

## ANÁLISIS Y MEJORA DE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA SOBRE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

María Florencia Agüero; Eliana Lucía Pennisi; Sandra Baccelli; Emilce Moler  
Universidad Nacional de Mar del Plata. Facultad de Ingeniería.  
[sbaccelli@gmail.com](mailto:sbaccelli@gmail.com)

### Resumen

Este trabajo presenta una aplicación de conceptos del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS), en el diseño de una secuencia didáctica sobre ecuaciones vinculadas a funciones trigonométricas. Se expresan los significados asociados a ecuaciones trabajados en la secuencia y se ejemplifica el análisis de idoneidad epistémica en dos de sus actividades. Para cada una de dichas actividades se muestra la versión inicial y la versión posterior, que contiene las mejoras realizadas como consecuencia del análisis. El diseño de la mencionada secuencia se desarrolló en el marco de un taller de didáctica de la matemática. Dicho taller formaba parte del Proyecto de Articulación entre la Universidad Nacional de Mar del Plata y escuelas secundarias dependientes de la Jefatura Educativa de Gestión Estatal Región 19.

**Palabras clave:** Secuencia didáctica, Ecuaciones trigonométricas, Idoneidad epistémica, Significados.

### Abstract

This paper presents an application of concepts of the Ontosemiotic Approach (OSA), in designing a teaching sequence of equations related to trigonometric functions. The associated meanings to equations that were used in the sequence are expressed and the analysis of epistemic suitability is exemplified in two of its activities. For each of these activities and the initial version later version are shown, the last one contains the improvements realized as a result of analysis. The design of the mentioned sequence was developed in the framework of a workshop of didactics of mathematics. The workshop was part of the joint project between the National University of Mar del Plata and secondary schools dependent on the Jefatura Educativa de Gestión Estatal Región 19.

**Key words:** Didactic sequence - Trigonometrical equations - Epistemic suitability - Meanings

### 1. Introducción

Durante el año 2015, se desarrolló un taller denominado Diseño de Secuencias Didácticas de Matemática en el contexto de las ecuaciones. El taller forma parte de un Proyecto de articulación entre la Universidad Nacional de Mar del Plata y un conjunto de quince escuelas secundarias dependientes de la Jefatura Educativa de Gestión Estatal Región 19<sup>9</sup>. En el taller, los participantes acordaron cuáles son las principales prácticas

---

<sup>9</sup> *El Proyecto La UNMdP y la Escuela Secundaria. Mejora de la formación en ciencias exactas y naturales forma parte del Proyecto de Desarrollo Tecnológico y Social "Estrategia nacional de articulación entre la universidad y la escuela secundaria para la generación de vocaciones y el*

matemáticas, asociadas a ecuaciones, que se busca que los estudiantes puedan desarrollar.

Una de las actividades propuestas a los docentes cursantes de ese taller fue el diseño de una secuencia didáctica vinculada a ecuaciones para favorecer en los alumnos las prácticas acordadas, un análisis crítico de dicho diseño fundamentado en un marco teórico didáctico y su posterior optimización.

Este trabajo muestra un ejemplo de resolución de la actividad mencionada. La secuencia didáctica tuvo una versión inicial y una versión mejorada a consecuencia del análisis didáctico realizado. Se exponen dos actividades de la secuencia en sus versiones inicial y mejorada, las cuales están focalizadas en ecuaciones.

El grupo de estudiantes al que está destinada la secuencia es 6<sup>to</sup> año, último año de la Educación Media. Se analizó la idoneidad epistémica en la propuesta original utilizando las herramientas del Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática (EOS). Dicha evaluación de idoneidad reveló algunas deficiencias tales como el escaso aprovechamiento de los significados asociados a ecuaciones, poca precisión en el lenguaje de algunas consignas e insuficiente coordinación entre las distintas actividades de la guía de trabajo. Se realizaron modificaciones sobre la propuesta original con el objetivo de lograr una mejora de la idoneidad epistémica.

## 2. Marco Teórico

El marco que sustenta esta propuesta es el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición y la Instrucción Matemática (EOS), desarrollado por Juan Díaz Godino, Carmen Batanero y Vicenç Font Moll (Godino y Batanero, 1994; Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Batanero y Font, 2009).

