# La matemática como fuente de inspiración musical (y II)

por

Carlos Satué

## Ejemplos con sistemas Lindenmayer

Un sistema L, también así llamado, es un fractal que partiendo de un mínimo conjunto de letras, reglas y un axioma da como resultado bellísimas estructuras gráficas. Los algoritmos utilizados admiten mucha variación y los resultados siempre están condicionados a las posibilidades del algoritmo. Hay que tener en cuenta que puede construirse un gran idioma con los símbolos para que su interpretación gráfica sea muy extensa. Para los ejemplos que siguen utilizo las funciones *L-Systems: ramifications & grafting* y *L-Systems: chords & structures* del programa *Campos* (Frías y Satué).

Este fractal musicalmente puede abordarse desde muchos puntos de vista. A continuación se muestra en un entorno de construcción preliminar de una pieza donde se derivan todas las grandes estructuras y procedimientos a partir de un grupo de símbolos; y dado que en esta ocasión no se necesita más que diferentes interpretaciones de ellos no es necesario convertir las cadenas de letras en gráficos. A la izquierda mostramos el conjunto de variables; debajo de ellas, en la misma tabla, las reglas o aquello en lo que deben transformarse en cada nueva iteración; a la derecha aparece el axioma del que partiremos y en el cuadro inferior el resultado tras una iteración. Este último se toma para la construcción de elementos de partida de la pieza *Quimeras*. Cada variable adopta un significado según el parámetro musical al que apliquemos el resultado: pongamos por ejemplo que en la distribución de materiales cada letra es un tipo de ellos, de forma que la primera iteración nos da el plano general de distribución de materiales en toda la obra (los símbolos «+» y «-» que se refieren a rotaciones, puesto que aquí carecen de sentido, no se toman en consideración). Si se aplica a la distribución instrumental, cada variable va a significar una determinada combinación instrumental en juego, etc. En dependencia del parámetro musical que llevemos entre manos puede llegarse a varias iteraciones, sin embargo debemos advertir que el sistema crece exponencialmente y también que las condiciones de inicio son altamente sensibles, lo que provoca, no en pocas ocasiones, que cueste encontrar unas idóneas posiciones de partida para que nos lleven a un buen y útil resultado.

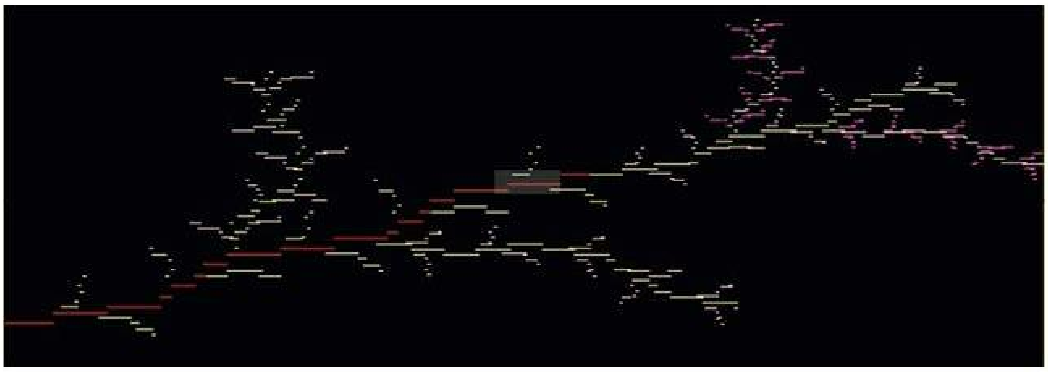
| Variables: | A | B | C | D | E | F | G |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Reglas: | AD | BD | CF | ABC | DEF | Libre (a) | ABCDEF |

➡ Axioma: A+C-B-D+A-C-D+B-F-E+C.

