

DESARROLLO DE HABILIDADES BÁSICAS A TRAVÉS DEL ESTUDIO GEOMÉTRICO DE MOSAICOS

Miryam Judith Mazzitelli

Instituto Nacional del Profesorado Técnico. Universidad Tecnológica Nacional.
miryamjmm@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta una investigación en la que describimos el desarrollo de habilidades geométricas y la adquisición gradual de mayores niveles de comprensión en estudiantes de primer año del nivel medio. Para ello se trabajó con una secuencia sobre el estudio geométrico de mosaicos mostrando la riqueza del trabajo geométrico sobre un contenido cotidiano que puede llegar a ser una herramienta para el avance en la comprensión matemática.

Palabras clave: Geometría, Mosaicos, Habilidades geométricas, Niveles de comprensión.

Introducción

La problemática que nos inquietaba, inicialmente, fue tratar de conocer si estudiantes de primer año de nivel medio logran evolucionar en sus desempeños de un modo en el que puedan mostrar comprensión de lo que realizan. Para esto es importante la habilidad de ejecución de tareas pero acompañada de mayor nivel de comprensión cada vez. Y quisimos particularizar el trabajo en temas de Geometría, porque, el grupo de primer año, al no haber trabajado anteriormente en contenidos geométricos (salvo algunas cuestiones de geometría con aritmética, como para cálculo de áreas y perímetros) consideramos que sería un terreno fértil como para que desplieguen otro tipo de herramientas en el trabajo matemático. Por un lado vincular “la matemática” con “lo cotidiano” y por otro embarcarse en “un hacer comprensivo” que tal vez la Geometría pudiera facilitar. En la búsqueda de material bibliográfico decidimos focalizarnos en el desarrollo de habilidades geométricas básicas estimulando el progreso en la comprensión de los estudiantes. Entendemos que es valioso observar que estas habilidades no son útiles sólo para el estudio de la matemática sino, en nuestra opinión, para la vida como educando.

Conociendo que en la sociedad actual predomina lo visual, la imagen asociada a un dibujo es la puerta de entrada a la geometría. Según Alsina (1995) la geometría va asociada con el arte de saber mirar y ver y “las imágenes más bellas y armoniosas tienen un fuerte ingrediente geométrico” (p.60). Siendo los mosaicos un contenido al alcance de todos, desde el arte, la naturaleza y la arquitectura se podrían matematizar y así involucrar a todos en un trabajo geométrico desde los intereses particulares. Partiendo de lo concreto y desde allí se iniciará un camino intencionado que eleve el pensamiento. La intencionalidad mencionada significa que este proceso no se da sólo, se debe provocar y para esto el papel del docente es clave. Es él quien se encarga de diseñar las actividades, organizarlas en forma de secuencias o proyectos con una intencionalidad didáctica y nivel de profundización cada vez mayor, para que el alumno pueda experimentar el quehacer y pensar matemático ante una situación y desarrollar capacidades o habilidades que le son propias.

Las habilidades desarrolladas en el trabajo geométrico (Bressan, 2013), pueden ser puestas en juego a raíz del trabajo con actividades que inviten a su uso. Cada alumno aplicará la que considere más pertinente en la resolución de las actividades de la secuencia que están planteadas como desafíos a la intuición y luego a la razón. El estímulo fue, en primera instancia, puramente visual, pero a través de diversas situaciones se fue desplazando hacia el uso de otras habilidades, que no son plenamente estimuladas fuera del aula, con mayor nivel de comprensión.

En esta presentación mostraremos una síntesis de la fundamentación, algunos datos de la secuencia, como ciertos resultados de aplicar una secuencia didáctica que propone un trabajo alrededor de mosaicos geométricos.

Para empezar debimos determinar cuáles son las habilidades que se favorecen en el estudio de la Geometría y su relación con la comprensión.

1. Habilidades y niveles de comprensión en geometría

Bressan (2013) considera que el desarrollo el estudio de la geometría comprende las siguientes habilidades: visuales, de dibujo y construcción, de comunicación, de razonamiento lógico/pensamiento y de aplicación o transferencia.

