ENSEÑANZA DE LA GEOMETRÍA MEDIADA POR ARTEFACTOS: TEORÍA DE LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA

Leonor Camargo, Carlos Pérez[1], Tania Plazas, Patricia Perry, Carmen Samper y Óscar Molina
Universidad Pedagógica Nacional
lcamargo@pedagogica.edu.co, mathperez@gmail.com, tplazas@pedagogica.edu.co, pperryc@yahoo.com.mx, csamper@pedagogica.edu.co, ojmolina@pedagogica.edu.co

Esbozamos la Teoría de la Mediación Semiótica con la cual es posible estudiar y comprender el papel de un profesor que decide aprovechar las características que tienen diferentes herramientas, por ejemplo los programas de geometría dinámica, usadas como mediadoras para favorecer procesos de aprendizaje, desde un punto de vista sociocultural.

INTRODUCCIÓN

El interés por el estudio de la función de distintas herramientas o artefactos usados para mediar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el aula de matemáticas no es un asunto nuevo. En la literatura especializada se hallan diversos marcos de referencia y constructos analíticos para ahondar en dicha función (e.g., Lévy, 1990; Balacheff y Kaput, 1996; Meira, 1998; Guin y Trouche, 1999; Jones, 2000; Kieran y Yerushalmy, 2004; Borba y Villarreal, 2005). En particular, desde un punto de vista sociocultural, la Teoría de la Mediación Semiótica (TMS), formulada por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008), es una opción para estudiar y comprender el papel de un profesor que decide aprovechar las características de diferentes herramientas, como por ejemplo los programas de geometría dinámica, para favorecer procesos de aprendizaje.

Bajo la influencia de la corriente sociocultural del desarrollo cognitivo iniciada por Vygotsky, en la TMS se plantea que las herramientas usadas para resolver problemas o enfrentarse a una tarea de índole matemática no son sólo

[1] Becario de Doctorado en el Instituto de Investigación en Enseñanza de las Ciencias Naturales y la Matemática y profesor de la Universidad Nacional de Río Negro, Argentina. Doctorando en Ciencias de la Educación de la Universidad Nacional de Córdoba, Argentina. Invitado por el grupo $\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$ a hacer una pasantía entre enero y marzo de 2013.

Camargo, L., Pérez, C., Plazas, T., Perry, P., Samper, C. y Molina, Ó. (2013). Enseñanza de la geometría mediada por artefactos: teoría de la mediación semiótica. En P. Perry (Ed.), *Memorias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 85-96). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

apoyos para posibilitar o facilitar su realización. Ellas son fuente de significados relativos a los objetos matemáticos involucrados en la actividad. Es decir, no son neutras para la cognición del usuario, por cuanto portan convenciones y saberes que hacen parte del bagaje históricocultural de la sociedad e influyen el conocimiento que se logra con ellas. Bajo esa óptica, es responsabilidad del profesor, como representante de la comunidad académica de referencia, servir de mediador entre los significados que los estudiantes logren en el trabajo realizado con las herramientas y los significados matemáticos propios del saber institucional. Así, es parte fundamental del aprendizaje de las matemáticas el proceso en el que los significados personales de los estudiantes evolucionan hacia significados matemáticos, bajo la mediación del profesor. La misión del profesor requiere que él conozca de antemano el potencial de las herramientas que pondrá a disposición de los estudiantes, para hacer emerger significados en la actividad del estudiante. La TMS proporciona fundamentos conceptuales para una teoría de la enseñanza bajo esta óptica.

El interés de esta conferencia es esbozar la TMS e impulsar su divulgación en la comunidad de educadores matemáticos. Para ello, comenzamos por aludir al papel de los signos en el aprendizaje matemático y explicamos qué se entiende por potencial semiótico de un artefacto usado como mediador en el aprendizaje, pues la teoría se apoya en estos elementos conceptuales. Luego presentamos una síntesis de los principales aspectos de la TMS (Bartolini-Bussi y Mariotti, 2008) y asociamos tal teoría con la aproximación metodológica propuesta por Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry (en evaluación).

