De la Geometría Euclídea a la Hermítica

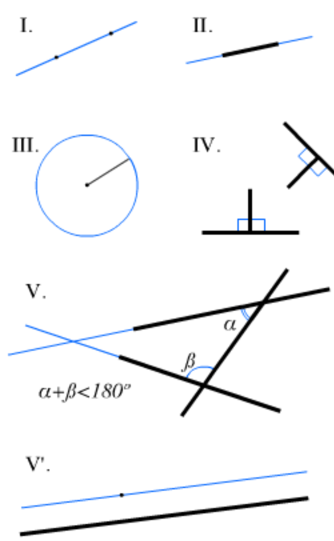
por

Adela Latorre

(Universidad de Zaragoza)

El estudio de la Geometría es algo habitual en las aulas de primaria y secundaria. Desde pequeños nos enseñan unos conceptos básicos y sencillos, normalmente basados en la propia intuición, que nos ayudan a desenvolvernos en el mundo real, como que la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta o que dos rectas paralelas nunca se cortan. Estas ideas se basan en los llamados *axiomas de Euclides,* que fueron la base de la Geometría durante cientos de años:

i. Por dos puntos diferentes pasa una sola línea recta.
ii. Un segmento rectilíneo siempre puede ser alargado.
iii. Dados un centro y un radio, estos determinan una única circunferencia.
iv. Todos los ángulos rectos son iguales.
v. Si una recta corta a otras dos de manera que los ángulos interiores que se forman a un lado de la recta secante suman menos que dos ángulos rectos, entonces las dos rectas se cortan al alargarlas por ese mismo lado.



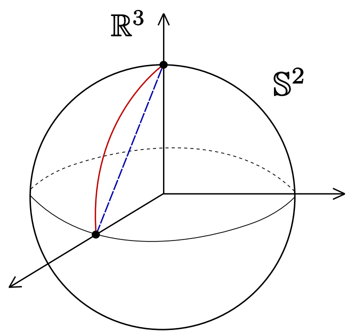
Fuente: Wikipedia

Además, este quinto postulado se puede enunciar equivalentemente como:

v'. Por un punto exterior a una recta se puede trazar una única paralela.

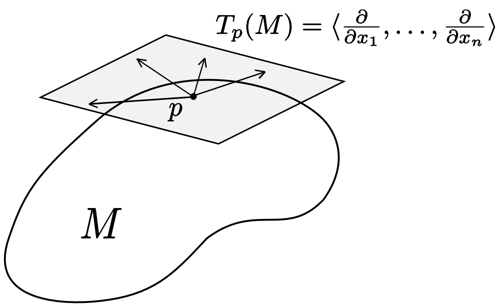
Parece evidente que todos ellos se cumplen en nuestro espacio tridimensional habitual, ¿pero estamos realmente seguros? Pensemos en la Tierra. Según Euclides, para ir de Zaragoza a Sydney por el camino más corto... ¡necesitaríamos cavar un túnel! Claramente, esta no parece la mejor opción.

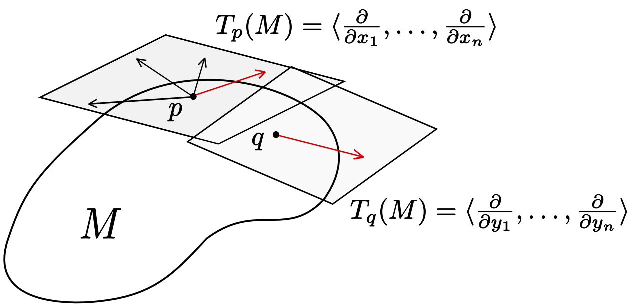
El problema reside en pensar que estas dos ciudades son puntos de $\mathbb{R}^3$, sin tener en cuenta que en realidad están situadas sobre la superficie de una esfera $\mathbb{S}^2$ que no es posible atravesar. Es decir, para desplazarnos de un lugar a otro la coordenada altura/profundidad no juega ningún papel. Sin embargo, tampoco es posible asumir que estamos en un plano, ya que la Tierra no lo es. La Geometría Diferencial da el marco adecuado para entender este tipo de situaciones.

