LA GENERALIZACIÓN EN LA CLASE DE MATEMÁTICA. GESTOS DOCENTES Y COLECTIVOS EN UN ESPACIO DE PRODUCCIÓN.

Verónica Cambriglia
U.N.G.S. (Instituto del Desarrollo Humano). U.B.A. (Ccepems).
cambriglia@gmail.com, vcambrig@ungs.edu.ar

Resumen

La generalización impone cierta incertidumbre propia de lo que aún se desconoce. Queremos con este trabajo dar lugar al análisis del proceso de amparo colectivo de esa incerteza y resaltar el necesario aporte de un docente preocupado por dar entrada y lugar al tratamiento de la generalización matemática en su proyecto cotidiano de enseñanza. Recorremos dos fragmentos de un aula de matemática de primer año de escuela secundaria durante un proceso de producción colectiva para identificar -con nuestros análisis- gestos de los participantes del intercambio y recuperar fundamentalmente acciones del docente que sostienen, avalan, refuerzan y tensan la interacción en virtud de dar condiciones fértiles para el aprendizaje.

Palabras claves: Generalización matemática, Interacción, Gestión docente.

Abstract

The generalization implies some sort of uncertainty of what is yet unknown. The purpose of the present work consists in leading to the analysis of the group protection process of that uncertainty and besides, to highlight the important role played by a teacher who is interested in introducing and dealing with mathematical generalization in an everyday teaching project. We go over two fragments of a first year of high school math class during a group production process, to identify- with our analysis- any sign shown by the interchange actors and, mainly, to regain the teacher actions which support, back, reinforce and tense the interaction in order to provide the most productive conditions to the learning process.

Key words: Mathematical generalization. Interaction. Teacher role.

1. Introducción

Nuestro trabajo se enmarca en el estudio de las conceptualizaciones sobre la generalización matemática de un alumno que transita desde formas de hacer profundamente centradas en un trabajo aritmético –propias de su tránsito por la escuela primaria- hacia un trabajo algebraico en donde lo general adquiere formas de escritura y representación específicas de un nuevo lenguaje en otro dominio (formas que se vuelven presentes especialmente en el tratamiento algebraico de la escuela secundaria). Indagamos procesos de producción que se despliegan en el espacio de intercambio colectivo. Allí tratamos de interpelar la realidad –fundamentalmente- en el marco de la Teoría de Situaciones para interpretarla a partir de la concepción de producción matemática que esta teoría conlleva. Asumimos también con respecto al trabajo matemático que analizamos, los alcances de Jackel y Cobb (1996) en torno a las normasque regulan el trabajo matemático como así también su concepción de que el aprendizaje no se puede describir como un compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno ni reducir a un proceso de enculturación a una cultura pre-establecida. R.Duval (1995) nos ha permitido distinguir el tipo de actividades que los alumnos ponen en juego en torno a las representaciones aritméticas y algebraicas. En lo específico del plano de la generalización matemática nos hemos nutrido de los estudios de J. Mason, los avances de N. Balacheff (1987) sobre las pruebas y las validaciones matemáticas. Asimismo M. Panizza (2006) acuña la noción de "generalizaciones espontáneas" e identifica que los alumnos no sólo generalizan frente a tareas de generalización, sino que producen muchas en otros contextos.

Nuestra metodología se ubica en la perspectiva metodológica del estudio de casos. Esta decisión se basa en el reconocimiento de la complejidad de nuestro objeto: la producción de un grupo que incluye alumnos con trayectorias y referencias provenientes de diferentes escuelas primarias en el contexto de sostén de un docente en una institución que entiende la generalización como un objeto de estudio y análisis de los alumnos en sus clases. Nuestro objeto de estudio es un proceso de producción, ello comporta una singularidad que la justifica como caso y en ese sentido buscamos indagar sobre aquello que es posible en una situación en la que se generan condiciones para que los alumnos reflexionen sobre sus prácticas durante un período prolongado, sin pensar en que ello deba derramar en una generalización inmediata de los resultados a otros casos posibles. El interés de un caso para nosotros es el de dar cuenta de su existencia en tanto referencia para pensar en condiciones para la producción de conocimientos acerca de la generalización matemática en un aula durante la entrada al trabajo algebraico.