Este enfoque considera *práctica matemática* a cualquier acción, expresión o manifestación (lingüística o de otro tipo) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar la solución obtenida a otras personas, validar y generalizar esa solución a otros contextos. A partir de lo anterior el *significado de un objeto matemático*, es definido como el sistema de prácticas operativas y discursivas para resolver un cierto tipo de problemas asociados a ese objeto (Godino, Batanero y Font, 2009).

En el contexto de una clase, los conocimientos de cada alumno, en un momento dado, son muy variados. Ante un determinado objeto matemático se considera el *significado personal* que cada alumno le asigna a dicho objeto para diferenciarlo del significado fijado por el profesor, por el libro de texto o en un currículo, es decir su *significado institucional*.

A partir de esta distinción se puede describir, metafóricamente, el *aprendizaje* como acoplamiento progresivo entre significados personales e institucionales en una clase (Godino, Batanero y Font, 2009).

Entre las herramientas metodológicas que propone el EOS, está la noción de *Idoneidad didáctica* (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, 2011). La misma permite realizar el análisis y la valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática mediante un sistema de indicadores empíricos. Esta valoración global se realiza a través de seis criterios parciales de idoneidad, atendiendo a las distintas dimensiones que

caracterizan y condicionan los procesos instruccionales: epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, ecológica y emocional.

En este trabajo se usarán indicadores de la idoneidad epistémica. Los mismos se enumeran en la Tabla 1.

COMPONENTES	DESCRIPTORES
Situaciones-problemas	1- Selección de una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. 2- Propuesta de situaciones de generación de problemas (problematización)
Lenguaje	3- Uso de diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico...), traducciones y conversiones entre los mismos. 4- Nivel del lenguaje adecuado a quienes se dirige. 5- Propuesta de situaciones de expresión e interpretación.
Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	6- Definiciones y procedimientos clara y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 7- Presentación de los enunciados y procedimientos fundamentales del tema según el significado de referencia y el nivel educativo. 8- Propuesta de situaciones para la generación y negociación de las reglas.
Argumentos	9- Adecuación de las explicaciones, comprobaciones, demostraciones al nivel educativo a que se dirigen. 10- Se promueven momentos de validación.
Relaciones (conexiones, significados)	11- Relación y articulación significativa de los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

**Tabla 1.** Componentes y descriptores de idoneidad epistémica

Fuente: Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2007, p.2

## 2. Descripción y análisis de las actividades seleccionadas.

Durante el taller, los docentes participantes acordaron cuáles son las principales prácticas asociadas a ecuaciones con las que se aspira trabajar en el aula. Estas prácticas son entendidas, en términos del EOS, como significados asociados a ecuaciones. Así, es posible considerar significados tales como:

- práctica algorítmica.
- expresión de un modelo matemático asociado a un problema intra o extramatemático.
- expresión de una relación entre variables representada en distintos registros (gráfico, coloquial o simbólico).
- relación de igualdad entre expresiones que contienen una o más incógnitas (proposicional).

Para responder a la actividad propuesta en el taller, se eligió como tema ecuaciones trigonométricas. El mismo figura en el Diseño Curricular para el sexto año de Educación Secundaria (último año de la Educación Media), dentro de la Unidad Funciones Trigonométricas, comprendido en el Eje Álgebra y Funciones. El grupo de estudiantes para el que fue diseñada la secuencia colabora y participa activamente con las actividades que se les proponen. Los conocimientos previos requeridos para trabajar con esta secuencia didáctica son: análisis de funciones, razones trigonométricas, resolución de triángulos rectángulos, sistemas sexagesimal y circular, resolución de ecuaciones de primer y segundo grado y resolución de sistema de ecuaciones.

La secuencia fue diseñada para ser desarrollada a lo largo de ocho clases, en las que se contemplan períodos de: diagnóstico, análisis y desarrollo, repaso y evaluación del tema.

Sobre la primera versión de la secuencia se analizó el cumplimiento de los descriptores de idoneidad epistémica procurando con ello abordar suficientemente los significados acordados.

A continuación se muestran, a modo de ejemplo, dos de las actividades de la secuencia original, su análisis de cumplimiento de descriptores y las consecuentes modificaciones que se realizaron para el mejoramiento de la secuencia.