Cabe señalar, a modo de ejemplo, que la visualización corresponde a saber ver el espacio con la intuición como motor, pero no se lograría comprensión si no se avanza en el análisis regido por leyes de la deducción lógica. Los resultados se tienen que poder expresar y comunicar, no basta “verlos” y el sentido de la vista no es absolutamente fiel a las formas de las imágenes ya que muchos factores influyen en la percepción de las imágenes. La percepción visual, como el lenguaje, puede ser aprendida y exige el uso de ciertas habilidades para saber ver y saber interpretar. Así pues la comunicación gráfica también es una habilidad para ejercitar. La comprensión se alcanzará en base al manejo del razonamiento, cuestión clave para la claridad y rigor de la ciencia.

En el aprendizaje de la Geometría hay dos momentos bien marcados, el inicial donde prima la intuición, de naturaleza mayormente visual y el segundo que se hace de manera reflexiva, lógica y que es de naturaleza verbal. El primer momento tiene un carácter más subjetivo y el segundo más objetivo y analítico.

La comprensión geométrica solo se alcanza si se logra avanzar hacia el segundo momento.

El matrimonio Van Hiele (1957, citado en Gutiérrez, Jaime y Fortuny 1991) propuso específicamente para Geometría una teoría de niveles de conocimiento y de fases de comprensión que permiten organizar la enseñanza y reconocer aprendizaje y comprensión alcanzada por los estudiantes. Estos niveles y fases son secuenciales y progresivos. Así que se va de lo mínimo, basando en observar una figura, hasta la mayor complejidad expresada en la demostración lógica pasando por estadios progresivos que no son posibles de saltar.

Hoffer (1981) asoció el estado específico de cada habilidad con el nivel de comprensión geométrica desarrollado por Van Hiele.

Consideramos como marco teórico para este trabajo, la noción de mosaicos de Bressan, junto con los conceptos de habilidades geométricas y su vínculo con la comprensión de Van Hiele. Adaptamos la tabla de Hoffer (1981) para relacionar cada habilidad con el nivel de comprensión de los estudiantes y diseñamos un proceso metodológico y la creación indicadores de los resultados que se puede conocer en detalle en Mazzitelli (2016).

Durante la implementación se exploró las actividades realizadas para reconocer el desarrollo de habilidades y el nivel de comprensión que se pone en manifiesto, y más aún el pasaje de un nivel de comprensión cada vez mayor.

Uno de los objetivos de este trabajo fue el de describir habilidades puestas en juego por estudiantes ante una secuencia didáctica sobre mosaicos y su avance en la comprensión. Para esto se necesitó una propuesta que logre involucrar a todos y les dé el tiempo necesario para el desarrollo de habilidades. Entonces se seleccionó una secuencia que se utilizara durante prácticamente un mes de clase con distintos tipos de actividades alrededor de un eje básico de observar e investigar mosaicos con el fin de describir las habilidades puestas en juego.

2. La secuencia y cuestiones metodológicas.

Hemos utilizado como punto de partida una secuencia que plantea la búsqueda de patrones geométricos y el estudio de las figuras planas (polígonos regulares) a partir de la observación y construcción de mosaicos.

De los muchos trabajos sobre mosaicos se consideró; el contenido, las actividades que pudiesen ser resueltas de diversas maneras, las consignas estuvieran adaptadas al nivel de los alumnos y el tiempo sea razonable, como la cantidad de habilidades que se pudieran poner en juego. Esto nos llevó a realizar un cambio de metodología que necesitó de reajustes tanto en el contrato didáctico como en la evaluación.

La secuencia final constaba de cinco trabajos prácticos, divididos en clases según las horas de trabajo por día, que comenzaban desde la construcción de rompecabezas, reconocimiento de mosaicos con polígonos regulares y características de los mismos, estudio de ángulos de polígonos regulares, pasando por los mosaicos semi-regulares, mosaicos Nazaríes y el trabajo del dibujante Maurits Escher.

Ubicados en el aula, con este tipo de secuencia es posible comenzar desde los niveles más bajos de comprensión para ir creciendo en contenidos y habilidades en forma democrática, donde cada alumno es actor fundamental de su propio proceso de aprendizaje.

El trabajo en el aula se planteó grupal y por esto la creación fue colectiva. La interacción entre alumnos alienta y enriquece la solución de problemas y aparecen nuevas ideas que confirman concepciones de los alumnos, así que se implementó grupos de hasta cuatro integrantes pero en algunas actividades sólo se desarrolló en parejas.

Se consideró una muestra con tres trabajos grupales de alumnos que asistieron a todas las clases y trabajaron en equipo en todo el trayecto de resolución.

