

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA EN UN CURSO DE CÁLCULO INTEGRAL

Fabiana Pauletich^{1,2}; Laura S. del Río¹; Viviana A. Costa¹

¹IMApEC, Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata.

²Facultad de Ciencias Agrarias y Forestales de la Universidad Nacional de La Plata.

fpaletich@gmail.com

Resumen

Actualmente el proceso de enseñanza y aprendizaje centrado en el estudiante y no en la simple transmisión del saber por parte del docente, conlleva al alumno a desarrollar competencias, para crear, indagar, transformar, utilizar y aplicar el conocimiento en diversos contextos. Por ello adquiere relevancia la implementación de diversas estrategias didácticas que favorezcan la formación por competencias. Con este objetivo, se implementó una actividad en un curso de cálculo integral en una facultad de ingeniería cuya propuesta consistió en la resolución de un problema real en la cual los estudiantes trabajarían en particular la competencia modelización matemática. Se realizaron encuestas que muestran la valoración positiva de la misma por parte de los estudiantes y se analizan cualitativamente los logros alcanzados durante el proceso de la actividad.

Palabras claves: Modelización matemática, Competencias, Educación en ingeniería estrategia didáctica, Cálculo integral.

Abstract

Currently, the student-centered process of learning and teaching helps the student develop skills to create, research, transform and apply his own knowledge in several contexts. In this, teaching strategies that aim to improve these skills become particularly relevant. With said goal, an activity was put into practice in a university Calculus course consisting of the resolution of an open and real life problem in which the students would develop their skills for "mathematical modeling". Polls show positive feedback among students. Finally, the achievements reached through the activity are analyses.

1. Introducción

El concepto de competencia ha adquirido en las últimas décadas una gran presencia tanto en el mundo del trabajo como en el de la educación. El docente favorece el desarrollo de competencias cuando despliega una serie de dispositivos, situaciones y acciones que involucran al alumno activamente (Abate, Orellano, 2015). En este enfoque se desestima la idea de enseñanza como mera transmisión de información de carácter unidireccional y se la entiende como un proceso comunicativo, interactivo, siendo el docente el facilitador o guía del aprendizaje, lo cual supone modificaciones a su rol tradicional.

En particular en carreras de ingeniería, las competencias que se adquieren durante el transcurso de la formación universitaria, comienzan a desarrollarse en los primeros años. Por ello, la investigación educativa en Ciencias Básicas dentro de las propias universidades se ha incrementado notablemente, y como consecuencia los contenidos y las estrategias de enseñanza están en constante revisión. Surgen así nuevas propuestas y

currículos que se van analizando, estableciendo, evaluando y mejorando, centrados en el desarrollo de competencias (González y Ferreira, 2000; Mateo, 2007).

Con el objetivo que los alumnos adquieran y desarrollen competencias y, en particular la de modelización matemática (Blomhøj, 2008), propusimos implementar una actividad en un curso de matemática de primer año, cuyos contenidos son los del Cálculo Integral en una y varias variables, en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de La Plata (FI UNLP).

La actividad consistió básicamente en el estudio y resolución de un problema real que implica la selección de un objeto para el cálculo de su volumen, utilizando los contenidos de Cálculo Integral. Este estilo de actividad se encuentra actualmente ausente en el estudio habitual en la enseñanza del Cálculo Integral en la FI UNLP.

En lo que sigue, se describe el marco teórico adoptado, la actividad propuesta, un registro de su implementación, los resultados de una encuesta a los alumnos que la realizaron y un análisis cualitativo que evalúa el grado de desarrollo alcanzado por los estudiantes de la competencia modelización matemática.

2. Marco Teórico

Según la Real Academia Española, competencia es la “pericia, aptitud, idoneidad para hacer algo o intervenir en un asunto determinado”. En otras palabras, competencia es la manera eficaz de enfrentarse a una situación o tarea en un cierto contexto y actuar de la manera más adecuada. Un saber competente es aquel que puede usarse para resolver situaciones problemáticas en distintos contextos (Gallo, Pire, Gómez, 2008).

En relación a la enseñanza y aprendizaje de la matemática y al desarrollo de competencias, es conocido que la modelización matemática juega un rol fundamental, en particular para alumnos en carreras de ingeniería. Como mencionan Scardigli, Bello, Cicchini, Cuadrado, Sara (2013), “*Los alumnos de ingeniería necesitan alcanzar la competencia de resolver los problemas de la profesión, para lograrlo ellos deben interpretar, construir y usar representaciones de los hechos o modelos cuyo estudio se inicia con las ciencias básicas*”.

