

LA IMAGEN CONCEPTUAL EN EL APRENDIZAJE DE LA NOCIÓN DE CONTINUIDAD DE FUNCIONES

Alberto Formica¹; Mabel Rodríguez¹; Ana María Torres²

¹Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS).

²Universidad Nacional de Luján (UNLu).

aformica@ungs.edu.ar, mrodri@ungs.edu.ar, atorres@mail.unlu.edu.ar

Resumen

Este trabajo sintetiza una investigación cualitativa centrada en el Enfoque Cognitivista. Allí, se han estudiado dificultades de aprendizaje del concepto de continuidad en relación con la imagen conceptual. Los alumnos involucrados, estudiantes de ingeniería de la Universidad de Luján, han construido una imagen conceptual de lo continuo, que se manifiesta mediante una representación gráfica sin interrupciones o algo que sucede “continuamente”. La bibliografía existente invitaba a esperar un modelo mental sobre continuidad que la expresa como algo “*sin saltos o sin cortes*” que, en contexto matemático, se manifiesta como “*graficar funciones sin levantar el lápiz del papel*”. Nuestro estudio propone un nuevo modelo mental sobre continuidad, no reportado en la bibliografía: algo “*sin fin*”, vinculado con “*no terminar*” o con “*ser infinito*”. Los resultados observados muestran, luego de la enseñanza, la persistencia de un único modelo mental, matemáticamente incorrecto y, además, un uso insuficiente de la definición del concepto.

Palabras clave: Concepto de continuidad, Concepciones Espontáneas, Modelos Mentales, Imagen conceptual, Sistemas de Representación Semiótica.

Abstract

This paper summarizes a qualitative research focused on the Cognitivist Vision, where learning difficulties about the relation between the continuity concept and the conceptual image have been studied.

University of Lujan Faculty Engineering's Students were able to express the conceptual image of continuity by means of either a graphical representation with no interruptions or a continuous happening.

Previous literature expressed a mental model of continuity like a “no jumpings and no cuts”, represented by plotting functions without lifting the pencil from the paper in a mathematical context. Our study proposes a new and not reported mental model of continuity: an “endless” linked with “never ending”.

The results observed show persistence of the unique mathematically incorrect mental model despite teaching and an insufficient use of concept definition

1. Introducción

La problemática que nos planteamos estudiar se relaciona con el estudio/análisis de las diferentes dificultades que se les plantean a los estudiantes en torno al aprendizaje del concepto de continuidad. Si bien hay algunas investigaciones acerca de este tema, nos ha interesado particularizar en algunos aspectos que podrían aportar especialmente al tratamiento del mismo en nuestro contexto de trabajo. Los aspectos que nos han resultado interesantes destacar tienen que ver con las imágenes conceptuales, registros de representación, concepciones espontáneas y uso del lenguaje. Entendemos que el

alcance amplio que puede asignársele al término “continuo”, no sólo en lo matemático sino también en la vida corriente, da sentido a considerar esos aspectos teóricos de la Educación Matemática.

El estudio se desarrolló en la Universidad Nacional de Luján, en el espacio curricular Análisis Matemático I, correspondiente al primer año de carreras de Ingeniería.

Esta asignatura es cuatrimestral y se dicta durante el segundo cuatrimestre del primer año de la carrera, después de haber cursado una Matemática introductoria en otra asignatura.

El marco teórico de nuestro trabajo toma las nociones de imágenes conceptuales y definición conceptual (Tall y Vinner), concepciones espontáneas (Cornu), registros de representación semiótica (Duval) y modelos mentales (Williams) que si bien se refieren al concepto de límite fueron inspiradores para nuestro trabajo sobre continuidad. Todos los conceptos mencionados se corresponden con el Enfoque Cognitivo de Educación Matemática, especialmente con la línea de Pensamiento Matemático Avanzado.

Para el contexto descripto, en la investigación nos hemos propuesto, como objetivos *adquirir conocimiento sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del concepto de continuidad*, tal como ya lo mencionamos y, además, *caracterizar las concepciones espontáneas sobre el concepto de continuidad, describir dificultades relacionadas al aprendizaje del concepto de continuidad y explorar maneras para que los estudiantes superen esas dificultades*.

Se utilizaron encuestas, tests y entrevistas a estudiantes, previas y posteriores a la enseñanza del tema. Lo previo se utilizó para detectar modelos mentales y concepciones espontáneas de la continuidad y las posteriores para analizar en qué medida esos modelos persisten luego de la enseñanza. Se detectaron dos modelos mentales, ambos erróneos uno de los cuales siguió siendo utilizado luego de la enseñanza. Se exploraron formas de hacer evolucionar a los estudiantes hacia un aprendizaje del concepto más cercano a lo matemáticamente correcto.

