En busca del número

por
Esther García Giménez
(IES Río Gállego, Zaragoza)

Problema 4

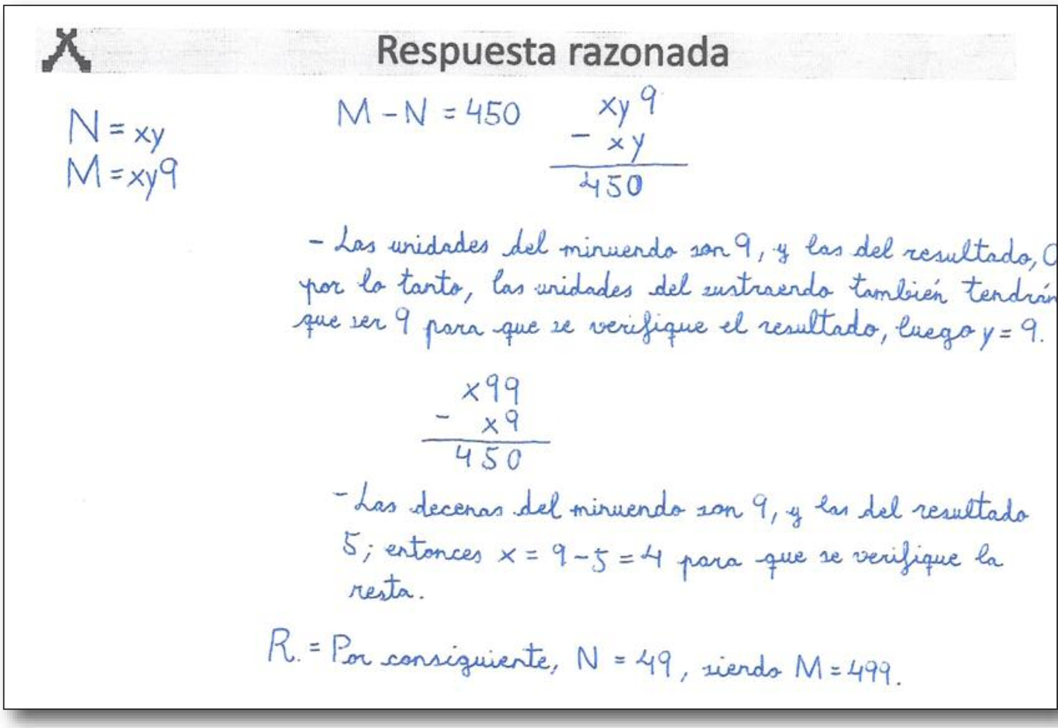
En busca del número

Un número N de dos cifras verifica que, si se coloca a su derecha el 9 se obtiene un número M tal que la diferencia $M-N$ es 450.

¿Cuál es el número N*?*

Para resolver este problema la mayoría de los alumnos han utilizado el algoritmo de la suma o de la resta para encontrar el número buscado.

Expresando los números M y N, escribiendo ordenadamente sus cifras y efectuando la operación correspondiente, muchos participantes de la vigesimosexta Olimpiada Matemática Aragonesa han logrado obtener la solución correcta.



Respuesta razonada

$N = xy$
$M = xy9$

$M - N = 450$

$$\begin{array}{r} xy9 \\ -\ \ xy \\ \hline 450 \end{array}$$

- Las unidades del minuendo son 9, y las del resultado, 0 por lo tanto, las unidades del sustraendo también tendrán que ser 9 para que se verifique el resultado, luego $y = 9$.

$$\begin{array}{r} x99 \\ -\ \ x9 \\ \hline 450 \end{array}$$

- Las decenas del minuendo son 9, y las del resultado 5; entonces $x = 9 - 5 = 4$ para que se verifique la resta.