ACERCA DE LOS SIGNOS Y EL APRENDIZAJE

La TMS basa sus planteamientos sobre los signos en la perspectiva vygotskiana, según la cual éstos son objetos cognitivos (herramientas psicológicas) que, de la misma forma como las herramientas materiales, desempeñan una función mediadora entre el individuo y su contexto, al ser portadores del pensamiento de las personas y al mismo tiempo del saber cultural. De esta manera, el aprendizaje ocurre en una actividad social mediada por herramientas, en la cual emergen signos que posibilitan la comunicación con los demás y con uno mismo. Los signos explicitan los significados individuales (*significados personales*) relativos a los objetos matemáticos involucrados. Estos significados personales pueden evolucionar hacia significados socialmente compartidos por una comunidad de referencia (*significados matemáticos*), gracias a la mediación de un experto representante de ésta, que reconoce en los signos asociados a los significados personales algo del saber institucional o cultural que portan y realiza una gestión comunicativa tendiente a tal evolución.

Los signos son objetos cognitivos de variada índole como gestos (e.g., movimiento del dedo índice de la posición vertical hasta la horizontal representando la rotación de un rayo sobre su origen para generar un ángulo recto), íconos (e.g., la notación geométrica usada para nombrar el rayo AB), índices (e.g., la traza dejada por un punto que se mueve en la pantalla), palabras o textos (e.g., un enunciado, un argumento), objetos físicos (e.g., un compás) que encapsulan la experiencia personal y hacen explícitos los significados personales. Los tipos de signos de los ejemplos con los que ilustramos las ideas en esta conferencia son: (i) figura construida en un programa de geometría dinámica, como Cabri (acompañada del informe escrito que recuenta la construcción realizada) (de aquí en adelante signo-figura), y (ii) enunciado de contenido matemático (de aquí en adelante signo-enunciado).

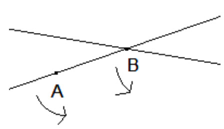
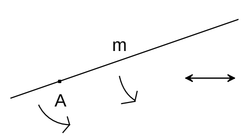
Estudiante	**Recuento de acciones hechas con Cabri**	**Signo-enunciado**	**Significados personales relativos a…**	**Significados matemáticos en torno a…**
Paula	 Construí dos puntos y luego la recta sobre los puntos. Exploré, arrastrando los puntos A y B y construyendo otra recta que pasa por el punto B.	Concluí que: si A y B son dos puntos entonces pertenecen a una única recta.	La relación entre puntos y recta.	Postulado de la recta.
Pablo	 Construí una recta a partir de un punto A. Exploré moviendo la pantalla tratando de buscar que la recta tuviera un fin, cambiando la posición de la recta m y del punto A.	Concluí que: Dada una recta m y $A \in m$, si A se mueve entonces m se mueve.	Características de recta.	Postulado: una recta es un conjunto no vacío de puntos. Teorema: dado un punto hay infinitas rectas que lo contienen.

Tabla 1: Signos producidos por estudiantes en el curso de una actividad mediada por Cabri

En la Tabla 1 presentamos dos signos-enunciado formulados por estudiantes universitarios de un curso de geometría euclidiana plana a quienes se les propuso la siguiente tarea: “Construir una recta, usando el programa Cabri y reportar lo que se descubre acerca de los objetos geométricos involucrados”. Con esta actividad se esperaba que la discusión sobre los resultados de la tarea diera lugar a hechos geométricos con los cuales comenzar la formación de un sistema teórico. En la segunda columna de la tabla se encuentra el informe de Paula y Pablo sobre las acciones hechas en Cabri. En la tercera columna está el signo-enunciado asociado a tal actividad. En la cuarta, expresamos en forma sucinta nuestra interpretación de los significados personales que entrevemos en los signos. Desde nuestro punto de vista, estos tienen que ver con, entre otras cosas, la interpretación que los estudiantes dan a los objetos o relaciones de índole matemática, su conocimiento declarativo acerca de tales objetos o relaciones, del estatus y del uso que tienen éstos en el marco de una teoría. En la quinta columna escribimos los significados matemáticos que quisiéramos que los estudiantes interiorizaran.

