La matemática como fuente de inspiración musical (I)*

por
CARLOS SATUÉ

Desde Pitágoras hasta nuestros días en realidad la música y las matemáticas han ido de la mano siempre. Hay periodos históricos en que lo han hecho de forma más evidente que otros, pero incluso en los que parecen estar alejadas, el manejo más elemental de escribir una composición musical requiere de básicas condiciones metodológicas que involucran la matemática. Sin embargo, no es lo mismo utilizar matemática básica para calcular el tiempo, las secciones, u otros requerimientos compositivos elementales, que el inspirar la propia música en procedimientos matemáticos que nos parecen hermosos por si mismos y que deseamos que se manifiesten a través del resultado musical. Y es aquí, desde mi punto de vista, donde quizá haya una gran línea histórica: estoy hablando de I. Xenakis <http://www.iannis-xenakis.org>. A pesar de presencias anteriores de elementos matemáticos (como el número áureo y muchas otras proporciones, algún juego de aleatoriedad y otros), con Xenakis se da un salto cualitativo en donde la belleza *per se* de los procesos matemáticos se enraiza en las composiciones musicales como nunca antes se había dado. Es a partir de esta línea de búsqueda a la que se incorpora quien fue mi mentor Francisco Guerrero, muerto prematuramente a los 47 años, quien me introduce en este maravilloso mundo del cual ahora sé que nunca voy a poder salir.

Uno de los primeros problemas al que nos enfrentamos es como matematizar el espacio musical. Tal como lo hizo Xenakis, Guerrero y muchos otros, se vieron en la necesidad de constatar gráficamente los procesos aritméticos de cálculo de forma que la intuición musical del compositor pudiese ver los resultados de una forma más cercana a la percepción humana y no en extensas listas de números. Tampoco es posible percibir este tipo de procesos directamente en el lenguaje musical tradicional y es por ello que la transcripción a esta grafía solo se hará al final de todos los procesos. Muchos de estos autores, y yo mismo, utilizamos el papel milimetrado (primero en forma real y ahora en virtual a través de las simulaciones por ordenador). El papel milimetrado lo podemos ver como un plano de coordenadas cartesianas donde se nos permite evaluar la evolución del discurso musical en sus diversos parámetros. Habitualmente, la duración de las notas como parámetro X (abscisas); aquí tenemos en cuenta el comienzo de cada nota (que lo llamamos impacto) y su duración (desde donde comienza hasta donde termina) siendo así que una determinada obra tiene toda su duración plasmada en un determinado dominio de X. Cada cuadrado del milimetrado conforma una unidad mínima; se trata de un espacio discreto de números enteros y cuando se efectúan cálculos con reales el resultado debe siempre redondearse a la posición entera más cercana.

Lo que se denomina alturas o nombre de las notas se trabaja como parámetro Y (ordenadas) encontrándonos con el mismo problema de redondeo que en las duraciones. Para las alturas se utilizan temperamentos de 1/4 de tono, lo que nos da 24 espacios por octava y no 12, como en un sistema tradicional. El trabajo con 1/4 de tono permite aproximar mucho más los resultados musicales a los matemáticos. Es muy difícil ir más allá de los 1/4 de tono en la praxis interpretativa debido a la imposibilidad de los instrumentos para producir estas alturas, así como los propios límites de percepción del ser humano. El dominio de Y es muy limitado, se utilizan habitualmente 127 valores (aunque este espacio es mucho mayor que el que puede dar una orquesta sinfónica); por otro lado 127 está basado en el límite que ofrece el sistema *MIDI* (abreviatura de *Musical Instrument Digital Interface*) disponiendo así de todo el ámbito de alturas que puede ofrecernos la música electrónica y por ello, aunque muy estrecho matemáticamente, este espacio es suficiente para la aplicación musical.

