

EMERGENCIA DEL CONOCIMIENTO EN EL HORIZONTE MATEMÁTICO. UN ESTUDIO CENTRADO EN LA FORMACIÓN DE PROFESORES EN GEOMETRÍA ANALÍTICA

Virginia Ciccioli; Natalia Sgreccia

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de
Rosario, Argentina.

ciccioli@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Este reporte se enmarca en un trabajo más amplio en el que se pretende caracterizar la formación que se ofrece a futuros Profesores en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario en la configuración del *conocimiento matemático para la enseñanza (MKT)* de geometría analítica elemental. En particular aquí se analiza la activación del dominio Conocimiento en el Horizonte Matemático, desde el aporte disciplinar de la asignatura Geometría I. La investigación, que se aborda mediante un estudio de caso, tiene un enfoque eminentemente cualitativo y alcance principalmente descriptivo. Los resultados revelan componentes específicas de este dominio que pueden ser de interés para la formación de profesores que luego enseñarán esta rama de la Matemática en los niveles educativos de incumbencia (secundario y superior).

Palabras clave: Formación de profesores, *MKT*, Geometría analítica.

1. Introducción

La importancia de hacer investigaciones especializadas en la formación de profesores en geometría analítica hace referencia a las dificultades que se evidencian en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría en el nivel secundario. Muchas de las investigaciones revisadas (Gascón, 2002, 2003; Henríquez y Montoya, 2015; Alves, Mendoça y Coletti, 2010; Bonilla y Parraguez, 2013) refieren a esta problemática como una consecuencia de la falta de complementariedad con que se abordan los enfoques sintéticos y analíticos de la geometría en la enseñanza de la Matemática durante la escolaridad secundaria.

En este nivel, una formación desprovista de ciertos aspectos geométricos sintéticos, en el sentido en que lo plantean los distintos autores mencionados, podría derivar en una algebrización de la geometría analítica, con una consecuente pérdida de sentido.

Por su parte, Duval (1999) sugiere que dicha problemática se suele relacionar con la complejidad subyacente en las conversiones entre registros de representación. Es así que otras investigaciones consultadas (Arellano y Oktac, 2009; Dallemole, Oliveira y Moreno, 2014; Karrer y Navas, 2013) aluden al modo en que se favorece o desfavorece, desde la enseñanza, la construcción de significados de los conceptos de la geometría analítica en los distintos registros y las correspondientes conversiones. Todos estos estudios señalan lo dificultoso que resulta el aprendizaje de la geometría analítica al finalizar la escolaridad secundaria e iniciar estudios superiores, y algunos de ellos avanzan hacia propuestas de enseñanza superadoras.

Sin embargo, no se han encontrado investigaciones que se centren en la formación de profesores ni que aborden la geometría analítica en un sentido más amplio que desde la particularidad de un tema puntual. Por otro lado, dada la importancia para la formación

de los modelos docentes vividos (Santaló, 1999), es de interés conocer cómo se van cimentando las bases de toda una rama de la Matemática tan trascendente, como es la geometría analítica, en estudiantes que proyectan ser profesores.

Este trabajo se enmarca en uno más amplio en el que se pretende caracterizar la formación que se ofrece a futuros Profesores en Matemática (PM) de la Universidad Nacional de Rosario en la configuración del *conocimiento matemático para la enseñanza* (*MKT*; Ball, Thames y Phelps, 2008) de geometría analítica elemental.

El contenido se enfoca en la geometría analítica que se aborda en la asignatura Geometría I de primer año del PM. Incluye los siguientes temas: vectores, recta en el plano, plano, recta en el espacio, secciones cónicas y ecuación general de segundo grado en dos variables.

Este reporte se centra en uno de los dominios del *MKT*: Conocimiento en el Horizonte Matemático (*HCK*), debido a que estudios previos señalan la importancia de este dominio en el fortalecimiento de la formación de profesores (Ciccioli y Sgreccia, en evaluación; Martínez, Giné, Fernández, Figueiras y Deulofeu, 2011) y su implicancia en los otros dominios del *MKT* (De Gamboa, Badillo y Ribeiro, 2015; Fernández y Figueiras, 2014).