Inicialmente analizamos los procesos de generalización en un aula en interacción, a partir del vínculo entre los procesos personales y colectivos en el momento de entrada al estudio de lo algebraico. Determinar ese vínculo en los procesos implicaba entender la interacción en tanto motor del aula como sistema. En ese marco nos resultaba indispensable estudiar el papel del docente en la gestión de las situaciones didácticas que introducen la problemática de la generalización en el aula y a su vez tratar de identificar condiciones –tanto de las situaciones problemáticas como de las formas de organización de la clase– que permiten sostener diferentes relaciones iniciales (de los sujetos) con lo general y su evolución hacia relaciones matemáticas más sólidas con lo general. Con el tiempo profundizamos el objetivo y percibimos la importancia de relevar diferentes conocimientos en el tratamiento de lo general como proceso de elaboración colectiva[5]. En tal sentido, identificamos en las aulas construcciones matemáticas alrededor de lo general que adquieren características especiales en el plano social, como ser, la elaboración de conjeturas sobre regularidades numéricas, el análisis de su alcance y dominio de validez, sus formulaciones posibles y las razones que permiten avanzar y justificar esos análisis. Las asociadas a la producción de un procedimiento, las que se dan en torno a la constitución de la racionalidad matemática de los alumnos, las que enfatizan las generalizaciones de propiedades, las que se instalan en la producción de una ley o propiedad, las que se orientan fundamentalmente a la producción de un modelo.

Los análisis que desarrollaremos corresponden a una clase de 1er año de una escuela de Ciudad de Buenos Aires. Este intercambio transcurre luego de que los alumnos trabajaron durante un mes y medio con problemas numéricos sobre el conjunto de los números enteros y profundizaron el análisis de las operaciones en términos de

[5] Es decir aquellas construcciones en el aula emergentes de la interacción que colocan como asunto de estudio la relación entre lo particular y lo general.

relaciones[6]. Estos problemas habilitaron procedimientos de descomposición aditiva y multiplicativa de un número A -dado inicialmente a partir de la traza en una operación determinada- a fin de leer información respecto de la divisibilidad de ese número A por otro número entero. Las tareas que regularon nuestros análisis fueron propuestas por la profesora.
Trataremos de entender un recorte de la interacción y abstraer gestos de los participantes del intercambio que permiten ilustrar momentos de producción matemática a partir de dos fragmentos (Dialogo 1 y Dialogo 2) analizando las tensiones y avances del intercambio.

2. Voces de generalización

La profesora aborda con los alumnos el problema de estudiar si la suma de tres números consecutivos es múltiplo de tres. Los alumnos lo habían pensado en sus casas y recupera esta tarea en el espacio colectivo. Frente al "sí" de muchos alumnos la profesora trata de abordar mecanismos de argumentación sobre esa certeza y sostiene la generalidad implícita en el enunciado de la tarea: el problema refiere a la suma de **cualquier** terna de enteros consecutivos la cual **siempre** resultará múltiplo de tres.

Dialogo 1

1. P: *Cómo saben? Cómo arrancaron este ejercicio?* (Varios quieren responder) *A ver Tomás…*
2. T: *Primero empecé con 1, 2 y 3*
3. P: *empezaste probando…1, 2 y 3…y te daba…y después?..dijiste entonces sí…*
4. Lautaro: *pero 1, 2 y 3 da múltiplo de tres*
5. P (toma la intervención de L y retoma): *Bien 1 + 2+ 3 da seis que es múltiplo de tres….bien*
6. Lautaro: *4 +5 + 6 ..da múltiplo de 3*
7. Belén: *da múltiiplo…todos son…*
8. Prof: *está bien mi pregunta es cómo saben que sumando tres cualquiera ….por eso si agarro 1617 + 1618 + 1619 ustedes dicen que si yo sumo eso va a dar múltiplo de tres? Y cómo saben tan rápido?*
9. Denisse: *Sí, porque la tabla del tres va de tres en tres entonces si tres números consecutivos….va a ser múltiplo de tres esa cosa….*
Murmullos
10. Tomás: *Yo hice un montón pero……. no sé cómo explicarlo*
11. Prof (dirigida a Tomás): *Bien, pero está bien, es parte del problema, es eso lo que quería trabajar…*(dirigida a todos) *lo que Tomás me dice es yo agarré algunos ejemplos sencillitos y me di cuenta que se venía cumpliendo la cosa, lo que no me sale es explicarlo, el porqué. Hicieron un montón de ejemplos y vieron que la cosa venía verdadera…acá Denisse empieza a plantear algo…cómo dijiste Denisse?*
12. Denisse: *que la tabla del tres va de tres en tres entonces vos podés sumar….ah una cosa pero esos tres números consecutivos hay que sumarlos entre sí?*
13. Prof: *sí hay que sumarlos. Sumar tres números consecutivos…¿se entiende? Denisse dijo una cosa que es re-contra-interesante y es que en tres números consecutivos….*
14. Varios: *hay un múltiplo de tres*
15. Prof: *claro hay un múltiplo de tres porque van de tres en tres ¿Se entiende? Entonces. dale Belén…*
16. Belén: *claro como dijo bien Denisse cada tres números hay un múltiplo entonces el primer número...por ejemplo te doy un ejemplo, el más fácil de todos el tres…tres es múltiplo de tres entonces el cuatro que va a ser el próximo, le va a sobrar uno y al cinco le va a sobrar dos y cuando ya vuelve al tercer le va a sobrar cero porque ya va a ser seis y va a ser de nuevo otro múltiplo. Entonces cuando vos sumás como al cuatro le sobra uno…*