Las dinámicas (las intensidades de sonido) habitualmente se trabajan como parámetro Z y su recorrido se equipara al de las alturas (desde 1 a 127), sin embargo la percepción humana de las mismas es más limitada que la de las alturas. El dominio es dividido por un número pequeño de espacios (habitualmente 10) confeccionando así una paleta de lo que denominamos expresiones dinámicas y que en el ejemplo de 10 divisiones van desde *pppp*...

hasta *ffff* y aunque no es lo mismo *ffff* de valor 125 que *ffff* de valor 127, en la práctica no hay posibilidad de precisar como sucede con las alturas.

Tal como vemos, los distintos parámetros musicales comentados conforman un espacio 3D al que va a ser fácil aplicar cálculos con operadores matemáticos y así obtener transformaciones que de nuevo son devueltas al ámbito musical.Los parámetros musicales comentados son los básicos, pero podemos establecer otros más, tales como distribuciones instrumentales (qué instrumentos tocan y cuales callan), colores que indican pertenencia a un determinado material (a una determinada naturaleza de objeto), etc. Con ello confeccionamos mapas 3D (o de diferentes dimensiones) que se pueden intercambiar, superponer o someter a diversos cálculos.

No hay reglas claras para trabajar una obra. Normalmente suelo buscar en lo que se denomina materiales y que son: objetos, procedimientos o mejor, abstracciones que conforman una naturaleza propia. Tan material es el tema de la Quinta de Beethoven como una matriz que transforma un conjunto de puntos de partida bajo unas determinadas condiciones que se desarrollará y dará coherencia al conjunto. La pertenencia a un determinado material se suele representar gráficamente mediante colores.Es en esta fase donde la belleza de la geometría tiene un papel decisivo y lo que me provoca y me hace buscar las mejores relaciones posibles entre lo que sucede matemáticamente y lo que es posible musicalmente.

Una vez que he encontrado materiales que se comportan bien para el conjunto de instrumentos a los que va destinada la obra, trato de jerarquizar procesos y estructuras de forma que voy caminando desde lo global hacia lo local, ya que este tipo de obras es más fácil abordarlas desde fuera hacia dentro. La gran obsesión es establecer el mayor número posible de vínculos y cohesiones entre los materiales constituyentes y es ahí donde me atrevería a decir que reside la calidad de cualquier obra. En realidad la búsqueda de estas conexiones entre los elementos constituyentes es muy vieja. Se ha soñado mucho con hacer una pieza donde cada elemento que la conforma sea igual al total de la misma. La matemática ha ofrecido un maravilloso camino para atrapar esta quimera: los fractales.

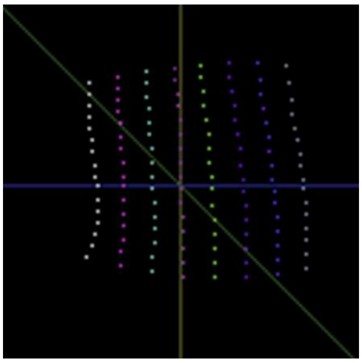
Un fractal es una figura geométrica compuesta por fragmentos en una infinita variedad de tamaños, tales que cada uno de ellos es una copia reducida del total (la parte contiene al todo). Decimos que los fractales son autosimilares o independientes de escala cuando hacemos referencia a esta propiedad y otra interesante característica es que tienen dimensión fraccionaria, lo que les excluye de la geometría euclídea. En general, los fractales están caracterizados por la presencia de infinito detalle, longitud infinita y la ausencia de suavidad o derivabilidad. Los fractales son la geometría adecuada para las formas irregulares de la Naturaleza.

Desconozco si Xenakis exploró musicalmente algo de este mundo, para mí fue Guerrero uno de los primeros que abordó esta aventura y lo hizo sobre todo con la utilización del movimiento Browniano. Yo fui introducido poco a poco en los fractales primero de la mano de Guerrero y después compartiendo experiencias y admiración por estos objetos y su comportamiento musical junto a Carlos Frías con el que todavía seguimos escribiendo software conjuntamente para poderlos tratar como entes musicales.Tras largo tiempo trabajando con fractales, uno se da cuenta que la quimera sigue ahí: los resultados son espectaculares, pero los límites de los propios instrumentos hacen imposible la transcripción perfecta del resultado de cálculo sin sufrir adaptaciones. Por un lado no hay otro camino y solo en determinadas ocasiones, tras mucho estudio de los objetos, se roza lo que ansiamos. En su aplicación a la música topamos rápidamente con la necesidad de pararnos tras muy pocas iteraciones del proceso, puesto que la enorme cantidad de material que recogemos resulta inviable; esto sucede con todos los tipos de fractales con los que he experimentado.