Se evaluó en forma cualitativa y su análisis puede considerarse en detalle en la **tesis** ya que el tiempo de realización de la secuencia brindó mucho material de análisis que no es posible presentar en este trabajo.

3. Resultados de la implementación

La secuencia de actividades se realizó en el mes de agosto de 2015 justo al empezar las clases luego del receso invernal. Se implementó durante 5 semanas considerando que la guía de trabajos involucraba diez clases con algunas jornadas de 2 clases de 40 minutos. El uso de la sala de informática sólo fue posible en una clase.

Aquí se podrá apreciar extractos de actividades donde se evidencia el desarrollo de habilidades.

En el TP. N°1, se presenta el trabajo con la construcción de rompecabezas en la sala de informática. Además de jugar se solicitó que describieran los tipos de fichas para reconocer cuál eran las nociones iniciales y cuánto conocían de geometría.

Luego se les solicitó que construyeran un rompecabezas de una imagen del artista M. Escher en hoja de tamaño A4, con determinado tipo de fichas. Resultó que la elección

única de piezas fue de las figuras que determinaban ángulos rectos. No fueron considerados los triángulos y menos aquellas piezas que no tuvieran ángulos de 90° (considerando sólo los exteriores).

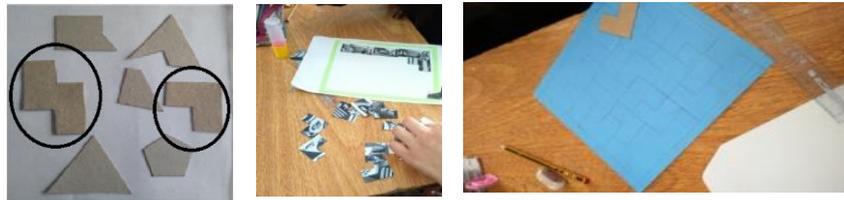


Imagen 1: Trabajo de los alumnos a partir de las teselas que seleccionaron.

Gradualmente los estudiantes fueron incorporando vocabulario y en especial los términos mosaicos y teselas que resultaron prácticamente naturales al observar revestimientos y obras de arte.

El análisis de los datos nos permitió reconocer la presencia de habilidades visuales y de dibujo de nivel de comprensión en Nivel 0.

En el TP 2, se analiza las teselas y en particular se propone el análisis de teselas regulares y de ahí considerar cuáles son los polígonos regulares que permitieron la construcción de los mismos y cuáles no. Preguntas orientadas a analizar la posibilidad de construir rompecabezas/ mosaicos con polígonos regulares.

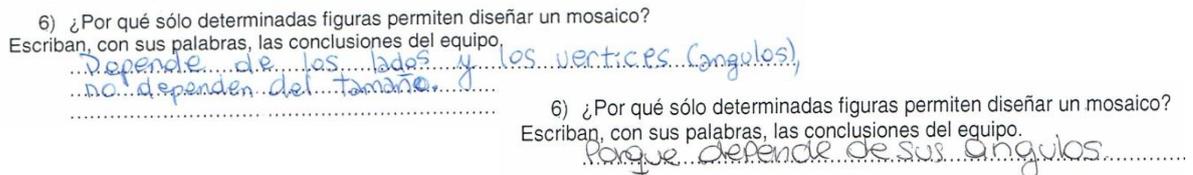
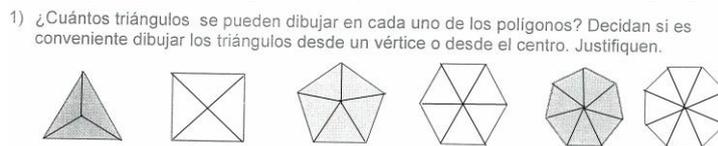


Imagen 2: Respuestas de los alumnos de dos grupos de la muestra.

Se direccionó la secuencia y la orientación del docente para que se expresen no sólo con dibujos o construcciones, sino ya verbalizando sus justificaciones desarrollando además, habilidades de comunicación e iniciando las lógicas o de transferencia en el nivel de comprensión más bajo. Simultáneamente las habilidades visuales, de dibujo y construcción fueron desarrolladas en niveles superiores.

A partir de este momento se empezó a investigar la amplitud de los ángulos interiores apoyándonos en el contenido previo que todo el curso manejaba que era la suma de los ángulos interiores de un triángulo. Vemos en las siguientes imágenes el análisis de los ángulos interiores de polígonos regulares que realizaron algunos grupos.



