EXPLORANDO RELACIONES CONCEPTUALES SOBRE CONJUNTOS NUMERICOS DE INGRESANTES UNIVERSITARIOS CON ANALISIS ESTADISTICO IMPLICATIVO

Caputo, Liliana N.; Porcel, Eduardo A.; Romero, José L.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. UNNE.
proflcaputo@gmail.com, porcelfel@arnet.com.ar, joseluisromero@live.com.ar

Resumen

El objetivo de este trabajo es explorar si los estudiantes establecen o no relaciones conceptuales sobre el conjunto de números reales y sus subconjuntos, utilizando análisis estadístico implicativo (ASI). Para alcanzarlo, se analizó un ítem de las pruebas de diagnóstico del cursillo de ingreso 2009 a las carreras de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la UNNE, comparando las relaciones establecidas por los alumnos con las previstas por los docentes evaluadores. El análisis puso en evidencia la ausencia de algunas relaciones conceptuales que habían sido previstas en el análisis didáctico-matemático previo.

Palabras clave: Análisis Estadístico Implicativo, Cuasi-implicaciones, Conjuntos numéricos, Alumnos ingresantes a la Universidad.

1. Introducción

Generalmente, el docente al elaborar un temario de examen hace un análisis respecto a cuáles son las relaciones conceptuales que ponen en juego los alumnos evaluados para resolver las cuestiones propuestas. Sin embargo, no es fácil identificar esas relaciones y, en general, no tienen por qué darse en la práctica las relaciones previstas por el profesor. Para establecer qué relaciones efectivamente se dan en la práctica puede utilizarse, entre otras metodologías, el Análisis Estadístico Implicativo (ASI, sigla de su nombre en francés *Analyse Statistique Implicative*) (Spagnolo, F.; Gras, R.; Régnier, J-C.; 2009).
Régis Gras y sus colaboradores a partir de la hipótesis:

si un ejercicio es más complejo que otro, entonces todo alumno que resuelve el primero debería resolver también el segundo (Régnier, J-C., 2013)

crearon esta técnica estadística que permite establecer relaciones del tipo "si a, entonces, casi b" (llamadas cuasi – implicaciones) entre las respuestas a ítems de evaluación. ASI se diferencia de los métodos clásicos de asociación de variables en que las relaciones que identifica no son simétricas.
En este trabajo, se utiliza esta metodología para el análisis de un ejercicio referido a identificación de números reales incluido en la prueba de diagnóstico de conocimientos matemáticos previos suministrada a ingresantes a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) de la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE), al inicio del año lectivo 2009.

2. Metodología

En principio, la aplicación de ASI requiere un conjunto finito de variables (E). Dichas variables pueden ser dicotómicas, frecuenciales o por intervalos. Sólo se describirá su uso en los casos en que las variables son dicotómicas puesto que son de esa clase las que se utilizarán en el presente trabajo.

Así pues, según la Lógica bivalente, para que la implicación $a \Rightarrow b$ sea verdadera, si a es verdadera, también lo debe ser b. Es decir que el conjunto formado por los individuos que respondieron correctamente el ítem a de una evaluación ($A = \{x \in E \,/\, a(x) = 1\}$) debe estar incluido en el de los que contestaron correctamente el b ($B = \{x \in E \,/\, b(x) = 1\}$). Sin embargo, en la práctica pueden darse casos de estudiantes que pertenecen a A, pero no a B, sin que ello implique que no existe relación entre a y b. Para determinar la validez o no de la implicación, se utilizará el número de contraejemplos (los casos en que $a \wedge \neg b$ es verdadera que equivale a los $x \in A - B$) ponderado con respecto a los cardinales de E (al que denotaremos con n), A (n_A), B (n_B) y A – B ($n_{a\wedge\neg b}$).