[6] Es decir el objetivo era analizar la expresión numérica que describe al número y encontrar nueva información a partir de ella.

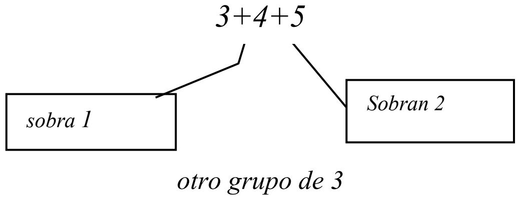
17. Prof (retomando a Belén): *entonces cada tres números consecutivos hay un múltiplo de tres, así arranca Belén por ejemplo si tenemos tres más cuatro más cinco hay un múltiplo de tres porque está el tres ¿y vos decías del cuatro….?*

18. Belén: *que te va a sobrar uno porque es tres más uno y en el cinco van a sobrar dos porque es tres más dos ya en el seis no van a sobrar tres porque ya ahí sería uno de nuevo*(se superpone Denisse)

19. Denisse: *igual hay formas …*

20. Agostina (se superpone): *igual si te ponés a pensar ya te das cuenta porque cada tres números…y o sea vos es como que si sumás tres números consecutivos es como que a todo lo dividís en tres entonces cuando lo dividís en tres…, ponele ahí esta el cero que es múltiplo de tres hay uno dos y tres, el tres va a ir al otro grupo de tres números consecutivos que también es…*

21. Belén (mientras Agostina habla): *sí y es siempre así.*



En el pizarrón la profesora escribe mientras acompaña los argumentos.

22. Prof: *pero pará, pará, pará que yo hablé del …a mi nadie me contestó que pasa con el milseiscien… qué pasa con el 1617 +1618 + 1619?* (escribe los tres números que dice)

En este recorte del intercambio la entrada al terreno de lo general se soporta en la exploración de los alumnos sobre un buen conjunto de ternas particulares. Es la profesora la que recupera las exploraciones particulares como parte de la entrada en la generalización del problema y el uso de los ejemplos como aporte de entrada a formas generales de validación es propuesto y estudiado por muchos autores, entre ellos como uno de los pioneros N. Balacheff (1984). Ella sostiene este hacer de los alumnos, acompaña y tensa cuando los alumnos responden "siempre va a dar". Inquiere el porqué de esa respuesta e instala así que el argumento de "probar" no es suficiente para responder al problema. Su preguntar devuelve[7] al aula que el problema refiere a qué ocurre con la suma de tres consecutivos *cualquiera* (intervención 8). En esa misma intervención agrega una terna de tres números grandes en tanto variable didáctica que no permita anticipar el resultado con rapidez ni decidir de modo fácil cuál de esos tres números es múltiplo de 3[8].

En el sentido de lo expuesto, la intervención 11) de la profesora*,* aprueba la exploración de los alumnos mediante ejemplos señalando que es un modo de corroborar que "la cosa se viene cumpliendo" pero que eso no es suficiente para explicar el valor de verdad de esa afirmación cualquiera sea la terna de números consecutivos. Su avidez de gestión le permite no dejar pasar la intervención de Denisse, enfatizarla e impulsar a los alumnos a tomarla en cuenta hacia una argumentación alrededor de que "cada tres números habrá un múltiplo de tres". Posiblemente, Denisse no anticipe en su intervención 9 que ese conocimiento que formula conduce hacia una manera de argumentar, pero la profesora

[7] En el sentido de devolución propuesto por Brousseau G al referir al contrato didáctico: "Sabemos que el único medio de "hacer" matemática, es buscar y resolver ciertos problemas específicos y, a este fin, plantear nuevos interrogantes. El maestro debe entonces efectuar no la comunicación de un conocimiento, sino la devolución del buen problema. Si esta devolución se opera, el alumno entra en el juego y si gana, se opera el aprendizaje" (Brousseau, 1986)