1) ¿Cuántos triángulos se pueden dibujar en cada uno de los polígonos? Decidan si es conveniente dibujar los triángulos desde un vértice o desde el centro. Justifiquen.

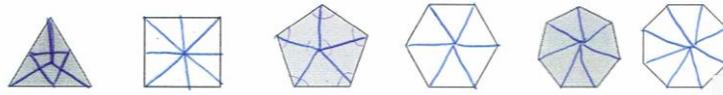


Imagen 3: Resolución de los alumnos de los grupos de muestra

El cálculo de cada ángulo interior de los polígonos regulares, a partir de las conclusiones grupales.

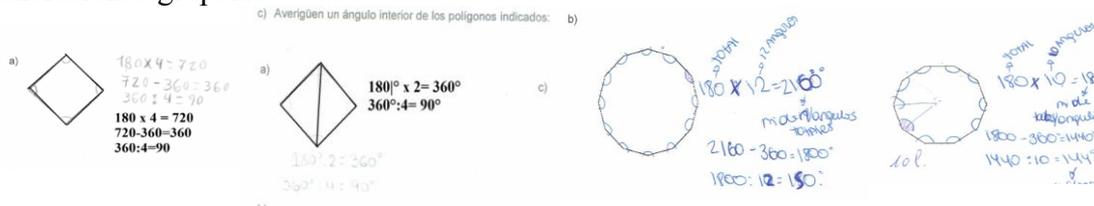


Imagen 4: Cálculo de los ángulos de alumnos de los grupos de muestra

En todo momento se propició la justificación, dando la posibilidad que cada alumno explicite con gráficos, cálculos o simple redacciones. Ya las habilidades visuales, de comunicación, y lógicas fueron “empujadas” por las actividades a niveles superiores de comprensión.

Introducen la justificación de sus conclusiones:

Por ejemplo ¿Por qué determinadas figuras son las que teselan el plano?

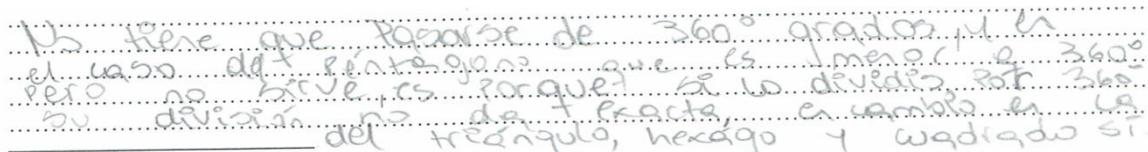


Imagen 5: “Justificación” según los alumnos sobre la selección de determinados polígonos para mosaicos.

En el TP 3 se analizó la construcción de mosaicos semi-regulares y ya con la noción de ángulos interiores de un polígono regular pudieron encontrar y mostrar sus resultados. Las habilidades más desarrolladas fueron las visuales, de dibujo y construcción, en fases superiores de comprensión y también en un mayor grado de comunicación con la lógica y transferencia.

En el TP4 se orientó en la observación de la construcción de mosaicos artísticos y reconocer los diseños de los árabes en La Alhambra. Aquí ya todas las habilidades se desarrollaron en conjunto y cada alumno con distinto nivel de comprensión, pero todos en niveles crecientes.

Con el TP 5 se trabajó considerando la obra de Escher y se les propuso desarrollar un mosaico con teselas originales. Finalizando la secuencia los alumnos pudieron crear sus propias teselas analizando la posibilidad de otras figuras, utilizando todo tipo de ángulos y validando sus creaciones.



Imagen 6: Diseño de teselas originales y confección de rompecabezas.

4. Conclusiones

El estudio de los mosaicos geométricos generó una invitación al desarrollo de habilidades y el estímulo en el avance en los niveles de comprensión. Las habilidades geométricas, como las de visualización, para dibujar y de comunicación son comunes aunque no estimuladas en todos sus aspectos, y se ponen de manifiesto en distintos grados de desarrollo. En cambio, las lógicas y para modelar son estrictamente provocadas en el aula a raíz de la implementación de la secuencia con tal intención. Todas las otras habilidades han tenido una presencia cada vez mayor dependiendo del objetivo de la actividad en sí misma, siempre con diferentes grado de comprensión, pero continuamente en progreso. Y éstas van apareciendo en un orden lógico, necesario para avanzar en el trabajo, y cuya finalidad es alcanzar una mayor abstracción. Para esto es necesario tiempo y continuidad para que realmente se logre un progreso que respete las particularidades de cada alumno.