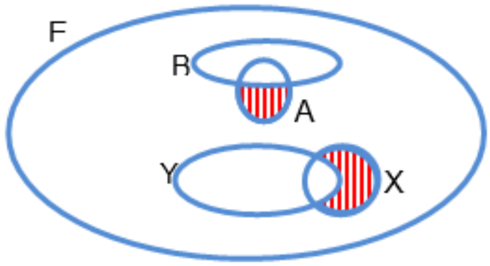

Figura 1: Las partes sombreadas en rojo corresponden a los contraejemplos de $a \Rightarrow b$ (Orús y Gregori; 2013)

Sean X e Y dos subconjuntos de E, equipotentes a A y a B, respectivamente. Se denotan con Y' y B' a los complementos de Y y B en E, respectivamente, de donde:

$$c(Y') = c(B') = n_{\neg b} = n - n_b.$$

Entonces, la implicación $a \Rightarrow b$ es admisible a nivel de confianza $1 - \alpha$ si, y sólo si, $\Pr[c(X \cap Y') \leq c(A \cap B')] \leq \alpha$ (Figura 1)

Se demostró que esta probabilidad sigue la ley de Poisson de parámetro $\frac{n_a \cdot n_{\neg b}}{n}$. (Gras y Kuntz; 2009).

Experimentalmente, se ha demostrado que estas probabilidades siguen una ley de Poisson, una Binomial o una Hipergeométrica, pero “En condiciones de convergencia convenientes, estas dos últimas leyes conducen finalmente a la anterior ley de Poisson.” (Gras y Kuntz; 2009).

Por otra parte, se define el índice de implicación, q(a, b), que estima la diferencia entre $n_{a\wedge\neg b}$ y el valor que habría tomado si a y b fueran independientes (la cual denotamos con $Q(a,\neg b)$). Bajo determinadas condiciones $Q(a,\neg b)$ se aproxima a la distribución normal (0,1), por lo que - a partir de $q(a,\neg b)$ - se define la intensidad de implicación ($\varphi(a, b)$) utilizando la distribución normal. Entonces, se puede redefinir la admisibilidad de la implicación $a \Rightarrow b$, diciendo que la misma es admisible a nivel $1 - \alpha$ si $\varphi(a, b) \geq 1 - \alpha$.

Ahora bien, cuando el cardinal de E es muy grande, se hace necesario considerar qué sucede con la calidad de la implicación contrarrecíproca puesto que si n_A y n_B son pequeños con respecto a n, los cardinales de sus complementos serán considerables. Es por eso que se incluye el concepto de entropía de Shannon que permite definir un índice que integra la información a partir de un número pequeño de contraejemplos de $a \Rightarrow b$ y de su contrarrecíproca, a partir del cual se calcula la intensidad entrópica de la implicación.

Para calcular las intensidades de una implicación (clásica o entrópica) se utiliza el software Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC), desarrollado originalmente por R. Gras y H. Rostam. Sin embargo, CHIC proporciona una tabla de doble entrada que interrelaciona las variables, pero que dificulta interpretar cuáles son las implicaciones que se dan entre las variables. Por tal motivo, es usual presentar las implicaciones mediante un digrafo ponderado, sin ciclos, que se denomina grafo implicativo y que permite comprender e identificar las relaciones de implicación obtenidas al hacer el análisis. (Couturier; 2009).

Al analizar las cuasi – implicaciones se observan que algunas de éstas son cuasi – equivalencias, por lo cual se puede hablar de clases de variables. Estas clases se pueden visualizar mediante una gráfico (similar a un dendograma) al que Couturier (2009)

Implicaciones Esperadas	***Saberes subyacentes***

denomina árbol de similaridad.
A la vez, una cuasi – implicación o regla puede implicar a otra variable o a otra regla. Si bien $(a \Rightarrow b \wedge b \Rightarrow c) \Rightarrow (a \Rightarrow c)$ es una tautología, cuando las implicaciones son las cuasi implicaciones definidas anteriormente no es necesariamente válida dicha ley de inferencia y se considera que se cumple si, y sólo si, la intensidad entrópica de $a \Rightarrow c$ es, al menos, igual a 0,5. De esta manera, vemos que pueden modelizarse reglas que implican otras reglas (llamadas meta - reglas o R - reglas) y, si a, b, c, d son variables o reglas, pueden darse las siguientes posibilidades:

a) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow c$.

b) Si a es una variable: $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$.En este caso es útil recordar que la implicación antes mencionada es equivalente a $(a \wedge b) \Rightarrow b$.

c) $(a \Rightarrow b) \Rightarrow (d \Rightarrow c)$.