Según la perspectiva de Fernández y Figueiras (2014), el *HCK* surge no solo como una respuesta teórica a la necesidad de darle continuidad a la enseñanza de la Matemática sino que además permite tener una visión matemática periférica de la enseñanza y, en ese sentido, involucra cierto conocimiento de la práctica profesional. Profundizando la conceptualización propuesta desde el *MKT*, los autores sugieren que el *HCK* es mucho más amplio y requiere una visión global de la Educación Matemática. Adhiriendo a esta idea, De Gamboa et al. (2015) agregan que el *HCK* toma forma en otros modos, como ser ejemplos materiales que los docentes pueden usar mientras enseñan. Estos ejemplos hacen referencia a un conocimiento más profundo acerca de los contenidos curriculares e incluso acerca de las conexiones entre esos contenidos y los de otras áreas.

De manera similar a la propuesta de Martínez et al. (2011), más allá de hacer una contribución teórica en la conceptualización del *HCK*, este reporte pretende describir componentes específicas de dicho dominio que emergen en las primeras clases de geometría analítica del PM para reflexionar acerca de los mecanismos que este conocimiento podría promover en estudiantes del PM y consecuentemente en su accionar como futuros docentes.

2. Marco teórico

Shulman (1986) inicia una línea de investigación sobre la formación del profesor con una propuesta de categorías para conceptualizar la clase de conocimiento requerido en la enseñanza de cualquier materia. Ball et al. (2008) avanza en la línea de investigación de Shulman (1986), orientándola hacia la Matemática. Según estos autores, la mayoría de la gente estaría de acuerdo en que conocer Matemática es importante para su enseñanza. Sin embargo, lo que abarca tal conocimiento y su alcance aún amerita indagación desde la investigación especializada. Por y para ello estos autores proponen un conjunto de seis dominios de *MKT* que han de disponer los profesores (Tabla 1).

Este modelo teórico que se adopta para la lectura y análisis de datos surge y se nutre desde investigaciones empíricas en contextos de aula, acorde con el trabajo que aquí se plantea. Ball y Bass (2003) introducen la necesidad de conceptualizar el *MKT* a partir de la observación del trabajo de los profesores en clases de Matemática. Agregan que estudios de esta índole ayudan a clarificar un currículum para la formación de docentes

profesionalmente fundada, sustancial y fundamentalmente atravesada por la práctica profesional y los conocimientos y habilidades demandados por la profesión (Ball et al., 2008).

Conocimiento disciplinar	<i>CCK</i>	Matemática de cualquier ámbito científico o profesional.	Conceptos, procedimientos, significados, denominaciones, notaciones, casos, deducciones.
	<i>HCK</i>	Conciencia sobre la génesis y relación de los contenidos matemáticos.	Relaciones conceptuales más allá de lo que se está desarrollando en cierto momento, apreciaciones valorativas sobre los objetos matemáticos, encuadres epistemológico, histórico y real.
	<i>SCK</i>	Usos específicos, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformar el contenido en enseñable.	Empleo de distintos registros (coloquial, gráfico y simbólico), selección de ejemplos pertinentes y variados, formulación de preguntas y re-preguntas procurando favorecer el sentido matemático.
Conocimiento didáctico del contenido	<i>KCS</i>	Integra conocimiento acerca de la cognición de los alumnos.	Previsión de comportamientos, creencias, dificultades, errores, adecuaciones de los niveles de abstracción, potenciación de las respuestas estudiantiles.
	<i>KCT</i>	Conocimiento pedagógico y didáctico específico que requiere un profesor para actuar desde la enseñanza.	Orientación de las explicaciones, promoción de la participación estudiantil, administración de los tiempos de la clase, empleo de metáforas, de recursos didácticos.
	<i>KCC</i>	Se precisa para dar un enfoque y organización a los contenidos que se pretenden enseñar.	Articulación de contenidos de la asignatura así como de otras, vinculación del desarrollo de la teoría con el de la práctica, referencias a lo estudiado en niveles previos de escolaridad.