Como lo señala Mariotti (2009), en una tarea específica propuesta por el profesor, los signos producidos tienen un fuerte vínculo con las acciones realizadas usando las herramientas y se pueden aprovechar en la enseñanza si se procura su explicitación y socialización. En nuestro trabajo investigativo buscamos tal explicitación solicitando la formulación de conjeturas (signo-enunciado), cuando nos enfocamos en el aprendizaje de lo que es un teorema en el sentido de Mariotti, Bartolini-Bussi, Boero, Ferri y Garuti, (1997). Esto hace que acompañemos los problemas propuestos con la instrucción de formular una conjetura. Por ejemplo, planteamos tareas como: “Estudie, con el apoyo de Cabri, la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes. Describa el proceso de construcción y exploración y formule una conjetura”. La resolución de la tarea da lugar a varios signos, por ejemplo, las figuras hechas en el programa de geometría dinámica, el texto que recuenta la construcción y la exploración realizada, y signos-enunciado como: *Las alturas de un triángulo equilátero son congruentes*, y *Si dos alturas de un triángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles*. Alrededor de estos signos se promueven conversaciones instruccionales (Perry, Samper, Molina, Camargo y Echeverry, 2012) en las que se orienta la evolución de los significados personales acerca de propiedades particulares de los triángulos isósceles hacia los significados matemáticos.

ACERCA DEL POTENCIAL SEMIÓTICO DE LOS ARTEFACTOS EN EL APRENDIZAJE

Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) emplean la expresión "potencial semiótico de un artefacto" usado en la enseñanza, para referirse al doble vínculo semiótico de la herramienta con, por una parte, los significados personales que surgen al usarla para realizar una tarea, y por otra, los significados matemáticos evocados por su uso, que un experto puede reconocer. En ese sentido, la TMS reconoce el papel de las herramientas en el aprendizaje y destaca la mediación del profesor al gestionar el doble vínculo mencionado. Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) señalan que cualquier artefacto puede ofrecer un potencial semiótico valioso, con respecto a metas educativas particulares. Cuando este potencial se aprovecha para hacer un acercamiento a un objeto o proceso matemático, gracias a un estudio cuidadoso de las cualidades y restricciones del artefacto, éste se convierte en instrumento para el aprendizaje.

El proceso mediante el cual un artefacto, en las manos de un sujeto, llega a ser instrumento lo denomina Rabardel (1995/2011), en su teoría de la actividad instrumentada, *génesis instrumental*. Implica la constitución de una entidad mixta, llamada instrumento, que involucra los tres elementos principales de la actividad instrumentada: el sujeto, el artefacto y el objeto de la actividad. Por ejemplo, un piano (artefacto) es un instrumento en las manos de un músico (sujeto) cuando interpreta una pieza musical (objeto de la actividad). Un instrumento tienen dos componentes: (i) *artefactual*, que tiene que ver con las características propias de la herramienta o partes de ésta; y (ii) *cognitivo*, que tiene que ver con los esquemas de utilización del sujeto cuando usa la herramienta al enfrentarse a una tarea específica.

La noción de esquema de utilización la desarrolla Rabardel (1995/2011) a partir de la noción de *esquema operativo* de la teoría de Piaget y de la noción de *esquema* de Vergnaud (1996) y, en ese sentido, es un constructo que refiere a la organización del pensamiento, más o menos estable, que determina el comportamiento de un sujeto en una clase de situación específica en la que se usa un artefacto. Un esquema de utilización determina las formas específicas como el sujeto manipula el artefacto o lo adecúa a sus fines personales (*esquemas de uso*) que están asociadas con aspectos de índole técnico; también determina las formas de uso referidas a la resolución de la tarea (*esquemas de acción instrumentada*). En ambos tipos de esquemas están presentes los componentes artefactual y cognitivo.

Rabardel no desarrolló la noción de esquema de utilización centrando la atención en el aprendizaje en un contexto educativo. La noción alude a organizaciones mentales y no es posible recurrir directamente a ellas en la enseñanza. Pese a ello, autores como Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) destacan que la contraparte observable de los esquemas, es decir, las acciones que se llevan a cabo con el artefacto y los signos derivados de la acción instrumentada (el reporte de las acciones, las figuras, los enunciados, etc.) aportan una base conceptual útil cuando se quiere explicar el aprendizaje mediado por artefactos. Por esta razón, Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) proponen un recurso didáctico que consiste en exigir a los estudiantes el recuento escrito del proceso de resolución de la tarea o problema con el uso del artefacto, del cual pueden inferirse los esquemas de utilización que se pusieron en juego e identificar, en las acciones y los signos, los significados personales que tienen de los objetos que surgen en el proceso. Tan pronto como los signos derivados del uso del artefacto son comunicados, mediante alguna forma de representación externa, los significados personales se pueden compartir y el profesor puede promover su evolución hacia significados matemáticos, a partir de una reconstrucción social de los signos. Específicamente, permiten allegar razones asociadas al uso del instrumento de las discrepancias entre las actuaciones de los estudiantes y las expectativas de los profesores, respecto del saber matemático. En ese sentido, la construcción de conocimiento se ve como una consecuencia de la actividad instrumentada en la que los signos se reconstruyen y sus significados evolucionan en la interacción social.