A continuación mostraré unos pocos ejemplos donde la matemática ha sido la gran transformadora o generadora de procesos musicales en mis obras.

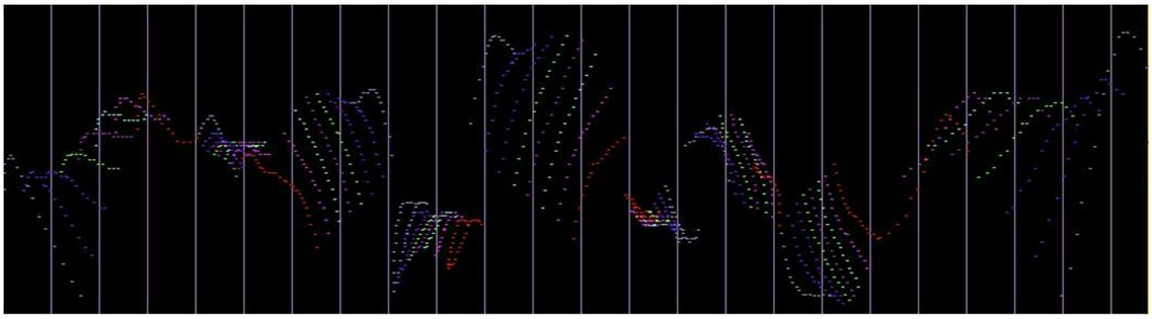
Ejemplo de tratamiento de objetos musicales a través de transformaciones 3D

Las transformaciones 3D que resulta ser algo básico y elemental en diseño gráfico y otras disciplinas es algo que no es muy utilizado en el ámbito musical.El ejemplo que sigue utiliza como material de partida un *Nurbs* (acrónimo ingles de *non uniform rational B-spline*) de 8 líneas con 16 puntos cada una (en música no es posible manejar cantidades ingentes de material como en el diseño gráfico; pensemos que un tema de Bach podría ser de 10 notas que aquí



transcribiríamos a 10 puntos) generado en este caso por terceras partes y tratado en un espacio 3D mediante la utilización de la función *3D Work-station* del programa *Campos©* escrito por Carlos Frías y Carlos Satué.Este *nurbs* va a ser uno de los materiales constituyentes en el primer cuarteto correspondiente al ciclo de cuartetos de cuerda *Extraña espiral de luz*.

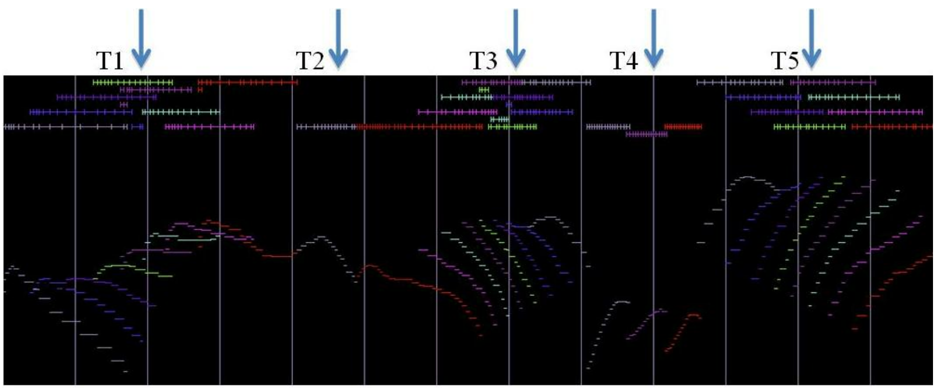
La primera sección del cuarteto contempla 9 transformaciones basadas en rotaciones[1] del objeto de partida y posteriores reescalados en base a acotaciones previas. Recordamos aquí que este tipo de procesos no son conmutativos, por lo cual el orden de las transformaciones parciales es importante. La imagen que sigue muestra las 9 transformaciones, comprimidas en el parámetro *X* multiplicándolo por 0.5, para que pudiesen caber todas en una sola imagen (la línea de puntos original de color amarillo en las transformaciones ha sido cambiada a rojo por consideraciones que aquí no vamos a comentar). Las líneas verticales que recorren de arriba a bajo la imagen representan espacios temporales (compases desde el punto de vista musical).