[8] En clases anteriores la profesora trató de desestimular el uso de criterios de división tradicionales para que los alumnos usasen la lectura de las operaciones como elemento de decisión.

recorta esa afirmación cierta, la impulsa y la sostiene dando posiblemente con ello espacio a otras voces, como la de Belén en su intervención 16 del registro, que, apoyadas en la afirmación de Denisse, que fue sostenida por la docente, intentan dar un argumento.
Belén en esta intervención necesita aún plantear su argumento sobre ejemplos que usa con generalidad, ella considera el 3, 4 y 5 para argumentar que cada uno de ellos se puede considerar como un múltiplo de 3 más un resto y que los restos pueden reagruparse.
La profesora vuelve a tensar luego de las voces de Belén y Agostina, trae al colectivo la generalidad de un argumento que Belén y Agostina parecen haber expresado. La docente aclara lo presente, toma lo adecuado y marca la necesidad de un argumento que trascienda la particularidad de ternas arbitrarias para el resto de los alumnos. Agrega sus representaciones escritas en el pizarrón que acompañan cosas señaladas en el registro oral. Observemos ahora el intercambio en el fragmento que citamos en Dialogo 2:

Dialogo 2

23. Belén: *es lo mismo porque uno de esos va a ser múltiplo…*
24. Alumno: *es lo mismo que 7 + 8 + 9*
25. Prof: *yo lo que quiero saber es si esto da múltiplo de tres. Belén dice que no tiene ni siquiera que descomponer, que ya se da cuenta de entrada…*
26. Belén: *es por lo mismo de arriba…uno segurísimo va a ser múltiplo porque va de tres en tres..segurísimo*
27. Prof: *bien uno va a ser múltiplo de tres yo no sé cuál pero seguro que uno va a ser*
28. Varios: *el 19…el 17*
29. Belén: *otro segurísimo..bueh ponele el 19 (accediendo a lo que lo otros le proponen)*

Interrupción del argumento de Belén. Los chicos se ponen a discutir cuál es el múltiplo de tres…Belén dice bajito igual no importa…la profesora interviene para discutir que no basta mirar los últimos dos para asegurar que es múltiplo de tres

30. Prof: *igual me interesa escuchar bien lo que dice de Belén ella dice uno de estos tres va a ser múltiplo de tres, yo no sé cuál*
31. Belén (continua): *porque es siempre así cuando te dan tres números seguidos uno seguro es múltiplo de tres porque cada tres números tenés un múltiplo de tres: 3, 6, 9,….*
32. Prof: *Está bueno lo que está diciendo Belén, los múltiplos de tres van de tres en tres entonces no sé cuál pero seguro que alguno engancho*
33. Belén: *y también uno que le sobra uno y también uno que le sobra dos entonces eso sumado, uno más dos, te da tres entonces ya ahí sería múltiplo.*
34. Prof: *Entienden lo que dice Belén? Volvés a repetirlo?*
35. Belén: *sí, como ya sabemos uno de esos tres va a ser múltiplo y también, como hay tres seguidos, uno de esos le va a sobrar uno, o sea va a ser ese múltiplo más uno, y a otro va a ser ese múltiplo más dos y como ahí te están sobrando dos y uno sería ese como el resto pero el sumarle dos más uno, te da tres, y como estamos o sea mirando que sería múltiplo de tres ya ahí sería como otra cajita y ya ahí sería múltiplo.*
36. Prof: *voy a tratar de ponerle un poco más de símbolos a lo que está diciendo Belén… vos decime, Belén, si es lo que estás pensando…* lo que Belén dice es, si yo tengo un múltiplo de tres el que le sigue va a ser…
37. Belén: *múltiplo de tres más uno.*
38. Prof: y *el que le sigue…es este múltiplo de tres más dos?* (Belén acompaña diciendo múltiplo más 2)

Escritura en pizarrón

$$\dot{3}+\dot{3}+1+\dot{3}+2$$

Nuevo grupo de 3

39. Luciano: *pero… y si tengo 1, 2 y 3?*

40. Prof: *ahí está…pero está bueno lo que plantea Luciano…esto es si yo comienzo por un múltiplo de tres pero qué pasa si el múltiplo de tres, por ejemplo, está a lo último …*