Así pues, la estructura que deviene de la combinación de estas posibilidades es jerárquica y supone una perspectiva dinámica y no estática, como es la de una simple tipología. Para detectar las R – reglas surgidas al analizar un conjunto de datos con ASI, CHIC proporciona el llamado árbol jerárquico, que facilita la interpretación de estas meta - reglas (Couturier; 2009).
En este trabajo, la población en estudio estuvo constituida por 767 ingresantes y el ejercicio analizado es el siguiente:
*Dada la siguiente tabla, indica en cada casillero con **SI** o **NO** si el número dado pertenece o no al conjunto indicado en cada fila.*

C_i $x_j \rightarrow$ $\downarrow$	2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-2	$\sqrt{2}$	-1,5	$-\sqrt{49}$	$\sqrt{-1}$
$\mathbb{N}$ (Naturales)								
$\mathbb{Z}$ (Enteros)								
$\mathbb{Q}$ (Racionales)								
$\mathbb{I}$ (Irracionales)								
$\mathbb{R}$ (Reales)								

Para realizar el análisis se utilizaron 40 variables dicotómicas (V_{ij} con $1 \leq i \leq 5$, $1 \leq j \leq 8$) que toman el valor 1 si el alumno respondió correctamente al ítem y 0 en caso contrario. Dados i, j fijos, los posibles valores de V_{ij} ($x_j \in C_i$) se dan en la Tabla 1.
Las implicaciones esperadas al analizar previamente el ejercicio se presentan en la Tabla 2.

Valor de Verdad de $x_j \in C_i$	***Respuesta del alumno***	***Valor de V_{ij}***
Verdadera	*SI*	*1*
	NO	*0*
Falsa	*SI*	*0*
	NO	*1*

Tabla 1: Posibles valores de las variables V_{ij}: $x_j \in C_i$, con i =1, …, 5 y j = 1, …, 8.

Para realizar el análisis se utilizó el software CHIC, considerando la implicación entrópica y siguiendo la ley de Poisson. Las implicaciones detectadas son admisibles al nivel de confianza 0,95 y 0,99, en azul y rojo en el grafo de la Figura 2, en el que cada nodo se denota con C_ix_j que hace referencia a la proposición $x_j \in C_i$.

$2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \in \mathbb{Z}$; $2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \in \mathbb{Q}$ $2 \in \mathbb{N} \Rightarrow 2 \in \mathbb{R}$; $-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -2 \in \mathbb{Q}$ $-2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow -2 \in \mathbb{R}$; $-2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow -2 \in \mathbb{R}$ $-\sqrt{49} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$; $-\sqrt{49} \in \mathbb{Q} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{R}$ $-\sqrt{49} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{R}$ $3/2 \in \mathbb{Q} \Rightarrow 3/2 \in \mathbb{R}$; $-3/4 \in \mathbb{Q} \Rightarrow -3/4 \in \mathbb{R}$ $-1,5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow -1,5 \in \mathbb{R}$ $-\sqrt{49} \in \mathbb{Q} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{2} \in \mathbb{I} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{Q}$ $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{I}$ $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{Z}$ $\sqrt{-1} \notin \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{N}$	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$
$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ *(“Ningún número es racional e irracional a la vez”)*
$\sqrt{2} \in \mathbb{I} \Rightarrow -\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$	*2 no es “cuadrado perfecto”, por lo cual sus raíces cuadradas son irracionales, pero como 49 sí lo es, sus raíces cuadradas son racionales.*
$\frac{-3}{4} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$	*El cociente (o razón) de dos números enteros, es un número racional. El sentido de la implicación está dado por el hecho de que en la Enseñanza Elemental primero se conocen los racionales no negativos y, bastante tiempo después, los racionales negativos*
$-1,5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$ $-1,5 \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{-3}{4} \in \mathbb{Q}$	*Distintas representaciones semióticas de un número racional (fracciones y “números con coma”)*
$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$ $-\sqrt{49} \in \mathbb{R} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$	*Definición de radicación en $\mathbb{R}$ (“No se pueden calcular las raíces cuadradas de números negativos”)*