Para ilustrar lo dicho hasta ahora, consideremos el potencial semiótico de un ábaco para el aprendizaje del sistema de numeración decimal, explicado por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). Este artefacto antiguo, construido y usado para contar y realizar operaciones numéricas, porta el saber cultural de la humanidad sobre el sistema de numeración posicional. Su uso en la escuela, involucra aprender a manipularlo para representar números y usarlo para hacer operaciones, principalmente la adición. La acción instrumentada da lugar a esquemas de utilización como el agrupamiento y el remplazo de conjuntos de fichas por otras que representan un orden superior, como también al surgimiento de signos que hacen explícitos los significados personales de los niños acerca del valor posicional y del algoritmo de la adición.

El análisis de un programa de geometría dinámica en términos de su potencial semiótico es un poco más complejo que el del ábaco, porque en el proceso de génesis instrumental, el componente artefactual puede ser el programa en su totalidad o algunas de sus partes o funciones. El diseño y funcionamiento de este tipo de programas, pretende hacer ostensivas características y propiedades de objetos de la geometría euclidiana plana, pero su uso en la enseñanza se ha extendido a otros dominios como el álgebra y el cálculo. La función que caracteriza este tipo de programas es el arrastre, que posibilita diversas y variadas actividades instrumentadas, pues permite manipular las figuras representadas en la pantalla como si fueran objetos físicos. En nuestra actividad investigativa hemos usado Cabri para que los alumnos reconstruyan y precisen el significado de proposición condicional pues gracias al arrastre se hacen evidentes las relaciones de dependencia entre propiedades. Un análisis cuidadoso del proceso de resolución de los problemas que les proponemos a los estudiantes, nos ha llevado a inferir esquemas de utilización. A continuación, se ejemplifican solamente las acciones instrumentadas correspondientes a cada parte (A, B y C) de uno de los esquemas.

A) Determinar un invariante

- Hacer una construcción blanda de la figura sobre la cual se quiere estudiar las condiciones que impone el enunciado del problema o hacer una construcción robusta de ejemplos especiales de la figura sobre la cual se quiere estudiar una propiedad.
- Enriquecer la figura con información relevante (medir, usar color, poner marcas de congruencia, etc.).
- Arrastrar hasta obtener un ejemplo especial de la figura a la que se refiere el enunciado del problema o comprobar si la propiedad solicitada se da.
- Verificar el cumplimiento de una propiedad, mediante una construcción robusta, en caso de que no se haya hecho previamente.
- Si es necesario, repetir los pasos cuatro pasos anteriores.

B) Formular una proposición condicional que reporte el invariante descubierto como antecedente para las condiciones impuestas en la construcción

C) Corroborar la conjetura.

LA MEDIACIÓN SEMIÓTICA DEL PROFESOR

La TMS provee elementos para describir e interpretar el tratamiento que el profesor hace de los signos producidos por los estudiantes, derivados del uso de un artefacto, para el desarrollo del contenido matemático en la clase y la apropiación de significados matemáticos. Desde el punto de vista de esta teoría, no todos los signos producidos por los estudiantes son aprovechables de la misma manera. El uso que el profesor hace de éstos, con la conciencia que tiene del potencial semiótico del artefacto, depende del nexo que él entrevea entre los signos y las acciones llevadas a cabo con el uso del artefacto, o entre los signos y el conocimiento matemático en juego, en el contexto de una actividad específica. Si el primer nexo es más fuerte, lo considera como *signo del artefacto*, y en caso contrario, como *signo matemático*.