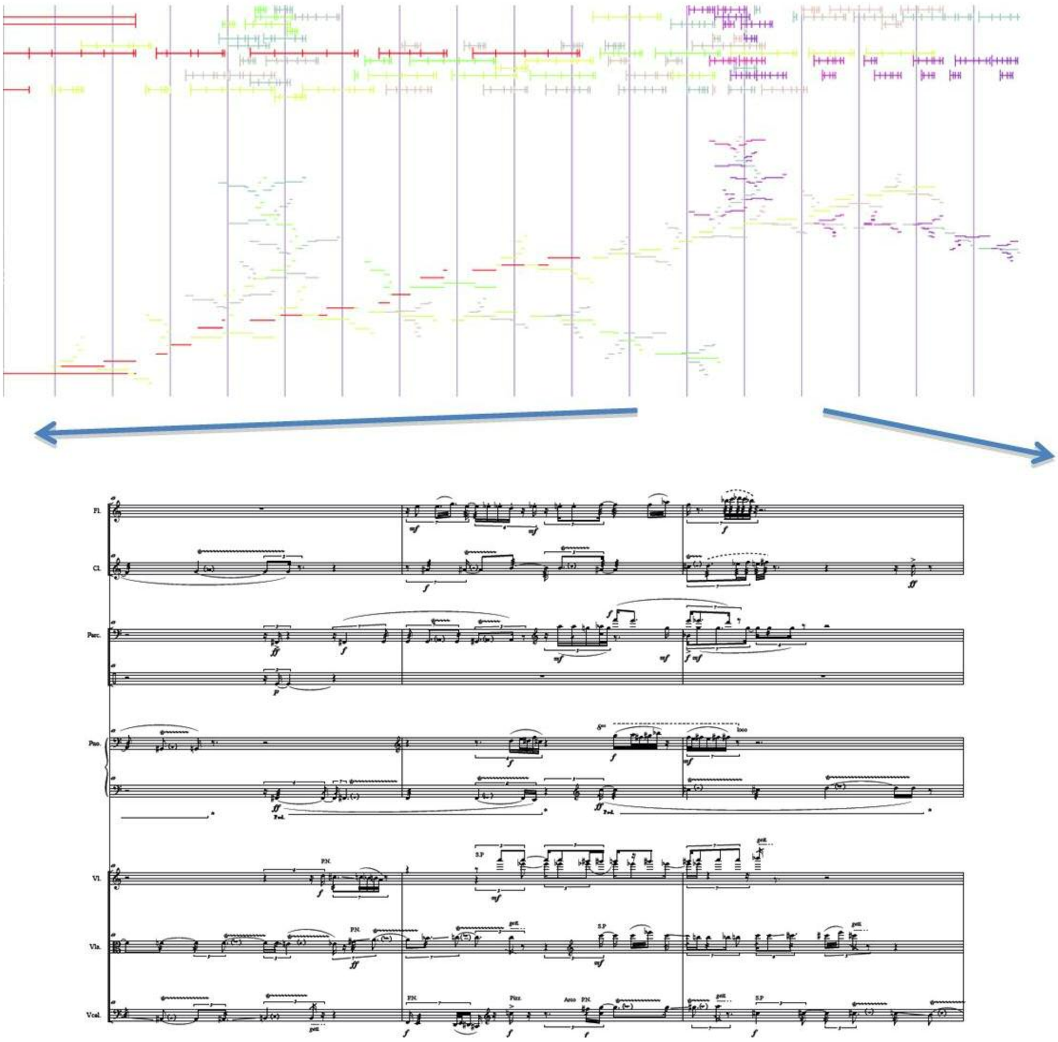
Con una iteración obtenemos la forma general:
AD+CF-BD-ABC+AD-CF-ABC+BD-libre (a)-DEF+CF

Otra forma interesante de utilizar los sistemas L es a través de convertir las cadenas de caracteres en gráficos y estos transcribirlos musicalmente en duraciones, alturas y dinámicas, tal como se muestra en la imagen que sigue y que pertenece a la sección 4 de la pieza *Tensas y rugosas huellas de espacio tiempo*. Allí se ha utilizado el significante:F+F[+F-F-F+F+F-F]-F[-F+F-F-F+F]+F-F y el axioma F[F]. Denominamos significante a una estructura de caracteres donde cada F del axioma será igual al significante.