La modelización matemática se define de forma diferente según diversos autores, porque se mira desde distintos puntos de vista, desde el proceso en sí o desde su valor como estrategia de aprendizaje. También hay distintas versiones sobre sus fases, etapas y componentes.

Más allá de estas diferencias y antes de indicar qué entendemos por modelización en este trabajo, debemos diferenciar entre modelo y modelización. Siguiendo a Blomhøj (2008) decimos que “*Un modelo matemático es una relación entre ciertos objetos matemáticos y sus conexiones por un lado, y por el otro, una situación o fenómeno de naturaleza no matemática o extra-matemática*”.

Siguiendo esta línea, entenderemos por modelización matemática al proceso que tiene la finalidad de crear y usar un modelo matemático. Analíticamente es posible describir un proceso de modelización matemática consistente en los siguientes sub-procesos (Blomhøj, 2008):

- (a) Formulación del problema: que guíe la identificación de las características de la realidad percibida que será modelizada.
- (b) Sistematización: selección de los objetos relevantes, relaciones, etc. para hacer posible una representación matemática.
- (c) Traducción de esos objetos y relaciones al lenguaje matemático.
- (d) Uso de métodos matemáticos para arribar a resultados matemáticos y conclusiones.

- (e) Interpretación de los resultados y conclusiones considerando el dominio de investigación inicial.
- (f) Evaluación de la validez del modelo por comparación con datos (observados o predichos) y/o con el conocimiento teórico o por experiencia personal o compartida.
- Esto se esquematiza en la Figura 1, donde además se observa que el proceso no es lineal, sino que es cíclico.

Un alumno con competencia en modelización matemática debe ser capaz de llevar a cabo en forma autónoma y consciente todos los aspectos de un proceso de modelización en un contexto dado, tal como es mencionado por Blomhøj (2008).

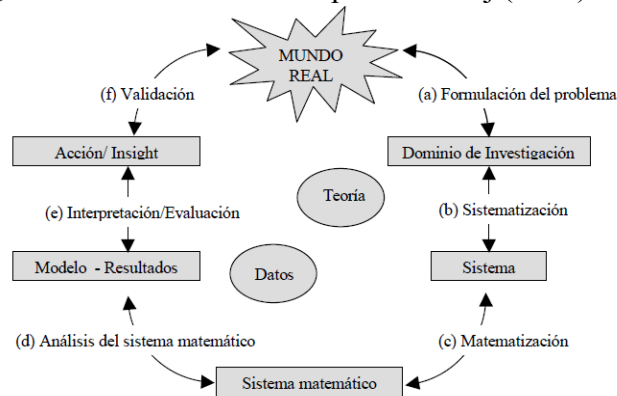


Figura 1: Un modelo gráfico de un proceso de modelización matemática (Blomhøj, 2008).

3. Objetivo

El objetivo es analizar el proceso de modelización matemática desarrollado por un grupo de alumnos que realizan una actividad propuesta para tal fin para el estudio de cálculo de volúmenes de sólidos en un curso de Cálculo Integral en la FI UNLP.

4. Metodología

La estrategia se desarrolla en un curso de matemática de primer año de la FI UNLP (Argentina), denominado Matemática B (MB) correspondiente al primer año del Ciclo Básico. Tiene una modalidad teórico-práctica, es decir que no hay espacios separados para la teoría y la práctica. Para el estudio de los contenidos, los alumnos disponen de un Libro de Cátedra editado por profesores de la asignatura. En este libro los contenidos son motivados con algún problema (geométrico, histórico o físico), luego se desarrollan los conceptos teóricos, se presentan ejemplos y ejercicios de práctica, en general de cálculo tradicional y no contextualizados.

En ese curso se propone realizar una actividad no habitual, de carácter optativo y grupal, en la cual los alumnos deben seleccionar tres sólidos reales con el objeto de calcular su volumen.