Continuando con el ejemplo, aunque esta vez ya con destino a la pieza musical y en escala 1, mostramos solo las 5 primeras transformaciones. Se trata de una imagen superpuesta donde el mismo resultado es visto de dos formas distintas. En la parte alta vemos como ha sido distribuido el resultado entre los distintos instrumentos. Las líneas horizontales 1 y 2 corresponden al violín primero, la 3 y 4 al violín segundo la 5 y 6 a la viola y la 7 y 8 al violoncelo. En este mismo espacio superior podemos apreciar las duraciones de las notas ya que están separadas por pequeñas líneas verticales. Mediante el color podemos seguir a quién ha sido atribuida cada línea de puntos del *nurbs*. Las transformaciones 1, 3 y 5 aparecen completas y las 2 y 4 solo con algunas líneas del modelo ya que solo toca el violoncelo.

La parte inferior de la imagen muestra duraciones, alturas y colores, y viene a ser la transformación geométrica tal como surge del proceso,correspondiendo las alturas a las ordenadas y el tiempo a las abscisas. La profundidad, aunque no la plasmamos puesto que esta representación está en 2D, existe, y la podríamos ver indirectamente mediante colores que indicasen profundidad, o bien con pequeñas expresiones dinámicas como las comentadas anteriormente. En todo caso quiero decir que en la conversión a lenguaje musical tradicional son tenidas en cuenta las 3 coordenadas y,como veremos, aparecen en la imagen que corresponde a la partitura.

La distribución de cada línea del *nurbs* transformada debería ser asignada de forma completa a un instrumento, sin embargo ello no ha sido posible en todas las transformaciones, bien debido a la superposición excesiva de puntos en una misma posición de X (dominio temporal) o bien por ser absolutamente impracticable para el instrumento al que se destina. En estos casos, dado que aquí tiene prioridad el objeto resultante sobre otras consideraciones, se procede al reparto de los puntos de dichas líneas entre varios instrumentos. Podemos ver que la T5 está libre de superposiciones y el reparto se ha hecho conforme a lo deseado.



Cuando un instrumento debe asumir varias líneas del *nurbs*, los valores de las dinámicas pueden entrar en conflicto, ya que en ciertos instrumentos no es posible tocar *fff* y *ppp* en el mismo punto y ello obliga a la toma de decisiones prácticas que alejan el resultado musical del ideal matemático.

Seguidamente se muestra la transcripción a lenguaje tradicional de la T1. Obsérvese que corresponde a los 4 primeros compases mostrados en la imagen anterior. El primer pentagrama corresponde al violín 1y funde en un solo sistema, aunque en dos capas, las antiguas líneas 1 y 2 (plicas arriba y plicas abajo), las líneas 3 y 4 se funden en el pentagrama 2, correspondiente al violín 2, las 5 y 6 en el 3, correspondiente a la viola y las 7 y 8 en el 4, correspondiente al violoncelo.

En este caso hemos utilizado como modelo un *nurbs*, pero podríamos hacer transformaciones 3D de un material de Bach o de cualquier objeto tomado como un conjunto de puntos.

A continuación voy a mostrar unos pocos ejemplos de aplicación de fractales en mi música. Se trata de fractales clásicos que pueden ser tratados musicalmente desde muchos puntos de vista.