Cada «F» del significante se traduce como adelantar un paso de *n* unidades en la dirección actual; «+» rota el ángulo preestablecido en *n* grados en sentido positivo; «-» igual, pero en sentido negativo; «[» abre rama y multiplica la distancia del paso por un escalar, en este caso < 1; «]» cierra la rama y regresa al punto donde se abrió retomando la escala que allí existía. Tras varias iteraciones del proceso se obtiene el siguiente gráfico.

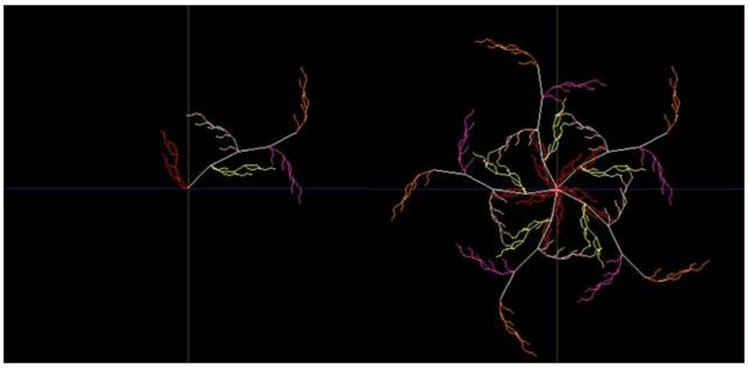


Con la ayuda del programa *Campos*© se vuelca el resultado a la partitura gráfica preparada para su transcripción a lenguaje musical tradicional y que se muestra en la imagen que sigue. Recordemos que en la parte superior de ésta tenemos las líneas instrumentales con sus correspondientes colores, que en este caso se corresponden a las distintas iteraciones y a códigos de color que se utilizan en el inicio del proceso. Estas tinciones nos permiten separar las estructuras y poderlas administrar posteriormente según las posibilidades de los instrumentos que van a recibirlas. En la segunda imagen que sigue se muestra los tres compases que delimitan las flechas en el gráfico previo una vez han sido transcritos al lenguaje tradicional y trabajados en partitura clásica.



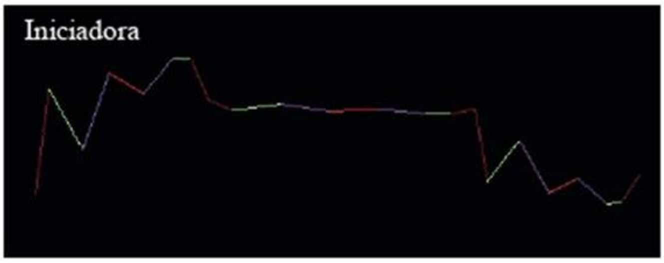
Tensas y rugosas huellas de espacio // ensemble:
https://www.youtube.com/watch?v=8U6jN6eDHQs

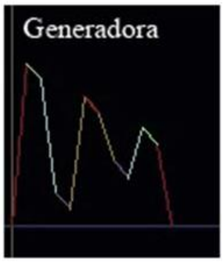
En el pequeño ejemplo que sigue, tomado de mi pieza para orquesta *Ad astra per aspera,* muestro cómo un sistema L ha sido relacionado con el grupo de simetría D5. Aquí, una estructura generada por un Sistema L (en la imagen de la izquierda), completa las posibilidades de rotación cíclica que ofrece este grupo (imagen de la derecha). Los resultados se distribuyen teniendo en cuenta un reparto instrumental que también sigue patrones relacionados con el D5.