R. = Por consiguiente, $N = 49$, siendo $M = 499$.

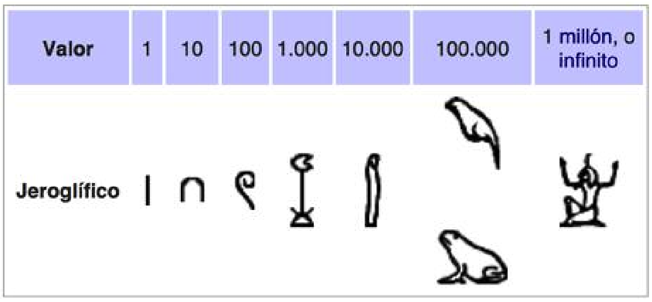
Pero cabría preguntarse si al hablar de unidades, decenas y centenas en este ejercicio están pensando en realidad en el valor posicional de las cifras, es decir, en el principio del valor relativo de los sistemas de numeración.

Sin tener claro este concepto difícilmente podrían resolver otro tipo de problemas si cambiásemos la base del sistema utilizado.

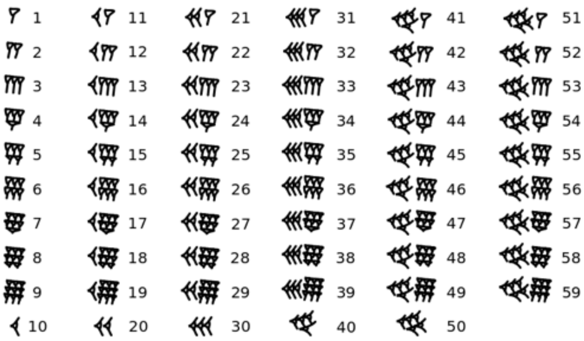
Históricamente los hombres empezaron a contar usando los dedos de sus manos, es por ese motivo que los sistemas iniciales fueron el quinario y el decimal, con bases 5 y 10 respectivamente. Posteriormente se pasó al uso de guijarros para poder formas montones y luego a hacer muescas en un palo o trozo de hueso con la ayuda de un sílex.

Recordemos un poco cómo se ha llegado al sistema decimal utilizado en la actualidad.

Hace 5000 años los egipcios empezaron usando un sistema de numeración jeroglífico basado en una escala numérica de base 10 y un esquema iterativo pero el principio repetitivo resultaba tedioso y da paso a la introducción de símbolos para representar los dígitos y los múltiplos de las potencias de 10.



Los babilonios, sin embargo, utilizaban un sistema en base 60 en el que quedaba sumergido el sistema decimal.



En la actualidad utilizamos el sistema sexagesimal en la medición del tiempo y de los ángulos, así que nos resulta fácil que los alumnos puedan comprender lo que es un sistema de numeración en una base diferente.

En Grecia había dos sistemas principales, el ático (I = 1, Π = 5, Δ = 10, H = 100, X = 1000 y M = 10 000) y el jónico, los dos basados en una escala de base 10.

α´	1	ι´	10	ρ´	100
β´	2	κ´	20	σ´	200
γ´	3	λ´	30	τ´	300
δ´	4	μ´	40	υ´	400
ε´	5	ν´	50	φ´	500
ϝ´ / ϛ´ / στ´	6	ξ´	60	χ´	600
ζ´	7	ο´	70	ψ´	700
η´	8	π´	80	ω´	800
θ´	9	ϙ´ / ϟ´	90	ϡ´	900

El principio multiplicativo introducido anteriormente por los chinos acababa con las limitaciones del principio de la suma de egipcios y griegos.

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

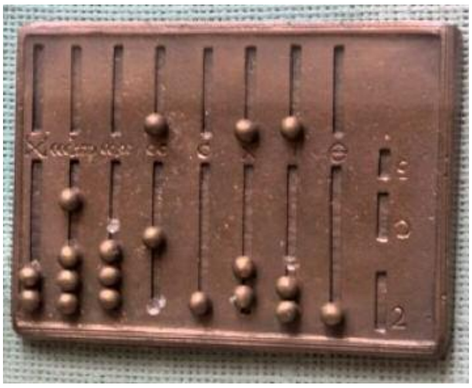
La idea del valor local o posicional ya estaba presente en el sistema de numeración babilónico y fueron los hindúes los que se dieron cuenta que era también aplicable al sistema de notación decimal.