Se recomienda al lector que tenga interés en este tema que visite la siguiente dirección:

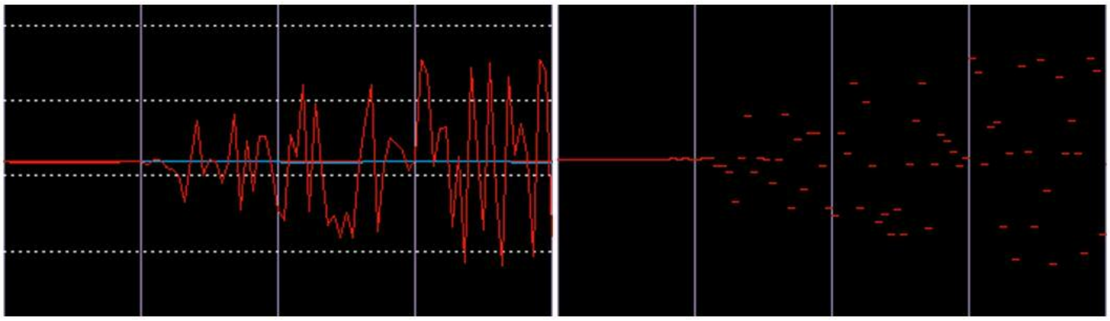
<http://www.matematicalia.net/index.php?option=com_content&task=view&id=324&Itemid=197>

allí podrá comprender algunas de las forma de trabajo con estos objetos en relación con su aplicación a mi música tal como los he ido tratando a lo largo del tiempo.

Ejemplo tratado a partir de Movimiento Browniano

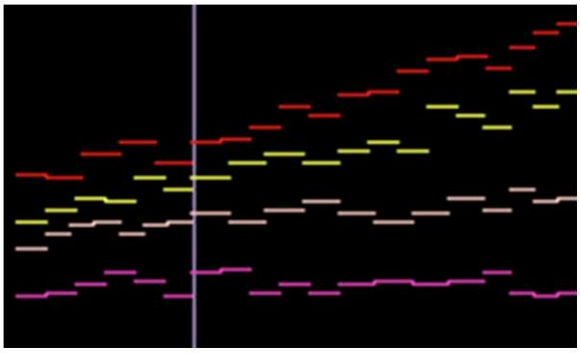
El movimiento Browniano es un fractal de tipo aleatorio con autosimilitud estadística. Puede abordarse de muy diferentes formas, pero en primer lugar quisiera comentar que es un fractal extraordinariamente versátil para la música contemporánea, pues ha sido probado en muchas ocasiones con muy buenos resultados. Para este ejemplo su cálculo ha sido hecho a través de la función *Brownian motion Guerrero-Guillen* del programa *Campos*© (Frías y Satué). En dicha función se trabaja en una sola dimensión y se aplica a las alturas (ordenadas / *Y*). Primeramente determinamos el espacio temporal a operar (abscisas / *X*), a continuación establecemos límites de acción en dicho territorio de los dos parámetros que prioritariamente controlan el algoritmo: se trata del exponente de *Hurst* y de *Sigma*. El exponente de *Hurst* en este algoritmo marca la tendencia y la agresividad en el cambio de dirección; sus valores van desde 0 a 1, de forma que con 1 no habría cambio de tendencia y el resultado sería plano en torno a lo que denominamos guía y que se trata de una curva quecondicionael proceso (esto es un artificio del algoritmo para que el resultado sea musicalmente *controlable*); en realidad es como un 0 en *Y* que puede cambiar de posición a medida que avanza el cálculo. *Sigma* es una unidad de dispersión que consiste en la raíz cuadrada de la varianza y que en el algoritmo sirve para controlar la dispersión del resultado.