Entonces concluyendo, respecto a la predominancia de alguna habilidad, señalamos que la visualización ha estado presente en este trabajo debido a que no hubo planteos descontextualizados o presentados íntegramente con terminología matemática, sino que en todo momento hubo vínculos con patrones, mosaicos, revestimientos, obras de arte, etc.

Podemos afirmar que la observación de la muestra nos brindó información para determinar que los alumnos pudieron trabajar en una primera instancia en el nivel más bajo de comprensión y fueron avanzando con las diferentes actividades. Esto nos induce a concluir que respetando las características de cada alumno todos han trabajado con todas las habilidades propuestas y avanzaron en sus niveles de comprensión con respecto a los iniciales.

En la **tesis** puede observarse detalles de la metodología y resultados de lo que aquí planteamos y que ampliaremos en la ponencia.

Cabe destacar la flexibilidad de las actividades que podían ser resueltas desde lo empírico hasta el trabajo lógico, brindando posibilidades de distintos abordajes. Por ello el trabajo grupal fue beneficioso ya que cada estudiante pudo realizar su aporte desde sus propias habilidades.

La posibilidad de realizar esta misma secuencia con grupos de alumnos más avanzados donde las habilidades lógicas y para modelar podrían aparecer con mayor relevancia. Sabemos que en ciertas consignas de la secuencia como la de construcción de un rompecabezas o el trabajo final de armar un mosaico se vieron acotadas en la elección de las teselas por la dificultad de copiar y recortar con “tijeras”. Nos preguntamos: si se hubiera trabajado desde un inicio con el programa Geogebra, ¿se habría logrado mayor riqueza, originalidad y dinámica en la elección de otras teselas?, ¿podría ser un camino para estimular el desarrollo de las habilidades lógicas y de modelar? ¿Se podrá adaptar la acotar el tiempo de resolución de todo el trabajo? Y así nos encontramos con muchas otras cuestiones en las que se podría seguir investigando.

El desarrollo de este trabajo dejó en evidencia la posibilidad de generar actividades geométricas que, partiendo de actividades empíricas, logren desplegar el pensamiento racional y permita que los estudiantes desarrollen habilidades con mayor nivel de comprensión que podrán ser aplicables no sólo a esta materia y que traspasen la clase.

Cuando surge la pregunta sobre qué se debe enseñar en una Geometría para todos en la educación obligatoria y se piensa qué debe saber de un ciudadano normal, más allá de su profesión, aparece la frase del Dr. Luis Santaló (1997, p.18) sobre formar cabezas bien hechas y no saturadas de información inútil que no sirve para la vida, ni despiertan la curiosidad. Es por ello que este trabajo pretende ser un aporte para echar luz sobre lo importante del desarrollo de habilidades geométricas, caracterizar actividades que las

promuevan y evidenciar lo provechoso del estudio de la geometría desde los primeros cursos.

5. Referencias bibliográficas

- Alsina, C. (1995). *Invitación a la Didáctica de la Geometría*. (3° Reimpresión). Madrid: Ed. Síntesis.
- Bressan, A., Bogisic, B. y Crego, K. (2013). *Razones para enseñar geometría en la educación básica*. (3° Reimpresión). Argentina: Ed. Novedades educativas.
- Gutiérrez, Á. Jaime, A. & Fortuny, J. (1991). An alternative paradigm to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 22, pp.237-251 Stable URL: <http://www.jstor.org/stable/749076>.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. *The Mathematics Teacher*, vol. 74(1), 11–18. Retrieved from <http://www.jstor.org/stable/27962295>
- Mazzitelli, M. (2016). Mosaicos. Habilidades básicas desarrolladas con el estudio geométrico de mosaicos (tesis de licenciatura). Universidad Tecnológica Nacional, Regional Pacheco, General Pacheco, Argentina.
<https://onedrive.live.com/redir?resid=D0FEE17BB1DB0503%21759>
- Santaló, L. (1997). *Enfoques Hacia una didáctica humanista de la matemática*. (3° Reimpresión). Buenos Aires. Ed. Troquel.