Tabla 2: Relaciones conceptuales detectadas en el análisis previo

3. Resultados

Usando ASI se detectaron 45 implicaciones (entre las cuales hay 6 que se cumplen con un 99 % de confianza).

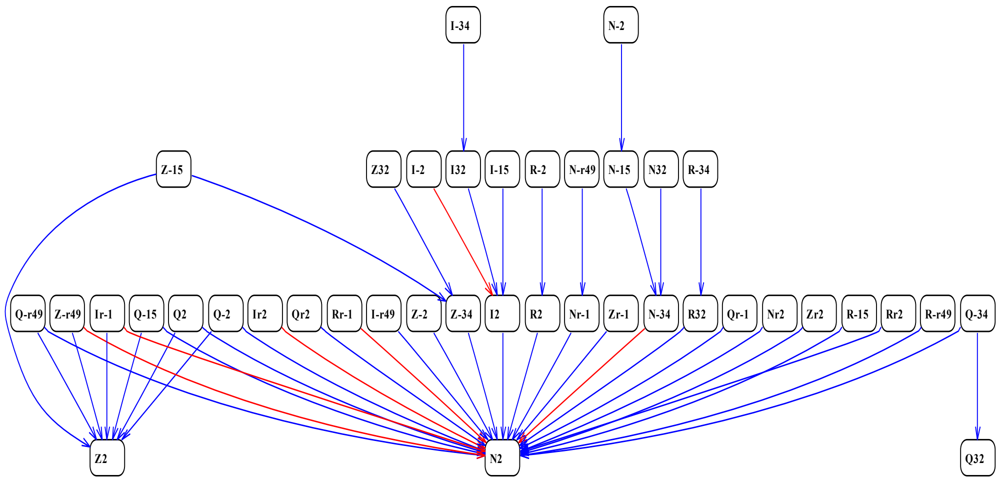

Figura 2: Grafo implicativo

En la Figura 2, se observa que la mayoría de las cadenas de más de dos implicaciones se dan entre nodos referentes o bien a los números naturales, o bien al conjunto de números irracionales, lo cual permite inferir que los alumnos identifican a los primeros y a aquellos elementos que no pertenecen a $\mathbb{I}$. La mayoría de las implicaciones del grafo (o cadenas de implicaciones) tiene como vértice final al nodo N2, es decir, a la proposición $2 \in \mathbb{N}$.