## Ejemplo de cantorizaciones

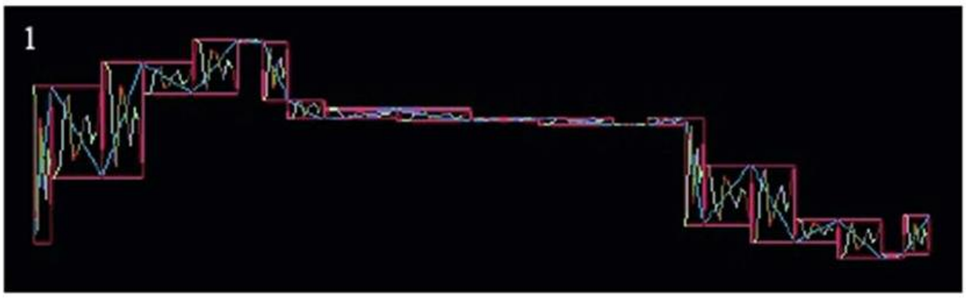
Para este tipo de construcciones utilizo la función *Fractal work-station* del programa *Campos*©. Se le da el nombre de cantorización porque este tipo de técnica parte, en cierto modo, del *Conjunto de Cantor*, aunque se ha ido mezclando con otras aportaciones. Una de ellas aparece en el libro *La geometría fractal de la naturaleza* de *B. Mandelbrot*. La idea que se toma de allí para construir un fractal parte de 2 objetos: Iniciadora y Generadora. La iniciadora actúa de molde donde la generadora tomará asiento pudiendo ambas dos coincidir. Las imágenes que siguen muestran un ejemplo de iniciadora y generadora.



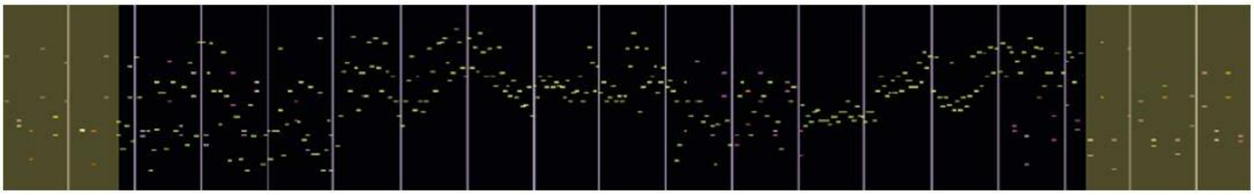

Seguidamente se muestran los rectángulos que se construyen entre cada dos puntos de la iniciadora (tomando la recta que los une como diagonal) sirviendo estos espacios de fronteras para introducir debidamente escalada la generadora. En la siguiente iteración se toma el resultado como iniciadora y se procede de igual forma. Lo que sigue es el resultado de la primera iteración utilizando los objetos anteriormente descritos.

**Iteración 1**



Es posible aplicar rotaciones múltiples y otros tipos de variación en el proceso con lo que se consiguen resultados muy distintos a partir de la misma iniciadora y generadora. Podríamos hacer que la iniciadora fuese una línea melódica de alguno de nosotros y la generadora un tema de Bach: ¿Cual sería el resultado?... Este procedimiento puede realizarse en capas múltiples de forma que una controle las alturas, otra las dinámicas, etc., fundiendo al final todos los mapas resultantes en una única estructura musical. Este tipo de técnica la utilizo constantemente en gran parte de mis obras, siempre con pequeños cambios que aportan frescura al procedimiento.

La imagen que sigue muestra una nube de puntos en la que confluyen varias técnicas, siendo una de ellas la que acabamos de comentar. Se trata de la representación gráfica de un tramo de la cadencia para saxofón soprano de *Laberinto de la noche*.



Laberinto de la noche // Saxophone concert small orcheschra an electronics // Video
https://vimeo.com/25022469

A continuación ofrezco direcciones de piezas disponibles en la red donde han sido utilizadas técnicas de este tipo.