Se espera que este estudio contribuya al conocimiento sobre algunos aspectos que hoy en día generan conflictos al proceso de aprendizaje del tema, y podría plantear herramientas para que, desde la práctica docente universitaria, se pueda reflexionar, generando alternativas viables, a fin de lograr un aprendizaje significativo del concepto de continuidad. Para ello, se espera que resulte de interés la mirada que se presenta aquí sobre el tema, en la que incluimos aspectos variados como la imagen conceptual del concepto de función continua, las complicaciones que surgen a partir de la producción y lectura de los distintos registros de representación semiótica que los alumnos puedan realizar y, además, el uso de los “lenguajes” en contexto del estudio de la continuidad.

2. Sobre las concepciones espontáneas

Cuando el término utilizado para denominar un concepto matemático tiene un uso en la cotidianidad y el estudiante traslada naturalmente características del significado usual al ámbito matemático, suelen aparecer algunas dificultades vinculadas al aprendizaje de dicho concepto. En Educación Matemática, estas ideas que los estudiantes tienen sobre el concepto, previas a la enseñanza, se conocen con el término de *concepciones espontáneas*.

En cuanto al trabajo que realizamos, atendiendo a nuestro objetivo de caracterizar las concepciones espontáneas de los estudiantes, se diseñó, fundamentó y aplicó una encuesta previa al desarrollo del tema en el curso. Por otro lado, para recabar datos que nos permitieran alcanzar otro de los objetivos, vinculado con las dificultades presentes

en estudiantes de la UNLu, también se diseñó, fundamentó y aplicó un test posterior a la enseñanza del tema.

En función del análisis de los resultados del test, se seleccionó una muestra intencional de tres estudiantes para desarrollar con ellos la siguiente etapa del trabajo. Para ello, a partir de las dificultades advertidas en el test y de conocer las concepciones espontáneas de estos tres estudiantes, se procedió al diseño, con su respectiva fundamentación, de entrevistas de tipo semi-estructuradas con el fin de ampliar la descripción de las dificultades advertidas y explorar modos de superación de las mismas, las cuales luego fueron aplicadas al referido grupo de estudiantes.

Como mencionamos, en lo relativo a caracterizar las concepciones espontáneas de los estudiantes, el instrumento que se utilizó fue una encuesta de resolución individual. Ésta fue aplicada a la totalidad de los alumnos de una comisión, durante el ciclo lectivo 2013. El momento elegido para la implementación, fue durante una clase a las tres semanas de haber comenzado el dictado de la materia, y no habiéndose enseñado el tema de continuidad de funciones. La encuesta se aplicó a un grupo de veintinueve alumnos de los cuales quince eran recursantes, en vista de lo cual hemos decidido no tener en cuenta sus entregas.

El estudio de la bibliografía existente invita a esperar un modelo mental sobre continuidad que es el que la expresa como algo “*sin saltos o sin cortes*” que, llevada al contexto matemático, se expresa como “*graficar funciones sin levantar el lápiz de la hoja*”. Las respuestas a la encuesta muestran que este modelo está presente masivamente en nuestros estudiantes pero, a partir de ellas, también proponemos un nuevo modelo mental sobre continuidad, que la bibliografía no reporta y que, como se verá, es erróneo desde el punto de vista matemático. Este modelo que planteamos, da cuenta de la continuidad como algo “*sin fin*”. En referencia a los modelos señalados, también se observó la presencia de ambos pero expresados conjuntamente. En otros casos las explicaciones dadas no han favorecido para la determinación del modelo.

En general, a lo largo de nuestra observación, hemos detectado que este grupo de alumnos ha construido una imagen conceptual acerca de lo continuo, que se manifiesta a través de frases, palabras sueltas, metáforas o, también, como *alguna representación gráfica que no tiene interrupciones, o algo que sucede “continuamente”*, expresando así la idea de lo que significa, para ellos, que algo sea continuo.

3. Sobre el aprendizaje del concepto de *Continuidad*

Para obtener datos que permitan alcanzar el segundo de los objetivos de esta investigación, vinculado con describir las dificultades relacionadas al aprendizaje del concepto de continuidad, se confeccionó un test, que se aplicó dos meses después de haber recibido la enseñanza del concepto, a catorce de los veintinueve alumnos del curso. Se parte, para el diseño, de conocer modelos existentes en los estudiantes.