Según el autor que seguimos en este trabajo, la competencia en modelización incluye la competencia en resolución de problemas, pero no es toda la competencia en sí. Para evaluar este aspecto de la modelización en la experiencia, desde la perspectiva de los alumnos, y con la finalidad de medir la percepción de ellos, se decide realizar una encuesta. La misma consta de 4 afirmaciones para las cuales cada estudiante debe expresar su grado de acuerdo, siguiendo una escala ordinal del tipo de Likert de 5 categorías: Muy de acuerdo (MA), De acuerdo (A), Indeciso (I), En desacuerdo (D) o Muy en Desacuerdo (MD). Las afirmaciones fueron diseñadas según los indicadores de logro definidos en el “Documento sobre Competencias requeridas para el Ingreso a los

Estudios Universitarios” (CONFEDI, 2014) que tienen como fin evaluar si la competencia “Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos” ha sido alcanzada (Tabla 1)

Indicadores de logro de la competencia “Resolver problemas sencillos en Matemática, Física o Química aplicando modelos matemáticos”	Afirmaciones en la encuesta
Representa gráficamente a través de esquemas, tablas, diagramas, etc.	“El trabajo realizado me sirvió para aprender a representar objetos de la realidad con objetos matemáticos para poder averiguar propiedades de los mismos”
Utiliza escalas adecuadas. Indica las magnitudes y unidades correspondientes. Usa y realiza las conversiones de unidades necesarias. Respeto el principio de homogeneidad dimensional.	“Este trabajo me ayudó a comprender que debo ser cuidadoso con las escalas y las unidades”
Identifica datos e incógnitas. Plantea y usa ecuaciones adecuadas. Opera con números reales en forma correcta.	“Al aplicar el cálculo de integrales triples a situaciones reales, entendí claramente cómo se plantean las mismas (cómo se definen los límites de integración), y cómo se calculan (incluyendo el uso de cambios de variables y de distintas técnicas de integración)”
Completa la información necesaria recurriendo a otras fuentes: observación, experimentación, textos, internet y otras. Comunica el/los resultado/s en forma adecuada Usa la notación adecuada.	“Realizando este trabajo comprendí la importancia de expresar claramente los pasos que fui dando para construir la solución del problema, citar mis fuentes, expresar los resultados”

Tabla 1: Indicadores de logro y afirmaciones correspondientes incluidas en la encuesta

Además, se consulta a los alumnos sobre una valoración general de la propuesta de la actividad realizada utilizando tres categorías posibles: “positiva”, “negativa” o “indiferente” y que justificaran la opción seleccionada.

Por otro lado, para evaluar los logros alcanzados por los estudiantes en relación al proceso de la competencia modelización matemática, se hace un análisis cualitativo a partir de lo observado en clase y de los trabajos realizados por los grupos, desde la mirada de los profesores del curso, en este caso los mismos investigadores.

5. Desarrollo

La actividad propuesta se desarrolló en un curso de MB con alumnos de primer año de la carrera de Ingeniería en Computación. Los alumnos que optaron realizar la actividad fueron 35 de un total de 41 que conformaron 12 grupos estables de trabajo de tres o cuatro integrantes cada uno. Cada grupo seleccionó tres sólidos de su interés a partir de búsqueda en internet y de objetos de su entorno. Algunos de los cuerpos seleccionados fueron: cono de helado, trompo, torre de enfriamiento, reloj de arena, cenicero de vidrio, contenedor de escombros, mate de vidrio, jarra térmica, macetero, pelota de rugby, matraz redondo, obelisco de Buenos Aires, rampa de skate, edificio de audiovisuales, flanera, entre otros.

A modo de ejemplo, se muestra en las Figuras 2 y 3, algunas imágenes que muestran parte del proceso seguido por uno de los grupos. Este grupo seleccionó, como uno de los objetos a medir el volumen, una flanera.

Identificaron y representaron matemáticamente las superficies que forman los bordes de la flanera, dando sus ecuaciones en coordenadas cartesianas: los paraboloides $z = -x^2 - y^2 + 16$, $z = x^2 + y^2 - 144$ cortados por los planos $z=0$ y $z=6$ (subprocesos (a), (b) y (c),

Figura 2). Luego en relación al subproceso (d), seleccionan métodos matemáticos adecuados, utilizan coordenadas polares y diversos métodos de integración, para arribar al resultado del volumen de la flanera (Figura 3). En relación a los subprocesos (e) y (f) reinterpretan el resultado obtenido mencionado en la actividad que “*tomamos la flanera que usamos para evaluar las medidas para el trabajo y la llenamos de agua con un recipiente de medidas, y para llenarla necesitamos aproximadamente 2,4 litros de agua, lo que nos demostró que el cálculo que habíamos encontrado estaba acertado*”.