*Tabla 1. Dominios del MKT (Ball et al., 2008)
con ejemplos para su caracterización de Ciccioi y Sgreccia (en evaluación)*

3. Metodología

El estudio de caso se aborda mediante un enfoque cualitativo y tiene un alcance descriptivo. Se observan las tres primeras clases de geometría analítica de Geometría I tomando un registro exhaustivo de los actos (palabras y acciones) mediante transcripción textual de los mismos. El procesamiento de los datos se realiza mediante la técnica de análisis del contenido (Cabrera, 2009) y la segmentación del contenido de la clase se desarrolla por medio de la estructura propuesta por Coll, Colomina, Onrubia y Rochera (1992) en la que los mensajes, como unidades semióticas de significado, son parte de los actos observados en las clases.

Las categorías del estudio son los dominios del *MKT* y en este reporte se presenta solo una: el *HCK*. Cada dominio está constituido por una cierta cantidad de modalidades. El proceso de delimitación de las modalidades y la articulación de las mismas con las categorías siguió varias fases de familiarización con los datos, identificación de los mensajes como componentes de los dominios y unificación de la denominación para mensajes similares. Es por eso que cada modalidad está asociada con uno o más mensajes (extractos de la transcripción de actos efectuada) que pueden estar expresados con palabras diferentes pero que tienen la misma naturaleza semiótica (que está representada por la denominación de la modalidad).

4. Resultados

Se comparten las modalidades emergentes del *HCK* (con el número de activaciones) y algunos mensajes asociados a cada una (extractos de las clases). Se indica el número de clase (C1...C3) y el número de acto de habla del docente (por ejemplo 111D).

Insinuación de vinculaciones matemáticas posteriores (16): relaciones a través del currículum con nociones matemáticas que se desarrollarán luego, ya sea en esta materia o en otras asignaturas de la carrera.

Bueno, está bien, va a ser distancia, pasa que todavía no tengo definida la distancia (C1-32D).

En realidad son dos rectas cualesquiera (refiriéndose a los ejes) (C1-36D).

Eso es importante, en Matemática cuando yo empiezo a trabajar con un nuevo ente geométrico o lo que sea, lo primero que tengo que hacer es decir cuándo son iguales esas cosas (C2-91D).

Pero si yo estoy trabajando en dimensiones más grandes, a lo mejor la noción es difícil generalizarla (C2-96D).

Un versor es un vector de norma, de módulo 1, siempre que diga norma va a ser módulo... norma es un concepto más general (C2-111D).

Lo interesante de los vectores es que uno los va a poder sumar, los va a poder multiplicar por escalares y van a tener otras propiedades que vamos a ver más adelante y que nos van a resultar muy útiles, ya que nuestro objetivo es ver que los vectores son una herramienta muy útil para estudiar la geometría analítica, que ese es nuestro objetivo final: encontrar las ecuaciones de lugares geométricos importantes (C3-17D).

Van a ver que la suma de vectores tiene propiedades muy similares a las del conjunto de los números reales (C3-94D).

Alcance de las caracterizaciones matemáticas (8): formas de determinación de objetos u operaciones dependiendo de la pertinencia de los casos a considerar.

Por lo tanto, para dar una recta en el espacio no me basta una sola ecuación, voy a necesitar dos. Esto da cuenta de que para describir un lugar geométrico, por más simple que sea, a lo mejor necesito más de una ecuación... (C2-68D).

Para los físicos los vectores " \overrightarrow{AB} " y " \overrightarrow{CD} " probablemente sean distintos porque en general cuando estoy ejerciendo una fuerza y en el momento... una fuerza que está aplicando sobre una partícula que está situada acá, y al vector " \overrightarrow{CD} " que está aplicado en esta otra partícula... Entonces como vectores son distintos porque son distintos los puntos sobre los cuales se aplican. En Matemática no nos interesa, para nosotros van ser iguales independientemente del punto... (C2-91D).

Lo primero que tengo que probar es que no depende del punto de origen elegido, o sea que esta definición es lo que se llama una buena definición (C2-119D).

Esta es la ley del paralelogramo y esto es muy útil, ya lo vamos a ver, para descomponer un vector como suma de otros dos, ¿sí?, pero es menos general que la definición que nosotros vimos de suma porque esta definición no vale para vectores que están alineados, en cambio aquella sí (C3-169D).