#### Actividad 1

Esta actividad fue pensada para ser implementada en la segunda clase de la secuencia, considerando que en la primera clase se revisarían y ejercitarían conceptos previos. Se pretende que los alumnos puedan visualizar y analizar gráficamente lo que posteriormente se trabajará analíticamente. Para dicha visualización los alumnos harán uso de un archivo Geogebra; en el mismo podrán activar y desactivar las casillas que representan a las distintas funciones mencionadas en el enunciado, que se muestra en la imagen 1.

(Con archivo de Geogebra)

En el archivo Funciones trigonométricas de Geogebra y con la función punto de intersección encuentra las intersecciones gráficamente entre (para eso activa y desactiva las funciones pedidas):

a.  $\text{sen}(x)$  y  $\text{sen}^2(x)$

b.  $\text{cos}(x)$  y 0,5

c.  $\text{cos}^2(x)$  y  $\text{sen}(x)$

d.  $\text{sen}(x) + 1$  y  $\text{tan}(x)$

e.  $\text{tan}^2(x) - 1$  y  $\text{sen}(x)$

a. ¿Qué representan las intersecciones entre dos gráficas?

b. Las intersecciones, ¿sólo son las que se ven en la pantalla? ¿Por qué?

**Imagen 1.** Primera versión de la Actividad 1.

Al analizar los descriptores de idoneidad epistémica en esta actividad se pudo apreciar que se proponen situaciones de interpretación y, además, se usan diferentes modos de expresión (descriptores 3 y 5). Se observaron ciertas falencias que manifiestan el no cumplimiento de algunos descriptores:

- El enunciado es poco claro y está incorrectamente expresado, dando lugar a soluciones no buscadas o respuestas ambiguas (descriptor 6).
- No articula con las demás actividades de la secuencia: ningún inciso guarda correlación ni da el pie para trabajar con otro ejercicio (descriptor 1).
- Se realizan sólo dos preguntas, y en las mismas no se promueven momentos de validación (descriptor 10).
- Se encuentran escasas propuestas de situaciones para la generación de reglas (descriptor 8).
- Se promueve el trabajo de un único significado asociado a ecuaciones: como expresión de una relación entre variables representado en distintos registros (descriptor 7).

De acuerdo a las observaciones realizadas se efectuaron las modificaciones pertinentes para mejorar idoneidad de la actividad. La versión modificada se muestra en la imagen 2.

- Se cambió la redacción de los incisos buscando evitar dualidad de respuestas o soluciones no esperadas.
- Se asignó nombre a cada función trabajada con la notación habitualmente utilizada, y nombrándola como aparece en el archivo de Geogebra que se usa en la consigna.

- Se agregaron funciones e incisos que permiten la articulación con otras actividades de la guía.
- Se adicionaron incisos en los que se promueven momentos de análisis y validación.
- Se incluyeron incisos para procurar generalizar alguna regla.
- Se modificaron incisos existentes y se agregan nuevos, apuntando trabajar también tanto el significado de igualdad entre expresiones como el significado de práctica algorítmica.

(Con archivo de Geogebra)

En el archivo Funciones trigonométricas de Geogebra y con la función punto de intersección encuentra las intersecciones gráficamente entre (para eso activa y desactiva las funciones pedidas):

a.	$f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \sin^2(x)$	f.	$f(x) = \sin x$ y $m(x) = 1$
b.	$h(x) = \cos(x)$ y $t(x) = 0,5$	g.	$f(x) = \sin x$ y $z(x) = 0$
c.	$p(x) = \cos^2(x)$ y $f(x) = \sin(x)$		
d.	$q(x) = \sin(x) + 1$ y $r(x) = \tan(x)$		
e.	$s(x) = \tan^2(x) - 1$ y $f(x) = \sin(x)$		

a. Teniendo en cuenta los pares de funciones anteriormente mencionados, ¿qué representan algebraicamente los puntos de intersección entre las gráficas de las funciones?

b. Las intersecciones, ¿sólo son las que se ven en la pantalla? ¿Por qué?

c. ¿Cuáles son las soluciones entre 0 y  $2\pi$ ? Identifícalas en la gráfica.

d. Escribe algunas soluciones menores que  $\theta$  y otras mayores que  $2\pi$ . Busca una forma general que te permita escribir todas las soluciones.

Imagen 2. Versión modificada de la Actividad 1.

## Actividad 2

Esta actividad, en la secuencia diseñada, se encuentra a continuación de la analizada anteriormente. En ella se plantea un problema extramatemático, con una función trigonométrica que modela la situación. Su enunciado se muestra en la imagen 3.