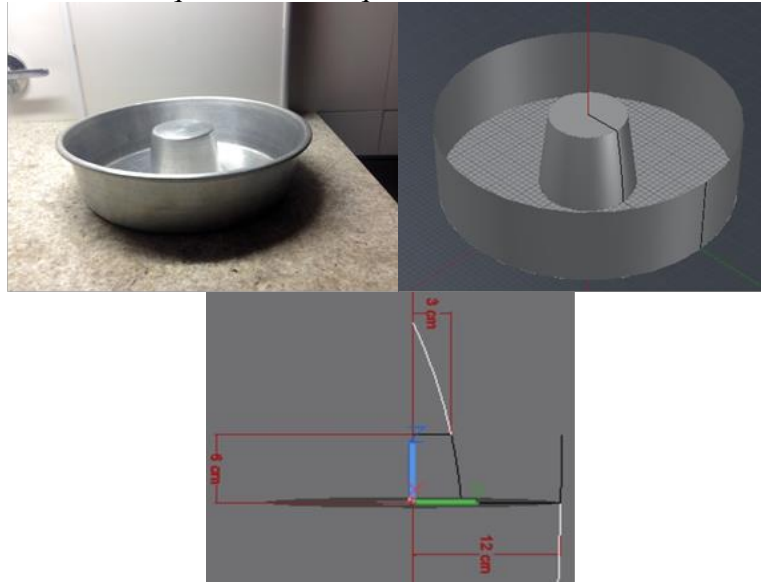


Figura 2: Objeto real (flanera) y su representación matemática en un sistema de coordenadas.

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(V) &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 \int_6^{-r^2+16} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^4 r \left(z \Big|_6^{-r^2+16} \right) = \int_0^{2\pi} \int_0^4 r (-r^2+16-6) \\
 &= \int_0^{2\pi} \int_0^4 (-r^3+10r) = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{r^4}{4} + 5r^2 \right) \Big|_0^4 = \int_0^{2\pi} (-64+80) = 16 \, d\theta \Big|_0^{2\pi} = 16 \cdot 2\pi \\
 \text{Vol}(V) &= 32 \pi \text{ cm}^3 \\
 \text{Volumen Flanera} &= \text{VolTOT}(V) \textcircled{A} - \text{VolTOT}(V) \textcircled{B} \\
 \text{Volumen Flanera} &= 864 \pi \text{ cm}^3 - 96 \pi \text{ cm}^3 \\
 \text{Volumen Flanera} &= 768 \pi \text{ cm}^3 \approx 2412 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Figura 3: Algunos de los cálculos de las integrales que calculan el volumen de la flanera.

6. Resultados

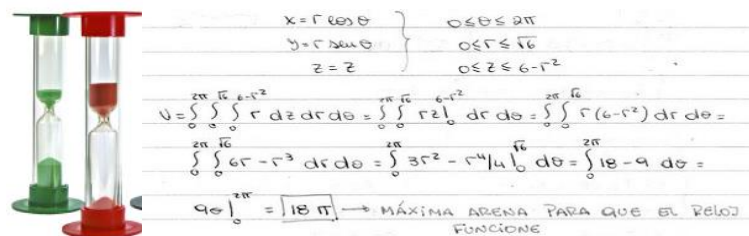
Al finalizar la actividad, se realizaron las encuestas a los alumnos. De los 35 que realizaron el trabajo, 29 completaron la encuesta correspondiente. Con respecto a los

ítems de la encuesta referidos a los indicadores de logro (Tabla 1) en todos los casos los alumnos los valoraron entre (MA) y (A). En cuanto a la valoración de la propuesta el 94% la valoraron positivamente, el 3% la valoró negativamente y el 3% indicó que le resultó indiferente. Las razones por las cuales los alumnos valoraron positivamente la propuesta fueron: el 41% aprecia la aplicación de los contenidos abordados en la asignatura a contextos reales; el 28% valoraron que el trabajo haya sido en grupos y el

17% valoraron el hecho de acreditar este tema de “cálculo de volúmenes de sólidos” por la realización del mismo. El alumno que valoró la experiencia en forma negativa, expresó que por dedicar tiempo al trabajo se atrasó en el estudio de los demás temas. El alumno que indicó que la realización del trabajo le resultó indiferente, expresó que no era un tema de su interés.