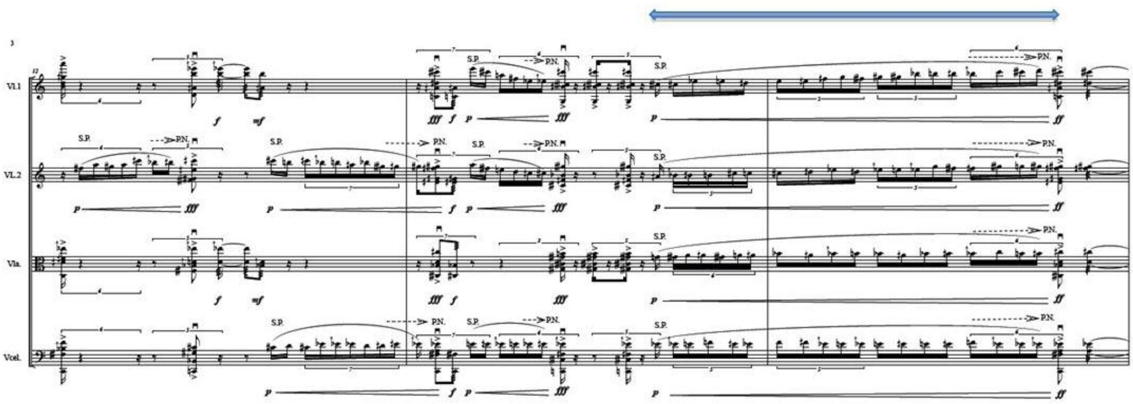
La imagen que sigue muestra un ejemplo donde cada línea vertical marca la influencia de estos parámetros comentados. La función del programa ofrece dos variantes del algoritmo: en la primera, la guía no tiene más influencia que sobre el punto X de inicio y a partir de aquí la tendencia la va llevando *Hurst* únicamente; en la segunda, la guía influye en cada posición de X que avanzamos. El ejemplo que sigue ha utilizado la segunda variante del algoritmo. Los cuatro espacios tienen un *Sigma* de 5 (este valor en sí no nos dice nada, por ello está modulado por un escalar de forma que los resultados obtenidos se acerquen a lo deseado). En el primer tramo tenemos un *Hurst* de 1 y por ello el resultado es el propio valor de la guía (en este caso, plano), el segundo espacio 0.75, el tercero 0.5 y el 4 con valor 0.25. Podemos ver cómo el movimiento de los puntos es más agresivo a medida que *Hurst* tiende a 0. La imagen de la derecha muestra los puntos recogidos para el espacio musical.



Se ha de tener en cuenta que cada vez que actúa el algoritmo cambia el resultado, lo único que conservamos son los valores de *Sigma* y *Hurst* que mantienen la colección de puntos dentro de, por así decir, unas cotas de actuación.Para concluir, decir que musicalmente es interesante por el continuo cambio de valores, y aunque no tenemos control sobre la nota resultante sí podemos orientarla mediante la guía, *Sigma* y *Hurst* (además de otros parámetros no comentados aquí) hacia registros que deseamos. El resultado siempre tiene un tipo de sonoridad especial que la persona experta reconoce rápidamente.

A continuación se muestra un tramo del cuarteto 5 del ciclo *Extraña espiral de luz* donde se puede ver en rojo la curva browniana del violín 1, en amarillo la del violín 2, en beige la de la viola y en fucsia la del violoncelo y debajo tenemos la transcripción a lenguaje tradicional musical donde con unsegmento azul indicamos el espacio browniano.[2]





* Debido a la extensión del presente escrito, el artículo se ha partido en dos tramos. Se muestra el primero en este número de *Entorno Abierto* de septiembre dejando el segundo para el de noviembre.

1 Las distintas rotaciones se hacen en una pizarra virtual 3D y una vez concluidas se trasladan a la posición temporal correspondiente. Este proceso matemáticamente puede abordarse de muchas formas, con las fórmulas tradicionales en cada eje de rotación, o mejor utilizando cálculo con matrices.

2 Cada horizontal de cada color corresponde a una unidad mínima o lo que sería un cuadrado de milimetrado o una posición discreta del dominio temporal. Aquí no hay correspondencia exacta entre cada posición de X de las distintas curvas y es porque la imagen muestra el resultado sometido a pequeñas perturbaciones temporales que no vamos a considerar en el actual escrito.

El espacio que se encuentra debajo del segmento en los cuatro sistemas musicales tradicionales corresponde a la transcripción musical de la imagen previa.