Fundamentación de la importancia del surgimiento de la geometría analítica (4): argumentos epistemológicos que destacan aspectos fundantes de esta rama de la Matemática.

Los griegos ni usaban números, ellos representaban cantidades con segmentos... entonces, recién en el año 1400 aparecen los números como los conocemos hoy. Hasta el 1700 la Matemática que se conocía en Occidente se reducía casi por completo a la geometría de Euclides y algunas obras como la aritmética de Diofanto, o sea, lo que vimos en el primer cuatrimestre, obviamente que mucho más, mucho más complicado, más complicado el lenguaje, fue prácticamente lo que se conoció de Matemática durante un largo período de la historia. Bien, ¿por qué les cuento todo esto? Porque, en realidad, en la Matemática las ideas van a existir siempre, independientemente del sistema que uno use para representarlas, pero encontrar el mejor sistema, la mejor notación, la notación más adecuada, es fundamental para poder transmitir ideas y, por lo tanto, avanzar. A partir del descubrimiento de Descartes, que es algo

elemental, ustedes dicen: “se le podría haber ocurrido a cualquiera”, ¿sí? Pero primero voy a tener que tener número para que se me ocurra, entonces, voy a esperar a 1400 y bueno... (C1-54D).

Lo que hizo Descartes, la idea revolucionaria de Descartes, fue transformar problemas geométricos de medición en problemas algebraicos, los cuales, uno los puede resolver de manera exacta y saber de manera exacta quién es este punto (C1-54D).

Conexión con una situación real (4): ejemplificaciones que refieren a hechos u objetos de ámbitos extra-matemáticos.

Tengo tres barcos que van navegando en línea recta, a una determinada velocidad constante (...) Entonces a mí me interesa saber, si los barcos siguen navegando en esa dirección, si se van a chocar o no se van a chocar, ¿sí? (C1-54D).

Por ejemplo, los planetas alrededor del sol se mueven dibujando una elipse (C1-59D).

Ubicación en el tiempo de hechos fundamentales de la Historia de la Matemática (2): fechas y datos históricos de relevancia en la disciplina.

Entonces la geometría analítica se debe a Descartes, que es del año (...) y su método del 1637 (C1-49D).

Mención de la evolución de conceptos en la Historia de la Matemática (1): referencia a las modificaciones que sufren ciertos conceptos matemáticos a partir del surgimiento de nuevas teorías de conocimiento.

Entonces, si es un conjunto de puntos del plano o del espacio, ¿por qué lo llamamos lugar geométrico? (...) Pero ustedes tienen que pensar que cuando esto se empieza a estudiar, no existía la teoría de conjuntos (C1-63D).

Vinculación geometría sintética - geometría analítica (1): relaciones a través del currículum que se establecen entre los enfoques sintético y analítico de la geometría.

Yo voy a hacer un par de dibujos y voy a escribir un par de ecuaciones y ustedes me van a decir qué tienen que ver unos con otros (C1-56D).

Valoración estética de las representaciones matemáticas (1): apreciación de la belleza matemática que portan ciertos objetos o procedimientos.

Esa es una forma, es más elegante incluso que la que está en el apunte (C2-111D).

5. Comentario final

En el apartado anterior se presentaron las ocho modalidades emergentes para el dominio *HCK*. En dos de ellas se producen relaciones a través del currículum, más allá de lo que se está desarrollando en ese momento. Tal es el caso cuando se vincula la geometría sintética con la analítica y cuando se insinúan vinculaciones matemáticas posteriores. También aparecen apreciaciones que puede expresar quien conoce Matemática en un nivel superior al que está enseñando, como por ejemplo advertir sobre el alcance de las caracterizaciones matemáticas y valorar estéticamente ciertas representaciones matemáticas. El encuadre epistemológico se plasmó a través de otras dos modalidades: fundamentación de la importancia del surgimiento de la geometría analítica y mención de la evolución de conceptos en la Historia de la Matemática, habiendo además alusiones a la Historia de la Matemática y las aplicaciones al ubicar en el tiempo ciertos hechos fundamentales y conectar con una situación real.