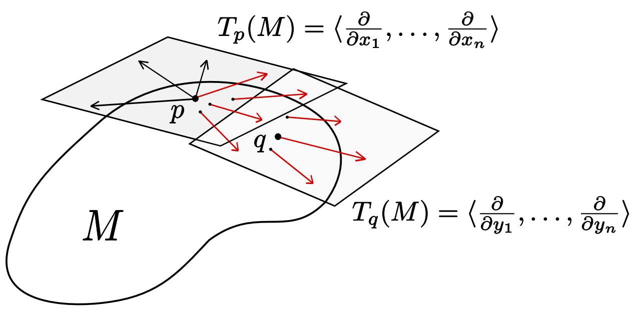


En esta rama de las Matemáticas ya no se trabaja directamente en $\mathbb{R}^m$, sino en espacios que localmente se parecen a $\mathbb{R}^m$. Esto es, para ir de casa al trabajo es posible asumir que estamos en $\mathbb{R}^2$ pero no si queremos visitar Australia. Estos espacios reciben el nombre de *variedades diferenciables* y aunque su definición está basada en una idea local, existe toda una teoría que nos ayuda a estudiarlas globalmente.

En cada punto de una variedad diferenciable de dimensión m podemos considerar el espacio tangente, que es isomorfo a $\mathbb{R}^m$. De entre todos los vectores contenidos en este espacio, elegimos uno y hacemos lo mismo en cada uno de los espacios tangentes a los distintos puntos de la variedad. No obstante, no todas las posibles elecciones son de utilidad. Nos interesa que al hacer la construcción se cumpla que al pasar de un punto p a otro punto q lo suficientemente próximo, el vector elegido en p varíe suavemente hasta encajar con el elegido en q:





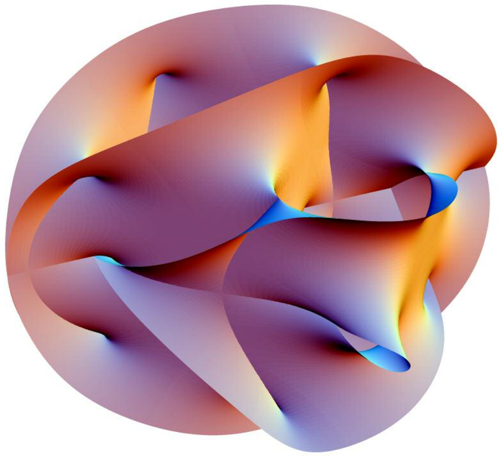


Cuando tal condición se cumple para todos los puntos, obtenemos lo que se conoce como un *campo de vectores diferenciable*. Los objetos con los que trabajamos son precisamente estos, pues nos permiten mirar la variedad en su conjunto de una manera bastante cómoda y manejable. De hecho, las *métricas* pasan a definirse sobre el conjunto de los campos de vectores diferenciables de la variedad dada, y no directamente sobre la variedad. El concepto de *línea recta* se sustituye por el de *geodésica*, y se alcanzan resultados tan bien conocidos como que los caminos más cortos en la esfera $\mathbb{S}^2$ vienen dados por circunferencias máximas, que son aquellas determinadas por el corte de la esfera por cualquier plano que contiene a su centro. Este tipo de Geometría, llamada Riemanniana en honor al conocido matemático alemán, ha jugado un papel fundamental en el siglo XX. Entre algunos de sus logros, cabe destacar el haber proporcionado la base matemática adecuada para el desarrollo de la Teoría de la Relatividad, según la cual la luz se movería por el universo a lo largo de geodésicas.

Ahora bien, hasta ahora hemos manejado objetos reales, ¿pero qúe pasa si entramos en el ámbito de la Geometría Compleja? Resulta que es posible definir el concepto de *variedad compleja* de una manera análoga al de variedad diferenciable, solo que sustituyendo $\mathbb{R}$ por $\mathbb{C}$. Aunque estas dos nociones de variedad puedan parecer independientes, lo cierto es que están íntimamente ligadas. Al igual que todo número complejo $a + bi$ nos proporciona dos números reales a y b, toda variedad compleja de dimensión n admite estructura de variedad diferenciable de dimensión $m = 2n$. La primera cuestión que surge es evidente: ¿es también cierta la otra implicación? Esto es, ¿toda variedad diferenciable de dimensión par admite estructura de variedad compleja? Aquí es donde todo empieza a complicarse. Sin ir más lejos, se sabe que las esferas $\mathbb{S}^2$ y $\mathbb{S}^4$ se pueden ver como variedades complejas, pero no aquellas $\mathbb{S}^m$ con $m \geq 8$ par. Para el caso de $\mathbb{S}^6$ el problema está en un punto muy interesante, ya que algunos resultados recientes afirman que sí [4] mientras que otros apuntan a que no [2]. La comunidad matemática todavía no se ha puesto de acuerdo acerca de cuál es la respuesta correcta. Volviendo a la cuestión general que hemos planteado, se sabe que la clave reside en construir un endomorfismo J en el conjunto de los campos de vectores diferenciables que cumpla $J^2 = -id$, siendo id la identidad, junto con una condición extra dada por el Teorema de Newlander-Nirenberg. De hecho, gracias a este teorema toda variedad compleja de dimensión n pasa a estar dada por un par (M, J), donde M es una variedad diferenciable de dimensión $2n$ y J es una aplicación del tipo que hemos descrito y que recibe el nombre de *estructura compleja*. Así, la construcción de estas J constituye el paso previo al estudio de las variedades complejas.