Por ejemplo, en una situación de exploración de una construcción en la que se tienen dos rayos opuestos *BA* y *BC,* otro rayo *BD* y las bisectrices de los ángulos *ABD y DBC,* una conjetura reportada por un estudiante que el profesor puede usar como signo del artefacto es la siguiente*: siempre que arrastro, la posición del rayo BD no importa ya que la medida del ángulo formado por las bisectrices es siempre igual*; y otra conjetura que puede usar como un signo matemático es ésta: *el ángulo formado por las bisectrices de ángulos que son par lineal es recto*. Pero también es posible que el profesor entrevea en un signo un carácter bidireccional que relaciona la experiencia de los estudiantes con el artefacto y el conocimiento matemático al que se espera que lleguen y, por ende, que éste pueda ser *pivote* entre significados asociados al artefacto y significados matemáticos. Un ejemplo de esto es: *el ángulo formado por las bisectrices siempre es recto.* En ese sentido, los signos que el profesor considera como *pivote* son los que tienen mayor opción de ser aprovechados para mediar en la evolución de los significados.

Los *signos pivote* pueden ser usados por el profesor de dos formas:

- Como andamio para hacer evolucionar los significados personales y subjetivos involucrados en los *signos del artefacto*, que están estrechamente relacionados con su experiencia directa con el artefacto, hacia significados *matemáticos*.
- Como referente de significado para aquellos significados personales involucrados en los *signos matemáticos*, que tienen estrecha relación con el conocimiento matemático pero que pueden no haber sido fruto

de un proceso de construcción significativa y requieren un contexto situacional que favorezca la negociación de significados. Los signos matemáticos están asociados al universo teórico que corporeiza el artefacto y constituyen la meta de la mediación semiótica del profesor, quien busca una construcción colectiva de su significado.

Bartolini-Bussi y Mariotti (2008) y Mariotti (2009) consideran necesario diseñar actividades para la clase que permitan sacar provecho del potencial semiótico de los artefactos para la mediación semiótica. En este sentido, sugieren un ciclo didáctico que estimula la producción individual y colectiva de signos, identificables por el profesor y con los que es posible la mediación. El ciclo se concibe como una secuencia de actividades que comienza con una tarea en cuya realización los estudiantes usan el artefacto, continúa con una tarea en la que se pide un texto que informe su actividad, y termina con actividades colectivas en las que el profesor se responsabiliza de hacer evolucionar los significados asociados a los signos. Por último, él focaliza la discusión en el uso del artefacto y solicita elaborar una síntesis del proceso seguido. En todo caso, el proceso de mediación semiótica del profesor se apoya en la experiencia vivida por los estudiantes, en sus observaciones y formulaciones, derivadas de la resolución de la tarea, para dar sentido a los enunciados matemáticos que emergen.

Desde 2007, el grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría *(Æ·G)* de la Universidad Pedagógica Nacional, Colombia, viene implementando y evaluando una aproximación metodológica para favorecer el aprendizaje de la demostración, que guarda relación con el ciclo didáctico propuesto por Bartolini-Bussi y Mariotti (2008). En esta aproximación:

- Los estudiantes, en grupos pequeños, resuelven un problema abierto, con el apoyo de Cabri.

- Los estudiantes reportan el proceso llevado a cabo y proponen conjeturas resultado de la resolución. Este reporte se hace simultáneamente con la resolución (a diferencia del ciclo didáctico que promueve una reflexión retrospectiva).

- El profesor retoma colectivamente el trabajo con el artefacto para permitir que los estudiantes (a) se sitúen en contexto y (b) relaten su experiencia. Ello permite una nueva explicitación, por parte de los estudiantes, de los signos que surgieron al resolver la tarea, con el apoyo del instrumento, y que pueden ser usados en la mediación.

- El profesor promueve la exposición de las acciones y observaciones de los alumnos para (a) analizar el uso del instrumento, (b) analizar la información emergente de la exploración y (c) posibilitar un proceso empírico de validación o invalidación de los signos producidos.

- El profesor identifica privadamente qué signos-conjetura, aceptados por el grupo, usará como *del artefacto, pivote* o *matemático.* También colige los significados personales que pueden estar detrás de los signos.

- El profesor usa los signos que considera *pivote* como andamio para favorecer la evolución de los significados personales. Para ello, busca relacionar los signos, o parte de ellos, con aspectos matemáticos e impulsa la apropiación del discurso matemático, como género (uso de términos y expresiones propias, sentido de generalidad de las conjeturas, estructura de los enunciados, etc.).