Todas estas muestras de activaciones del *HCK* evidencian su implicancia en otros dominios y pueden contribuir a una visión más amplia de la Matemática para los estudiantes del PM, tal como sugieren Fernández y Figueiras (2014) y De Gamboa et al. (2015). Por otra parte, posibilitan un marco de referencia acerca de cómo motivar el aprendizaje de la geometría analítica y darle más profundidad a los contenidos curriculares en las futuras prácticas docentes de los estudiantes del PM. Estas referencias se basan en el contenido de las modalidades emergentes en las que se

muestran algunos ejemplos materiales que los docentes pueden utilizar, o analizar, poner a consideración y por qué no inspirarse, para la enseñanza de la geometría analítica en el nivel secundario.

6. Referencias bibliográficas

- Alves, M., Mendoça, T. y Coletti, C. (2010). A transição Ensino Médio e Superior: a noção de retas e planos em R^2 e R^3 . En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 23, 179-188.
- Arce, M. y Ortega, T. (2013). Deficiencia en el trazado de gráficas de funciones en estudiantes de bachillerato. *PNA*, 8(2), 61-73.
- Arellano, F. y Oktaç, A. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su representación gráfica. En Lestón, P. (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 22, 357-368.
- Ball, D. y H. Bass (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group*, 26, 3-14.
- Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Bonilla, D. y Parraguez, M. (2013). La Elipse desde la perspectiva de la Teoría de los Modos de Pensamiento. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 611- 618.
- Cabrera, I. (2009). El análisis de contenido en la investigación educativa: propuesta de fases y procedimientos para la etapa de evaluación de la información. *Pedagogía Universitaria*, 14(3), 71-93.
- Ciccioli, V. y Sgreccia, N. (en evaluación). Formación en geometría analítica a futuros profesores. Un estudio de caso desde el MKT. *Revista Educación Matemática*.
- Coll, C., Colomina, R., Onrubia, J. y Rochera M. (1992). Actividad conjunta y habla: una aproximación al estudio de mecanismos de influencia educativa. *Infancia y Aprendizaje*, 59-60, 189-232.
- Dallemole, J., Oliveira, C. y Moreno, L. (2014). Registros de representación semiótica y geometría analítica: una experiencia con futuros profesores. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(2), 131-163.
- De Gamboa, G., Badillo, E. y Ribeiro, M. (2015). El horizonte matemático en el conocimiento para la enseñanza del profesor: geometría y medida en educación primaria. *PNA*, 10(1), 1-24.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Cali, Colombia: Universidad del Valle.
- Fernández, S. y Figueiras, L. (2014). Horizon Content Knowledge: Shaping MKT for a Continuous Mathematical Education. *REDIMAT*, 3(1), 7-29.
- Gascón, J. (2002). Geometría sintética en la ESO y analítica en el bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? *Suma*, 39, 13-25.
- Gascón, J. (2003). Efectos del autismo temático sobre el estudio de la geometría en secundaria. *Suma*, 44, 25-34.
- Henríquez, C. y Montoya, E. (2015). Espacios de trabajo geométrico sintético y analítico de profesores y su práctica en el aula. *Revista de Investigación y Experiencias didácticas en Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), 51-70.
- Karrer, M. y Navas, S. (2013). Superficies Esféricas: Uma proposta de ensino com o auxílio de um ambiente de geometría dinámica. En Flores, R. (Ed.), *Acta latinoamericana de Matemática Educativa*, 26, 1831- 1838.

- Martínez, M., Giné, C., Fernández, S., Figueiras, L. y Deulofeu, J. (2011). *El conocimiento del horizonte matemático: más allá de conectar el presente con el pasado y el futuro*. En Marín, M., Fernández, G., Blanco, L. y Palarea, M. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática*, 15, 429-438. Ciudad Real, España: SEIEM.
- Santaló, L. (1999). La formación de profesores de matemática para la enseñanza media. En Santaló, L. (y Cols.), *Enfoques: Hacia una didáctica humanista de la matemática*. Buenos Aires, Argentina: Troquel.
- Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.