La profesora devuelve al resto de los alumnos lo que Belén enfatiza como que *uno será múltiplo de tres y que no le interesa saber cuál*, es decir su argumento -que en la intervención 16- requirió apoyarse sobre el 3, 4 y 5 es generalizable en su hacer, eso lo expone esta alumna en sus intervenciones desde el comienzo del fragmento 2. Belén utiliza los ejemplos numéricos como ejemplos genéricos en términos de Balacheff. Cabe enfatizar el acompañamiento de la profesora pidiendo reiteraciones que, por un lado, contribuyen a que Belén explicite aún más sus modos de argumentar y –por otro lado- permiten a los otros alumnos entrar en la argumentación de Belén. A esta altura de los registros se hace más visible cómo la profesora sostiene el espacio de producción alrededor de la generalización: acompaña, reformula, reitera voces del aula y agrega al colaborar con el aporte de un tipo de representación que –anclada en una notación aritmética de los alumnos de otras clases: el ($\overset{punto}{3}$)- permite trascender por medio de esa escritura la particularidad de las ternas numéricas (nos referimos al intercambio que inicia en su intervención 36)

Los gestos de la profesora aportan, toman y apoyan sin sobrepasar con su generalidad las racionalidades en construcción de sus alumnos. Ni la profesora ni Belén parecen considerar en sus formulaciones un lugar especial para el múltiplo de tres en la terna del problema. Sin embargo, al introducir la docente un medio de representación en el pizarrón, la profesora asigna al múltiplo de tres un primer lugar en la suma. Eso permite a otros alumnos -aún arraigados en subconjuntos de ternas numéricas específicas- plantear qué ocurriría si no se comenzase con un múltiplo de tres (Luciano en su intervención 39). La clase entra luego en un proceso de intentar modificar y completar el modelo de representación inicial. Razones de extensión de este trabajo no permiten incluir el fragmento 3 que corresponde a dicho intercambio, sólo mencionar que es el andamio colectivo –incluida en él la gestión del docente- el que soporta la gestación de la necesidad de completar el modelo argumentativo e incorporar otras razones que trasciendan o reinviertan los argumentos dados para el caso en que el múltiplo de tres ocupaba el primer número entero de la terna.

Las nuevas argumentaciones que surgen requieren restar 1 o 2 a un múltiplo de 3 y aún así comprobar que el resultado de la suma será un múltiplo de 3. Otros alumnos que no aceptan armar grupos con cosas que se quitan a un múltiplo de tres -para el caso en que el múltiplo de tres está en segundo o tercer lugar de la terna- asumen la posibilidad de reconceptualizar aspectos de la división entera, advirtiendo que un múltiplo de 3 menos 1 es igual al múltiplo de 3 anterior más 2 (equivalentemente para el caso múltiplo de 3 menos 2) y así de alguna manera armar grupos de 3 con lo que "excede" y no con lo que se "quita".

3. Comentarios finales.

Lo general impone cierta incertidumbre propia de lo que aún se desconoce. Pretendimos dar lugar al análisis del proceso de amparo colectivo de esa incerteza y resaltar –en el marco de un proceso de producción colectiva- el esencial aporte de una profesora preocupada por dar entrada y lugar al tratamiento de la generalización matemática en su proyecto cotidiano de enseñanza. Los gestos de la docente actúan como soporte momentáneo en la incerteza, por ejemplo, al avalar lo particular, al aportar o tomar las tensiones que otros alumnos vuelcan al colectivo o al traer representaciones ancladas en formas de hacer de sus alumnos que permitan trascender lo particular y entrar en una notación de lo general. Dar presencia a la generalización en el aula exige múltiples condiciones, en este trabajo resaltamos dos de ellas, un docente con la convicción de aceptarla como asunto de trabajo en todo momento, comprometiéndose con su sostén, su tensión y su aporte y un entorno colectivo de producción –no independiente de su accionar- que habilite a que dicha gestión tenga lugar.

4. Bibliografía

Balacheff , N(1987) Procesos de prueba y situaciones de validación. Educational Studies in Mathematics 18 pp. 147-176

Brousseau, G (1986) Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Recherches en Didactique des mathématiques, Vol 7/2, pp. 33-115. La Pensée Sauvage, Grenoble

Duval (1995) Sémiosis et Pensée Humaine. Berne: Peter Lang. Traducción para fines educativos, Departamento de Matemática educativa del Cinvestav-IPN, 1996, México

Mason, J. ; (1996) : Expressing generality and roots of algebra, en Bernardz, N. Et al (ed.),
Approaches to Algebra, pp. 65-86, Kluwer Academic Publishers.

Paniza (2006) Razonar y Conocer. Aportes a la Comprensión de la Racionalidad Matemática de los Alumnos. Ed. Libros del Zorzal.

Yackel, E; Cobb, P (1996) Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. JRME, Vol. 27.4, pp. 458-477