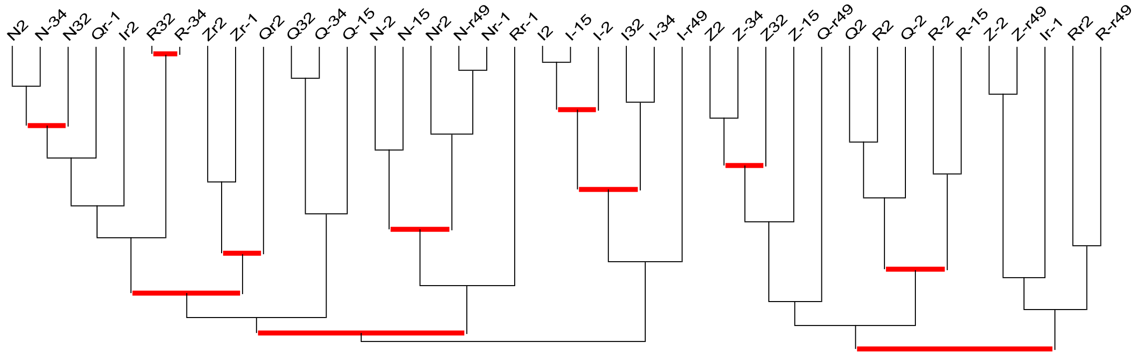

Figura 3: Árbol de similaridad

Asimismo, se observa que si el alumno sabe que 3/2 no es natural ni entero, sabe que -3/4 tampoco lo es; análogamente, si sabe que -3/4 es racional y real, pero no irracional, sabe que 3/2 pertenece a $\mathbb{Q}$ y a $\mathbb{R}$, pero no a $\mathbb{I}$. Esto permitiría afirmar que los estudiantes identifican a las fracciones irreducibles como números racionales y reales. Cabe señalar que en el grafo, no se observan implicaciones que involucren entre sí a $\sqrt{2}, -\sqrt{49}\ y\ \sqrt{-1}$, lo cual en cierta manera indica una limitación del conocimiento de los alumnos respecto a la radicación en $\mathbb{R}$.

En el árbol de similaridad (Figura 3) se observan dos clases de cuasi equivalencias: una (C1) que contiene aquellas respuestas que identifican correctamente a los números naturales, a los racionales no enteros (como tales y como reales), a raíz de dos como irracional y a la de -1 como no racional ni real. La otra, C2, agrupa las respuestas que identifican a 2, -2 y -$\sqrt{49}$ como enteros, racionales y reales, a -1,5 y a las fracciones irreducibles como números no enteros y a raíz cuadrada de -1 como no irracional. Llama la atención que mientras Qr-1 y Rr-1 están en C1, Ir-1 está en C2, ya que las respuestas provenientes de C1 podrían interpretarse en el sentido de que algunos estudiantes creen que raíz de -1 es irracional y no real, mientras que otros (cuyas respuestas pertenecen a C2) que es racional y real; ésto estaría dando cuentas de falta de claridad respecto a la inclusión de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$ y de la definición (restringida) de radicación en $\mathbb{R}$.

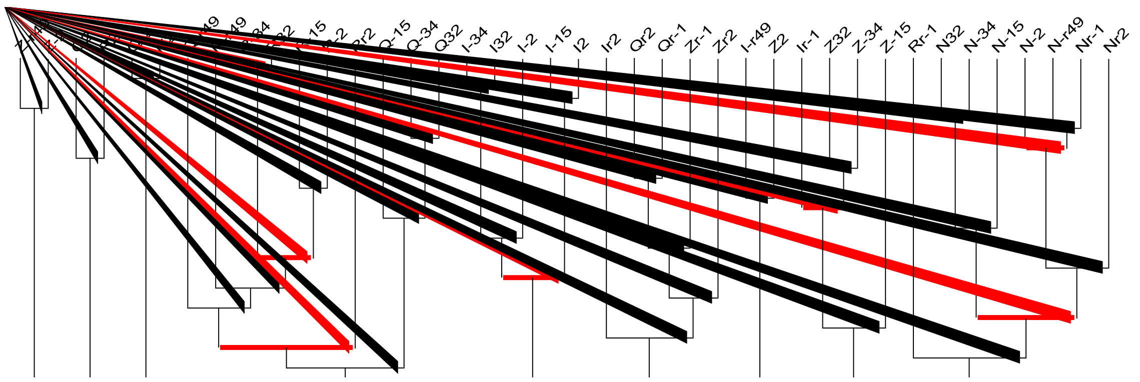

Figura 4: Árbol jerárquico

En cambio, si se observa el árbol jerárquico (Figura 4), el análisis permite detectar 4 reglas y 5 meta – reglas, de las cuales 4 incluyen implicaciones de nivel de confianza de 0,99. Estas (y hasta dicho nivel de confianza), se enuncian e interpretan a continuación:

<u>R – Regla 1</u>:

$$\left[-\sqrt{49} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \left(-\sqrt{49} \in \mathbb{R} \Rightarrow \left(\left(\frac{-3}{4} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{3}{2} \in \mathbb{R}\right) \Rightarrow (-1{,}5 \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \in \mathbb{R})\right)\right)\right] \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Esta meta – regla indica que los estudiantes saben que los números racionales son reales, pero sus saberes respecto a $\mathbb{Q}$ no son suficientes para determinar si $\sqrt{2}$ es o no racional.