Durante el ciclo respiratorio (inhalar, exhalar) de una persona en reposo, la razón de flujo (en litros/seg) de aire dentro y fuera de los pulmones en el tiempo  $x$  (en segundos) está dada por  $v(t) = 0,85\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

a. ¿Cuánto tiempo le toma completar un ciclo respiratorio (período)?

b. ¿Cuántos ciclos respiratorios se completan en un minuto?

c. Grafica un ciclo.

d. Halla y si  $x = 3$ .

Imagen 3. Primera versión de la Actividad 2.

Al evaluar la actividad se observó que la misma propone una situación de interpretación, utilizando distintos modos de expresión. Se pretendía trabajar los significados del objeto ecuación como expresión de un modelo matemático asociado a un problema extramatemático y como expresión de una relación entre variables representada en distintos registros. Del análisis crítico realizado, observando los descriptores mencionados, se notaron diversas falencias. Entre ellas podemos destacar:

- Uso de notación inadecuada, dado que la variable detallada (“y”) en un principio no se utiliza en la expresión funcional que se da en  $v(t)$  (Descriptor 4).
- Se reconocen escasas propuestas de situaciones para analizar frente a un problema del que se puede sacar más provecho. Por ejemplo, ninguno de los incisos demanda del estudiante la resolución de alguna ecuación (Descriptor 11).
- No se proponen incisos que lleven a la generación de reglas, ni tampoco a momentos de validación (descriptor 10).



De acuerdo a las observaciones realizadas se efectuaron las modificaciones que se creyeron adecuadas para una mejora en la idoneidad de la actividad. La versión modificada se muestra en la imagen 4.

Durante el ciclo respiratorio (inhalar, exhalar) de una persona en reposo, la razón de flujo (en litros/seg) de aire dentro y fuera de los pulmones en el tiempo  $t$  (en segundos) está dada por  $v(t) = 0,85 \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} t \right)$

- ¿Cuánto tiempo le toma completar un ciclo respiratorio (período)?
- ¿Cuántos ciclos respiratorios se completan en un minuto?
- Grafica la función.
- ¿En qué momentos la razón de flujo es de  $-0,425$  litros/seg?
- ¿Puedes anticipar otros momentos en los que volverá a repetirse esta razón de flujo?

**Imagen 4.** Versión modificada de la Actividad 2.

Los cambios realizados se enumeran a continuación:

- Se modificó la redacción de incisos buscando la coherencia con el relato del problema; se eliminó el inciso en el que la variable detallada no se correspondía con la función utilizada.
- Se agregaron incisos para lograr el aprovechamiento de distintas situaciones apuntando a trabajar también los significados de relación de igualdad entre expresiones y de práctica algorítmica. Se modificó una de las consignas para que su resolución, lleve a trabajar con una ecuación sencilla, mientras que en el problema original no era necesario el planteo de ecuaciones.
- Se agregó la consigna “e” para trabajar con momentos de generalización y validación de los conceptos trabajados en clase.

#### 4. Reflexiones finales

En este trabajo se mostró la aplicación de algunos conceptos de una teoría didáctica, el EOS, en la labor de diseño de materiales de clase.

Durante el taller se acordaron los distintos significados asociados a ecuaciones. Esto contribuyó a dar una orientación para el diseño de una secuencia didáctica que favorezca en los estudiantes la construcción de esos significados.

Por otra parte, el análisis de la idoneidad epistémica, fue una herramienta útil para valorar y mejorar la propuesta. Dado que la secuencia aún no había sido llevada al aula, el análisis estuvo acotado a la idoneidad epistémica. Con la implementación en clase se podrán contemplar otras idoneidades, como por ejemplo la cognitiva o interaccional, que darán lugar a nuevas retroalimentaciones que contribuirán a la mejora de la secuencia.

#### 5. Referencias

- Godino, J. D., Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Versión ampliada del artículo: Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*,

Vol. 39 (1-2), pág. 127-135. Recuperado el 12 de abril de 2016 de [http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis\\_eos\\_10marzo08.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf)

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2007). *Pauta de análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Recuperado el 2 de abril de 2016 de:

[http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta\\_valoracion\\_idoneidad\\_5enero07.pdf](http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/pauta_valoracion_idoneidad_5enero07.pdf)

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26 (1), 39-88.

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.