Si los estudiantes utilizaran estos modelos al responder cuestiones sobre continuidad, estarían manifestando dificultades en su aprendizaje, pues no reconocerían que apelan a ellos, que son matemáticamente incorrectos (aunque como todo modelo tienen un campo de validez) y que no estarían utilizando la definición formal.

La presencia, en la imagen conceptual de los estudiantes, de alguno de esos modelos puede incidir en la resolución de ciertas actividades. Es por esta razón que en la segunda parte del test nos propusimos conocer qué modelos se manifestaban, cómo operan con

ellos, si se evidenciaban contradicciones con la definición formal y si se advertían diferencias al trabajar con la noción de continuidad en distintos sistemas de

representación (verbal, gráfico, numérico y algebraico). En este sentido, hemos podido concluir que:

- se advierte que los estudiantes han considerado al modelo mental “*sin saltos o sin cortes*” como el más apropiado para expresar su idea sobre la continuidad global.
- mayoritariamente se observa que los estudiantes tienen construida una idea sobre la continuidad en la que prevalece el modelo “*sin saltos o sin cortes*”, no manifestándose la presencia del modelo “*sin fin*”, después de la enseñanza de la noción.
- se advierte, también, que al operar recurren, en general, a sus modelos mentales más que a la definición conceptual de la noción.

Al describir la noción de continuidad puntual, se observa que:

- el 64,28% (9 alumnos) define en forma incorrecta, expresando parcialmente las condiciones de la continuidad puntual
- el 35,72% (5 alumnos) expresa correctamente en el registro verbal la definición apelando a una reconstrucción propia.
- un solo estudiante enuncia en forma correcta la definición formal en el registro simbólico.

Después de la enseñanza de la noción, se observa la tendencia del grupo hacia el modelo “*sin interrupciones*”, mostrando que a pesar de conocer la definición formal del concepto, siguen operando sólo con su modelo mental, coincidiendo con lo expresado por Tall y Vinner (1981) sobre la resistencia de las partes erróneas en las imágenes conceptuales.

Algunas de las dificultades observadas podrían generarse a partir del uso de los distintos sistemas de representación semiótica mientras que otras podrían haber surgido de la no comprensión de los enunciados del test. Particularmente, estas últimas estarían vinculadas a la utilización de expresiones a las que los estudiantes no están habituados.

Para ampliar la descripción de las dificultades advertidas en el test y explorar modos de superación de las mismas (2° y 3° objetivo), se procedió al diseño de una entrevista semiestructurada para cada uno de los tres estudiantes seleccionados, entre los catorce que contestaron el test. De cada uno de los tres estudiantes que finalmente fueron seleccionados, se tuvo en cuenta el modelo mental con el que operaron en el test y algunas dificultades advertidas en él.

Al analizar los resultados de las entrevistas se advierte que estos estudiantes, al comienzo de las mismas, operan con el modelo sin saltos, y reconocen que si la función viene presentada en el registro simbólico, se les dificulta la determinación de la continuidad un poco más que si está dada en los registros gráfico y verbal.

El diseño de la entrevista cuenta con la fundamentación de algunas actividades en torno al análisis de la continuidad de una función, puntual o global. Se proponen algunas actividades que contemplan el tipo de tareas que, según todo lo planteado en este trabajo, permitirían mejorar el aprendizaje de esta noción, intentando correr a los alumnos de las imágenes conceptuales erróneas.

El propósito es presentar funciones en los registros simbólico y gráfico que favorezcan el reconocimiento de la no adecuación del modelo “sin saltos” con el que mayoritariamente los estudiantes operan. Para ello, entendemos que habría que hacerles contrastar su imagen errónea con la definición formal. Es decir habría que lograr que, entre otras cosas, adviertan que la continuidad solo se estudia en puntos del dominio, que los dominios podrían no ser conjuntos conexos y que, en estos casos, podría levantarse el lápiz para graficar y que eso no contradice la definición formal de continuidad.

4. Observaciones finales.

Este estudio se inició con la intención de obtener conocimiento sobre las dificultades de los estudiantes de un primer curso de Análisis Matemático, en el aprendizaje del concepto de continuidad y logró no sólo ratificar la presencia del modelo *sin cortes* que la bibliografía reportaba sino que permitió proponer un nuevo modelo: el que llamamos *sin fin*. Para los estudiantes que operan con él una función continua es una función que continúa indefinidamente, que no tiene fin, y lo vinculan con “lo infinito”, que no cesa, que no se detiene, que sigue un patrón permanentemente.