R – Regla 2: $\left[\left(\frac{-3}{4} \notin \mathbb{I} \Rightarrow \frac{3}{2} \notin \mathbb{I}\right) \Rightarrow -2 \notin \mathbb{I}\right] \Rightarrow (-1{,}5 \notin \mathbb{I} \Rightarrow 2 \notin \mathbb{I})$

Puede observarse que aquí los alumnos reconocen a los racionales (positivos y negativos, enteros y no enteros) como no irracionales. Sin embargo, no se evidencia relación entre la identificación de los números racionales como no irracionales y la identificación de raíz de 2 como irracional.

R – Regla 3: $\sqrt{-1} \notin \mathbb{I} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{-3}{4} \notin \mathbb{Z}\right)$. Esta meta – regla estaría dando cuentas de un conocimiento amplio del conjunto de números racionales y enteros y de que no toda raíz cuadrada es un número irracional; en ese sentido, esta R – regla se complementa con la 1, en la cual se reconocía que $-\sqrt{49} \in \mathbb{Q}$.

R – Regla 4:

$$\left[\left(\frac{3}{2} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \frac{-3}{4} \notin \mathbb{N}\right) \Rightarrow -1{,}5 \notin \mathbb{N}\right] \Rightarrow \left[-2 \notin \mathbb{N} \Rightarrow \left(-\sqrt{49} \notin \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{-1} \notin \mathbb{N}\right) \Rightarrow \sqrt{2} \notin \mathbb{N}\right]$$

En este caso, se observa un profundo conocimiento del conjunto de números naturales, lo cual es consecuencia de que es el primer conjunto numérico estudiado en la enseñanza elemental.

4. Consideraciones finales

Se puede observar que muchas de las relaciones conceptuales esperadas en el análisis matemático – didáctico previo, se han presentado en las respuestas de los alumnos. Sin embargo, ninguna regla ni meta – regla, muestra que los estudiantes relacionen el hecho de que es suficiente que un número real sea negativo para que su raíz cuadrada no sea real, o que los conjuntos de números racionales y de irracionales son disjuntos por ser complementarios. Puede concluirse que la red de conocimientos matemáticos que el alumno debería poner en juego para la resolución del ejercicio, no es la adecuada a tal fin, por lo cual parece importante que en los primeros cursos de Matemática de las distintas carreras, se diseñen y pongan en práctica actividades de enseñanza que favorezcan el establecimiento de las relaciones conceptuales antes mencionadas.

5. Referencias

Couturier, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. En *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Stgo de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 51 - 64.

Gras, R.; Kuntz, P. (2009). El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Stgo. de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 3 – 50.

Orús, P.; Gregori, P. (2013). Utilización del ASI en la investigación en Didáctica de la Matemática y en la formación del profesorado. Web:http://es.slideshare.net/LuisTamami1/asi-dm-defecuador2013. Accedido:10/12/15.

Régnier J.C. (2013). Extracto de la obra *Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités* Gras, R.; Régnier J.C.; Guillet F. (Eds) (2009). Web:http://sites.univ-lyon2.fr/asi7/?page=0&lang=es . Accedido:29/02/16.

Spagnolo, F.; Gras, R.; Régnier, J.C. (2009). Una medida comparativa de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia. En *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo. Primera aproximación en lengua hispana*. Orús, P.; Zamora, L.; Gregori, P. (Eds). Stgo de Cuba, Cuba: Universitat Jaume I de Castellón y Universidad de Oriente. pp 143 – 158.