- El profesor usa los signos que considera como *matemáticos* para establecer relaciones entre éstos y un contexto situacional que favorezca la negociación de significados.

- El profesor promueve la reconstrucción de los signos, a partir de los significados matemáticos.

CONCLUSIONES

La Teoría de la Mediación Semiótica nos ofrece un panorama de la clase de matemáticas en el que se promueve la construcción de conocimiento por medio de una rica producción de signos, por parte de los estudiantes. A partir de diseños cuidadosamente previstos, en los que se tiene en cuenta el potencial semiótico de los artefactos que se usan en la clase y se favorece la comunicación de los significados personales acerca de los objetos matemáticos involucrados en la actividad, el profesor conduce la discusión hacia los objetos o procesos matemáticos que son el objetivo de la enseñanza.

Para sacar provecho de la TMS conviene realizar esfuerzos colectivos para generar, implementar y evaluar propuestas didácticas fundamentadas en ella y socializar los resultados. Esta teoría aporta elementos conceptuales para lograr hacer de las aulas de clases, ámbitos de participación legítima de los estudiantes y espacios de construcción de comunidades de aprendizaje efectivos.

Desde la perspectiva de la TMS, sería una cuestión de utilidad para los profesores de los distintos niveles educativos, contar con un repertorio de análisis del potencial semiótico de los distintos artefactos de tecnología digital usados hoy para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, por cuanto les proveería herramientas conceptuales y de trabajo importantes para su labor de enseñanza.

De manera análoga al modelo de van Hiele, que en los años 1980 centró el foco de interés en el razonamiento de los estudiantes cuando se enfrentan al aprendizaje de la geometría, y describió un modelo para organizar la enseñanza a partir de fases, la TMS permite analizar la enseñanza, cuando la actividad está mediada por un artefacto, desde una perspectiva sociocultural.

REFERENCIAS

Balacheff, N. y Kaput, J.J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A.J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, y C. Laborde, (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 429-501). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Bartolini-Bussi, M.G. y Mariotti, M.A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. En L. English, M.G. Bartolini-Bussi, G. Jones, R. Lesh y D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (segunda edición revisada; pp. 746-783). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum.

Borba, M.C. y Villarreal, M.E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. New York, EUA: Springer.

Guin, D. y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computer for Mathematical Learning*, 3, 195-227.

Jones, K. (2000, marzo). *The mediation of mathematical learning through the use of pedagogical tools: A sociocultural analysis*. Ponencia invitada en la conferencia Social Constructivism, Socioculturalism, and Social Practice Theory: Relevance and rationalisations in mathematics education, Gausdal, Noruega. Recuperado de http://eprints.soton.ac.uk/41272/1/Jones_Mediation_by_Tools_2000.pdf

Kieran, C. y Yerushalmy, M. (2004). Research on the role of technological environments in algebra learning and teaching. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The fu-*

ture of the teaching and learning of algebra: *The 12th ICMI Study* (pp. 99-152). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Lévy, P. (1990). *Les technologies de l'intelligence: l'avenir de la pensée à l'ère informatique*. París, Francia: La Découverte.

Mariotti, M.A. (2009). Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: The role of the teacher. *ZDM*, *41*(4), 427-440.

Mariotti, M.A., Bartolini-Bussi, M.G., Boero, P., Ferri, F. y Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: From history and epistemology to cogniton. En E. Pehkonen (Ed), *Proceedings of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 180-195). Lahti, Finlandia: Lahti Research and Training Center, University of Helsinki.

Meira, L. (1998). Making sense of instructional devices: The emergence of transparency in mathematical activity. *Journal for Research in Mathematics Education, 29*(2), 121-142.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo. L. y Echeverry, A. (en evaluación). *Actividad instrumentada y mediación semiótica: dos teorías para describir la conjeturación como organizador curricular*.

Perry, P., Samper, C., Molina, Ó., Camargo. L. y Echeverry, A. (2012). La geometría del ángulo desde otro ángulo: una aproximación metodológica alternativa. *Epsilon*, 82, 41-56.

Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías* (Martín Acosta Gempeler, Tr.). Bucaramanga, Colombia: Fondo Editorial Universidad Industrial de Santander (primera edición en francés, 1995).

Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. En L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-240). Mahwah, EUA: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.