, et col. (Eds.), *Sur la théorie des situations didactiques* (pp. 125 - 143). Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Boletín Oficial del Estado, n° 18 (1981, p. 1384 - 1389)
- Brousseau, G. (1983). Etude de questions d'enseignement, un exemple: la geometrie. *Seminaire de didactique des mathematiques et de l'informatique*. IMAG, LSD. Grenoble.
- Brousseau, G. (1994). Problemes et resultats de Didactique des Mathématiques. ICME Study, 1994.
- Brousseau, G. (1998). *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
- Brousseau, G. (1998). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. New York: Kluwer Academic Publishers.
- Brousseau, G. (2007). Entre la théorie anthropologique du didactique et la théorie des situations didactiques en mathématiques: Questions et perspectives. En L. Ruiz-Higuera, F. J. García, y A. Estepa (Coords.), *Sociedad, Escuela y Matemáticas: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 23-52). Jaén: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Jaén.
- Chevallard, Y. (1990). Autour de l'enseignement de la geometrie au college. Premier partie. Petit x, 27, 41-76.
- Chevallard, Y. (1991). La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné. La Pensée Sauvage. Grenoble.
- Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía (1992). Diseño Curricular Base. Área de Matemáticas. *BOJA*, n° 56.
- Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía (1993). ORDEN de 16 de marzo de 1993, por la que se establecen criterios y orientaciones para la elaboración de proyectos curriculares de Centro y la secuenciación de contenidos en la Educación Infantil. Recuperable en: <http://www.juntadeandalucia.es/boja/1993/47/32>
- Gálvez, G. (1985). *Aprendizaje de la orientación espacial en el espacio urbano. Una propuesta para la enseñanza de la geometría en la enseñanza primaria*. Tesis doctoral. México: CINVESTAD.
- Gálvez, G. (1994). La didáctica de las matemáticas. En C. Parra, e I. Saiz (Comps.), *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 39-50). Buenos Aires: Paidós Educador.
- García, F. J., y Ruiz Higuera, L. (2004). El conocimiento del espacio y de la geometría en la educación infantil. Una reflexión epistemológica y didáctica. *IV Congreso Internacional Virtual de Educación*. Universidad de las Islas Baleares, 9-29 de febrero de 2004.

- Gobert, S. (2001). *Questions de didactique liées aux rapports entre la géométrie et l'espace sensible, dans le cadre de l'enseignement à l'école élémentaire*, Thèse, Université Denis-Diderot, IREM Paris 7.
- Guzmán, M. de (2001). Enseñanza de las Ciencias y de la Matemática, OEI (Organización de Estados Iberoamericanos). Recuperable en <http://www.oei.org.co/oeivirt/edumat.htm>
- Laborde, C. (1988). L'enseignement de la géométrie en tant que terrain d'exploitation de phénomènes didactiques, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 337-364.
- Mercier, A., y Tonelle, J. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège. Deuxième partie. *Petit x*, 29, 15-56.
- Ministerio de Educación y Cultura (1967). Boletín Oficial del Ministerio de Educación y Cultura nº 80.
- Piaget, J., Inhelder, B. (1948). *La représentation de l'espace chez l'enfant*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement*. Paris: PUF [Trad. cast.: El equilibrio de las estructuras cognitivas, Madrid, Siglo XXI, 1978].
- Ruiz-Higuera, L. (2011). Aprendizaje y Matemáticas. La construcción del conocimiento matemático en la Escuela Infantil. En M. C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 1-39). Madrid: Pearson Educación.
- Salin, M. H. (2004). La enseñanza del espacio y la geometría en la enseñanza elemental. En M. C. Chamorro (Ed.), *Números, formas y volúmenes en el entorno del niño* (pp. 37-82). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- VV. AA. (2008). *Chiribitas*. Madrid: Santillana.
- VV. AA. (2012). *Los caminos del saber*. Madrid: Santillana.
- VV. AA. (2012). *El mundo de Flopi*. Madrid: Everest.

Luisa Ruiz Higuera. Doctora en Matemáticas. Catedrática E.U. de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Jaén (Facultad de Educación). Su dominio de investigación se centra en el ámbito de la formación de profesorado y en el diseño de situaciones para el aula (ingeniería didáctica), teniendo como marcos de referencia la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992). Ponente invitada en universidades nacionales y extranjeras, así como en congresos internacionales. Tiene publicados numerosos artículos y libros.

Email: lruiz@ujaen.es

Francisco Javier García García. Doctor por la Universidad de Jaén. Profesor Contratado Doctor en el área de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Jaén. Su investigación se centra en el aprendizaje por investigación (inquiry-based learning) y la modelización matemática, con especial interés en la formación del profesorado en estos ámbitos y en cualquier etapa educativa, teniendo como marco teórico de referencia la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). Participa en numerosos proyectos europeos, Comenius (LEMA y COMPASS) y del 7º Programa Marco (PRIMAS y MaScil), con una clara orientación al diseño y la implementación de programas de formación del profesorado a nivel transnacional.

Email: fjgarcia@ujaen.es

Elena M^a Lendínez Muñoz. Maestra de Educación Infantil. Premio Extraordinario de Grado. Licenciada en Biología. Master Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. En la actualidad está realizando un trabajo tutelado de iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática (Programa de Doctorado), es becaria del MECD y participa en un proyecto de investigación I+D+i.

Email: emlm0002@red.ujaen.es