Pasemos ahora al tema de las métricas. Puesto que M es una variedad diferenciable, podemos tomar una métrica Riemanniana sobre ella. Sin embargo, esta no tiene por qué ser compatible con la estructura de variedad compleja que induce J. Cuando tal compatibilidad se da, la métrica también puede verse en términos complejos y entramos así en la rama de la Geometría Hermítica. Una parte importante de esta área consiste en buscar métricas de este tipo que cumplan determinadas condiciones adicionales. Con esto, separamos el conjunto de las métricas Hermíticas en distintas clases como *Kähler, balanced, SKT, Gauduchon generalizadas*… algunas de las cuales juegan un papel fundamental en ciertos campos de la Física Teórica, como la Teoría de Cuerdas [7]. Además, no solo interesan cuestiones relativas a la existencia de dichas métricas, sino también las relaciones que pueda haber entre ellas.

Una parte importante de la investigación que estamos llevando a cabo en Zaragoza se enmarca en este ámbito de la Geometría Compleja. En el caso de mi tesis doctoral [5], nuestro punto de partida fueron las llamadas *nilvariedades,* variedades diferenciables N que poseen muy buenas propiedades gracias a su peculiar estructura. Como se ha podido apreciar con el ejemplo de las esferas, resulta que la construcción de estructuras complejas no es una tarea fácil. Sin embargo, el problema puede simplificarse en el caso de las nilvariedades cuando se consideran aquellas J de un tipo especial llamado *invariante.* Estas estructuras han sido ampliamente estudiadas en nilvariedades de dimensiones 4 y 6 (ver [1], [3], [6], entre otros), pero las técnicas empleadas no pueden aplicarse a dimensiones mayores. Por este motivo, en la tesis se desarrolló un nuevo procedimiento que permitió construir todos los pares (N, J) con N de dimensión 8 y J invariante, consiguiendo así un extenso abanico de variedades complejas hasta ahora desconocidas. A partir de ellas se estudiaron varios tipos de métricas Hermíticas, obteniendo resultados bastante sorprendentes en cuanto a propiedades y coexistencia entre ellas. Esto nos ha llevado a seguir analizando a día de hoy otros aspectos de estos espacios, con la esperanza de poder dar respuestas a otras preguntas y conjeturas que aún siguen abiertas en este campo.



Las variedades Calabi-Yau son variedades complejas que admiten metricas Kähler
Fuente: Wikipedia

Referencias bibliográficas

[1] A. Andrada, M.L. Barberis, I. Dotti, «Classification of abelian complex structures on 6dimensional Lie algebras», *J. Lond. Math. Soc. (2)* 83 (2011), no. 1, 232–255 [Corrigendum: J. Lond. Math. Soc. (2) 87 (2013), no. 1, 319–320].

[2] M. Atiyah, *The non-existent complex 6-sphere,* arXiv:1610.09366 (2016).

[3] M. Ceballos, A. Otal, L. Ugarte, R. Villacampa, «Invariant complex structures on 6-nilmanifolds: classification, Frölicher spectral sequence and special Hermitian metrics», *J. Geom. Anal.* 26 (2016), no. 1, 252–286.

[4] G. Etesi, *Explicit construction of the complex structure on the six dimensional sphere,* arXiv:1509.02300 (2015).

[5] A. Latorre, *Geometry of nilmanifolds with invariant complex structure,* Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, 2016.

[6] S.M. Salamon, «Complex structures on nilpotent Lie algebras», *J. Pure Appl. Algebra* 157 (2001), no. 2-3, 311–333.

[7] A. Strominger, «Superstrings with torsion», *Nuclear Phys. B* 274 (1986), no. 2, 253–284.