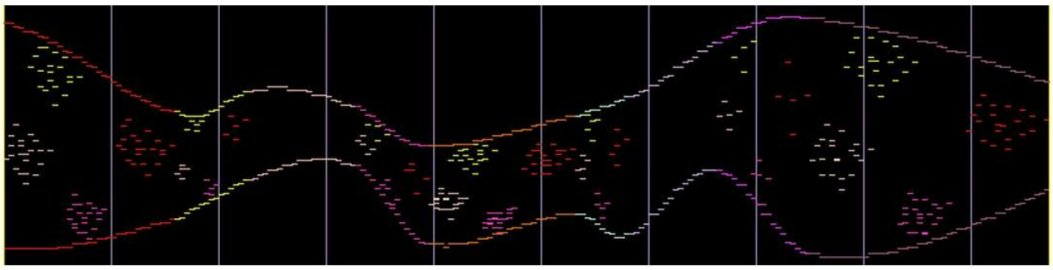
— Cinco poemas de Castro // Saxophone ,Voice and electronics// Video
https://www.youtube.com/watch?v=iRbrPd_JSHE
— Alma, buscarte has en mi// Video
https://www.youtube.com/watch?v=j6LoY9fgZ40

Otro tipo de fractal con el que he experimentado en el ámbito musical son los *I.F.S.* o Sistemas de Funciones Iteradas, y aunque no voy a mostrar ejemplos en el presente artículo sí doy una referencia en la red respecto a una pieza para orquesta donde se han utilizado *I.F.S.*

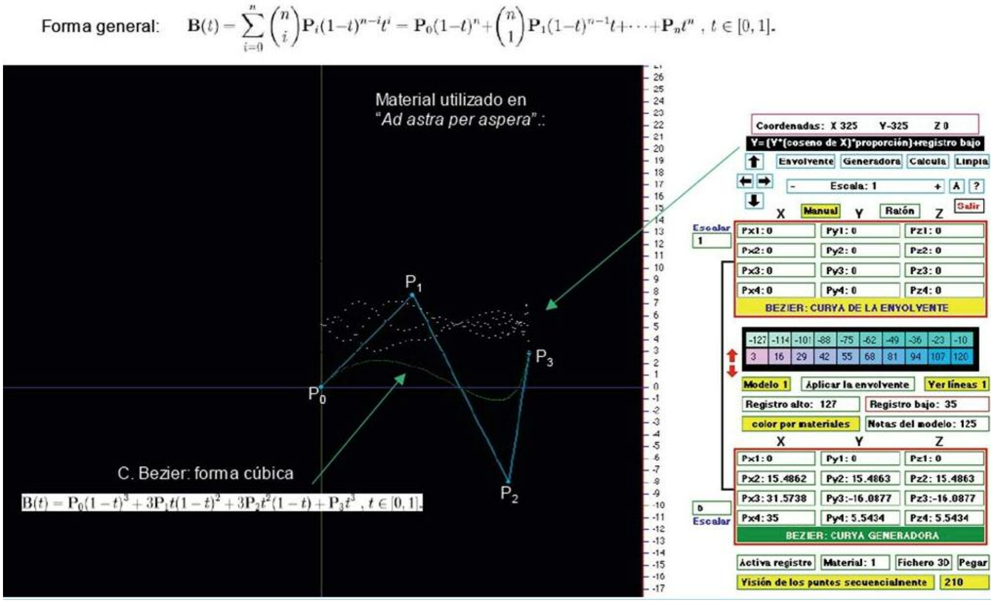
— Líneas de fuerza // Big orchestra // Video
https://www.youtube.com/watch?v=U9IOsrwjUZ4

## Ejemplo con Splines

Se trata de curvas diferenciables en porciones que se elaboran con polinomios de bajo grado. Los utilizo sobre todo para delimitar territorios de registro o como guías en interpolaciones entre una colección de notas. La colección de notas ha de verse como un conjunto de puntos que podrían pertenecer a una sola función. El ejemplo que sigue corresponde a un confinamiento de una arquitectura preexistente entre dos curvas de este tipo. Éstas se construyeron a partir de dos colecciones de puntos (notas): una para la curva superior y la otra para la inferior. El color de dichas curvas es cambiante e indica el dominio decada punto de la colección. Este material se utiliza en la pieza 3 del ciclo *Extraña espiral de luz*.