Se cree que nuestro sistema de numeración procede de los árabes pero lo que hicieron fue adoptar los principios del sistema hindú —base decimal, notación posicional y forma cifrada para cada uno de los diez números básicos— y transmitirlo a Europa.

European	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Arabic-Indic	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
Eastern Arabic-Indic (Persian and Urdu)	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
Devanagari (Hindi)	०	१	२	३	४	५	६	७	८	९
Tamil		௧	௨	௩	௪	௫	௬	௭	௮	௯

La pregunta que deberíamos hacernos es cómo hacer para que los alumnos reconozcan fácilmente los sistemas de numeración en diferentes bases y trabajen con ellos.

Una forma sencilla, al igual que hacían los romanos, es comenzar con el uso del ábaco, instrumento al que recurrían al no servir su sistema para hacer cálculos.



El sistema de numeración romano utilizaba estas letras mayúsculas para escribir los números:

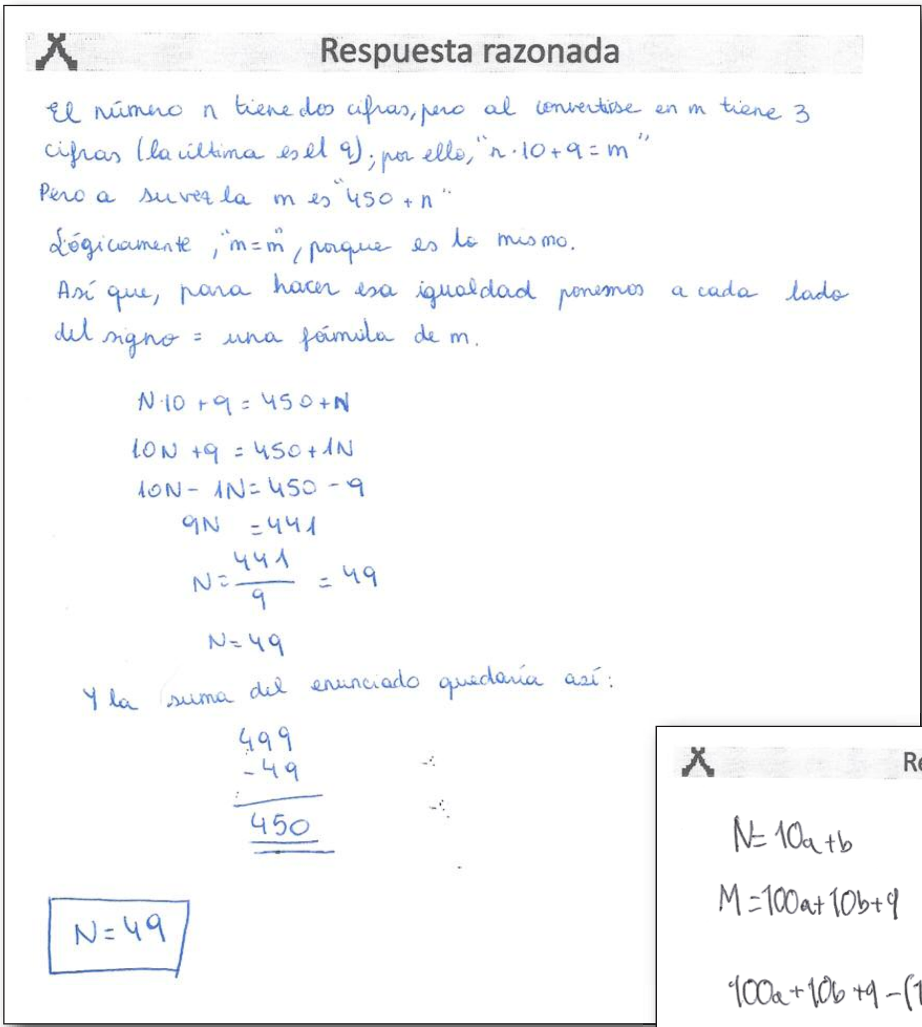
I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Para escribir números seguían estas cuatro reglas:

— Solo las letras I, X, C y M se pueden repetir dos o tres veces seguidas
— Si una letra se pone a la derecha de otra de igual o mayor valor se suman sus valores
— Las letras I, X y C escritas a la izquierda de otra de mayor valor le restan su valor
— Una raya encima de una o varias letras indica que el número queda multiplicado por 1000

Al comprender que para pasar a una unidad de orden mayor debes contar un número igual al valor de la base del sistema posicional ya podrían trabajar en cualquiera de ellos.