A partir de lo observado durante el desarrollo de la actividad y de los trabajos presentados por los grupos, podemos mencionar que la mayoría eligieron sólidos con superficies fronteras a las que intuían que podían modelar con superficies que habían trabajado en el Libro de Cátedra (esferas, cilindros rectos, paraboloides, planos y conos). En algunos casos como la torre de enfriamiento, la rampa de skate o el edificio de audiovisuales seleccionaron superficie fronteras “no estándares” (por ejemplo: hiperboloide, cilindro exponencial) para las cuales, debieron ajustar algunos parámetros utilizando un software matemático para modelarlos. Además, los grupos alcanzaron a desarrollar los subprocesos (b), (c) y (d). En todos los casos lograron modelar los sólidos seleccionados y calcular con las herramientas del cálculo integral su volumen. Es en los sub-procesos (c) y (d) donde se dio la mayor interacción entre los docentes y los alumnos, con preguntas vinculadas a las ecuaciones de las superficies seleccionadas cálculos y métodos de integración.

El mayor obstáculo, se encontró en las fases (e) y (f) vinculadas con la reinterpretación de los resultados obtenidos del cálculo de las integrales y su validación en el mundo real. Un ejemplo de ello se observa en la Figura 4, en la que los estudiantes utilizan un modelo para calcular el volumen de un reloj de arena. Obtienen correctamente el valor de su volumen como múltiplo de π . Pero sin reinterpretarlo en el mundo real, es decir, sin aproximar su valor, ni dando unidades de medida. A pesar de ello, el grupo que seleccionó como sólido la flanera pudo validar el resultado de su volumen hallado a partir de llenar de agua la flanera y comparar los valores encontrados.



$$\begin{aligned} x &= r \cos \theta \\ y &= r \sin \theta \\ z &= z \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq \sqrt{6} \\ 0 \leq z \leq 6 - r^2 \end{array} \right\}$$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} \int_0^{6-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} r z \Big|_0^{6-r^2} \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} r(6-r^2) \, dr \, d\theta =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{6}} (6r - r^3) \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[3r^2 - \frac{r^4}{4} \right]_0^{\sqrt{6}} \, d\theta = \int_0^{2\pi} (18 - 9) \, d\theta =$$

$$90 \Big|_0^{2\pi} = 180\pi \rightarrow \text{MÁXIMA ARENA PARA QUE EL RELOJ FUNCIONE}$$

Figura 4: Reloj de arena. Cálculo de su volumen.

7. Conclusiones

En este trabajo presentamos la implementación de una estrategia didáctica que tuvo por objetivo el desarrollo de competencias, en particular la modelización matemática. Esta fue favorecida por la modalidad de estudio en los cursos de matemática en la FI UNLP. La actividad realizada fue bien valorada por los estudiantes y se observó el desarrollo de varios de los subprocesos en especial (b), (c) y (d), durante su realización. A pesar de algunas dificultades encontradas, consideramos que es posible el desarrollo de la competencia modelización matemática en los estudiantes, cuando, como en este caso, se les propone una actividad que así la favorece.

8. Referencias

Abate, S. M., & Orellano, V. (2015). Notas sobre el curriculum universitario, prácticas profesionales y saberes en uso. *Trayectorias Universitarias*, 1, 3-11.

- Blomhøj, M. (2008). Modelización matemática-una teoría para la práctica. *Revista de Educación Matemática*, 23(2), 20-35.
- CONFEDI. (2014). Competencias en ingeniería. Mar del Plata: Universidad Fasta. Recuperado el 28/04/2014 de: <http://redi.ufasta.edu.ar:8080/xmlui/handle/123456789/409>
- de la Fuente Martínez, C. (2009). Modelos matemáticos, resolución de problemas y proceso de creación y descubrimiento en matemáticas. Conexiones y aprovechamiento didáctico en secundaria. *Construcción de modelos matemáticos y resolución de problemas*, 123-154.
- Gallo, M. J. V., Pire, A. C., & Gómez, S. P. (2008). Competencias relacionadas con las matemáticas en el marco de la convergencia europea. Recuperado el 10/06/2015 de: <http://www.eduonline.ua.es/jornadas2008/comunicaciones/2A1.pdf>
- González, E. M., & Ferreyra, A. (2000). Reflexiones sobre la enseñanza de la física universitaria. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 18(2), 189-200.
- Mateo, J. (2007). Interpretando la realidad, construyendo nuevas formas de conocimiento: el desarrollo competencial y su evaluación. *Revista de Investigación Educativa*, 25(2), 513-531.
- Scardigli, M., Bello, C., Cicchini, A., Cuadrado, G., & Sara, A. (2013). Reflexiones sobre la Modelización Matemática como una Práctica de Enseñanza y de Aprendizaje en Carreras de Ingeniería. *Revista de Informática Educativa y Medios Audiovisuales*, 10(17), 17-21.