Siguiendo con este tipo de curvas, continuaremos con un pequeño ejemplo de curvas de *Bezier*. Este tipo de curvas las he utilizado en varias obras y siempre a partir de las funciones disponibles para ello que hay en el programa *Campos*©. Estas curvas pueden tratarse de varias formas: como generadoras de material musical en sí mismas o como, por así decir, moduladoras de otro material preexistente. En el ejemplo que sigue y que pertenece a la pieza de orquesta *Ad astra per aspera*,una función generadora produce un conjunto de puntos que se someten a una forma cúbica de curva de *Bezier* provocando, en la arquitectura primera, torsiones y deformaciones en base a la disposición de los cuatro puntos que conforman la polea. La imagen que sigue muestra el resultado de la función en el programa: de forma superpuesta aparece la forma general de estas curvas, así como la forma cúbica que utiliza el algoritmo. En la parte positiva de las abscisas tenemos la polea conformada por los puntos $P_0$, $P_1$, $P_2$ y $P_{3,}$ la curva que genera y cómo ha transformado el conjunto de puntos generados por la función $Y_f=$ $=(Y_i*\cos(X)*e)+d$, donde «e» es un escalar y «d» un desplazamiento en ordenadas.




## Conclusiones

Todos los modelos que vienen de la matemática son utilizables de una forma u otra en música: unos son idóneos para planificar las grandes estructuras, los procedimientos de acción, etc., tal como hemos podido intuir en los grupos de letras de un *Sistema L*; otros son excelentes para la elaboración de líneas melódicas o arquitecturas musicales concretas, debido a sus resultados picudos, cambiantes y no diferenciables como los que se producen con los fractales; otros, sin embargo, son idóneos para tratar los objetos anteriores y suavizarlos mediante contornos diferenciables o como diríamos musicalmente, extremadamente cromáticos. La interacción entre todo ello es algo mágico, pues todo proceso va dejando su huella en los resultados. La búsqueda y experimentación en música con todo tipo de modelos que ofrece la matemática es un vasto territorio en el que se han adentrado grandes compositores desde mediados del pasado siglo. Por otra parte el aumento de la potencia de cálculo en ordenadores personales ha favorecido la modelización y el fácil tratamiento de los datos hasta un nivel inimaginable años atrás y ello ha contribuido a cambiar radicalmente la forma de percibir la música, tanto la elaborada con procedimientos que utilizan la matemática, como la propia música escrita por los grandes clásicos.

## Referencias bibliográficas

Aunque algo antiguas, quisiera dar algunas referencia bibliográficas que fueron significativas para mí.

J. Barrallo Calonge: *Geometría fractal: algorítmica y representación*. Ediciones Anaya Multimedia, 1993.

M. de Guzmán, M.A. Martín, M. Morán, M. Reyes: *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Labor Matemáticas, Editorial Labor, 1993.

E.N. Lorenz: *The essence of chaos*. Traducción al castellano de F. Paez de la Cadena: *La esencia del caos*. Editorial Debate, 1995.

B. Mandelbrot: *The fractal geometry of nature*. Traducción al castellano de J. Llosa: *La geometría fractal de la naturaleza*. Metatemas 49, Tusquets Editores, 1997.

P. Smith: *Explaining Chaos*. Traducción al castellano de A. Resines y H. Bevia: *El caos: una explicación a la teoría*. Cambridge University Press, 2001.

I. Xenakis: *Musiques formelles. Nouvaux principes formels de composition musicale*. Editions Richard-Masse, 1963.

I. Xenakis: *Musique. Architecture*. Traducción al catalán de A. Bofill: *Música. Arquitectura*. Antoni Bosch Editor, 1982.