Ha sido interesante reconocer que el modelo *sin cortes* resistió a la enseñanza, mientras que no así el modelo *sin fin*. En este trabajo no se analizaron las clases dictadas por los docentes, ni el tipo de actividades propuestas pero se estima muy posible que la misma enseñanza no solo no haya atendido a los modelos, sino que haya reforzado el modelo predominante.

Se encontró que primariamente surgen “frases en registro coloquial”, referidas a no levantar el lápiz al graficar, no tener saltos, etc. Por otra parte, se aprecia que algunos gráficos cartesianos funcionan como prototipos y, allí, las funciones homográficas y las “lineales con agujeros”, son el ejemplo central de funciones discontinuas, lo que encierra la falta de análisis del dominio de definición de las mismas.

Atendiendo al interés de conocer algún tipo de vínculo con *los registros de representación semiótica*, se advirtió que el registro semiótico en el cual se presenta la función para analizar su continuidad puede resultar obstaculizador o facilitador de la identificación del dominio. Si la función está dada de forma gráfica, y si el estudiante sabe que debe considerar su dominio, podrá responder adecuadamente. Si, en cambio, se le presenta la función como una terna (dominio, codominio y fórmula), y el estudiante no puede extraer significado de esa representación en registro simbólico para reconocer cuál es el dominio, estaría en un punto de partida desfavorable para el análisis de la continuidad.

Se ha advertido que el estudiante apela a sus modelos mentales y que solo ante la intencionalidad didáctica se favorece la interacción con la definición conceptual.

En particular se destaca, que ante una pregunta sobre el concepto, los estudiantes apelan en general, y en una primera instancia, a su propia interpretación de continuidad concebida por lo que el término les sugiere a raíz del uso que han venido dando, es decir a partir de sus concepciones espontáneas, no teniendo en consideración la definición formal, ocasionándole una gran dificultad en el aprendizaje de la noción.

La fuerte presencia del modelo “sin saltos o sin cortes” hace que el estudiante logre, en algunas situaciones dar una respuesta correcta a una actividad, no provocando la contradicción que le permitiría darse cuenta de la no pertinencia del modelo y la conveniencia de la utilización de la definición formal como elección válida para contestar, adecuando el modelo mental que usan al sistema de representación en el que la función viene dada.

Se considera que es clave la conciencia de la existencia de los modelos, el reconocimiento de su resistencia a los cambios y de cómo se generan esos cambios. Sin esta condición, el docente estaría desconociendo lo que ocurre en los estudiantes. Con esta condición cumplida, resta la intencionalidad didáctica y el diseño de actividades que focalicen en generar las contradicciones, base de los aprendizajes y de la corrección de errores.

Considerando los trabajos que fundamentan esta investigación, se puede establecer que ante la complejidad del concepto de continuidad los alumnos utilizan partes de la imagen conceptual sin entrar en conflicto alguno con la definición formal. El apelar a

sus imágenes conceptuales les ofrece una forma de poder responder a las demandas del docente y tener así cierto grado de efectividad en la clase, aunque sin sustento matemáticamente correcto.

Entendemos que los resultados de este trabajo, aportan un punto de partida valioso para pensar en la enseñanza del concepto y continuar indagando acerca de nuevas situaciones e investigaciones. Asimismo este estudio aportó conocimiento significativo respecto a la enseñanza y el aprendizaje de la noción de continuidad en el contexto de trabajo, y deja abierta la posibilidad de realizar futuras investigaciones sobre el tema en otros contextos.

A partir de los datos mostrados por el trabajo de campo, surgió la idea de ir más allá de lo propuesto en el proyecto y sumar una propuesta didáctica que atiende desde su diseño a los diferentes aspectos estudiados y que están involucrados en el aprendizaje de la noción. Las actividades que hemos propuesto intentan correr a los alumnos de las imágenes conceptuales erróneas.

Por último, creemos que resultaría interesante llevar esta propuesta didáctica al aula, a fin de estudiar la imagen conceptual de los alumnos después de su aplicación, y evaluar su trascendencia. Esto contribuiría con la formalización de la noción de continuidad en nuestros estudiantes, para lograr así un aprendizaje integral del concepto, que los encontrará con mejores ideas para el abordaje de otras nociones que se basan en él.

La culminación de este trabajo de investigación abre las puertas para continuar profundizando y contribuyendo al campo de la Educación Matemática.

2. Referencias

- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking*. Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, 173-201, Cinvestav, México
- Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol 22, No. 3, 219-236.