Y en este caso conseguir resolver el problema del enunciado utilizando el teorema fundamental de la numeración como han hecho algunos de los participantes en la Olimpiada.



Respuesta razonada

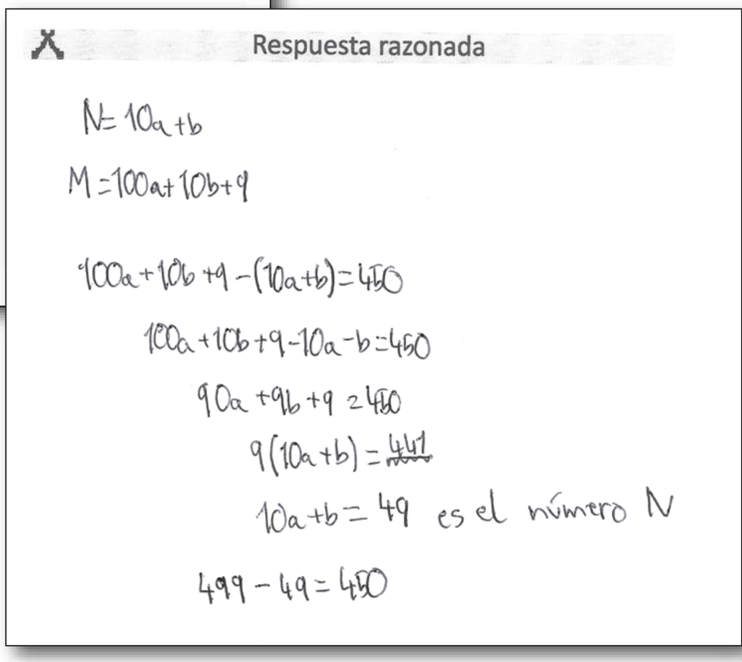
El número n tiene dos cifras, pero al convertirse en m tiene 3 cifras (la última es el 9); por ello, "$n \cdot 10 + 9 = m$"
Pero a su vez la m es "$450 + n$"
Lógicamente, "$m = m$", porque es lo mismo.
Así que, para hacer esa igualdad ponemos a cada lado del signo = una fórmula de m.

$$N \cdot 10 + 9 = 450 + N$$
$$10N + 9 = 450 + 1N$$
$$10N - 1N = 450 - 9$$
$$9N = 441$$
$$N = \frac{441}{9} = 49$$
$$N = 49$$

Y la suma del enunciado quedaría así:

$$\begin{array}{r} 499 \\ -49 \\ \hline 450 \end{array}$$

$$\boxed{N = 49}$$



Respuesta razonada

$$N = 10a + b$$
$$M = 100a + 10b + 9$$
$$100a + 10b + 9 - (10a + b) = 450$$
$$100a + 10b + 9 - 10a - b = 450$$
$$90a + 9b + 9 = 450$$
$$9(10a + b) = 441$$
$10a + b = 49$ es el número N
$$499 - 49 = 450$$

Queda pues para próximas ediciones, que trabajemos con ellos problemas interesantes en los que puedan aparecer sistemas tan utilizados en la actualidad como el binario, el octal y el hexadecimal que gracias al mundo de la informática conocen los alumnos. Así como, que sepan trabajar cambiando de un sistema de numeración a otro efectuando las operaciones indicadas en la expresión polinómica —teorema fundamental de la numeración— para pasar de cualquier sistema de numeración al decimal y de forma recíproca, realizando las divisiones sucesivas por la base correspondiente del nuevo sistema.