CB-1.324

EL MODELO DE BARRAS PARA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS: EL CASO DE LA TRISOMÍA 21

Raquel García Catalán – Elena Gil Clemente
raquel.garcia@unavarra.es – elenagil@unizar.es
Universidad Pública de Navarra – Universidad de Zaragoza, España.

Núcleo temático: La resolución de problemas en matemáticas
Modalidad: CB.
Nivel educativo: Educación Primaria
Palabras clave: Resolución de problemas, Educación Especial, Formación profesorado, Aritmética

Resumen

El modelo de barras, que se utiliza en las escuelas primarias de Singapur, propone la utilización de diagramas en forma de barras rectangulares para representar las cantidades conocidas y desconocidas así como las relaciones entre ellas que aparecen en los problemas aritméticos, para hacer visible el pensamiento infantil. Sabemos, por otra parte que los niños con trisomía 21 presentan dificultades para progresar desde una adecuada comprensión de los principios de conteo hacia habilidades numéricas más avanzadas y la resolución de problemas. Dado que los estudios apuntan hacia la necesidad de aprovechar la fortaleza visual de estos niños para buscar didácticas adecuada,s el modelo anterior de claras bases geométricas, se perfila como una estrategia útil para ayudarles a superar sus dificultades.

Presentamos aquí, la puesta en marcha de unas sesiones de resolución de problemas con el método de barras con niños con trisomía 21,en Zaragoza que pone a prueba esta hipótesis con resultados iniciales prometedores.

El modelo de barras *(bar-modelling)* para la resolución de problemas aritméticos

El modelo de barras (Kho,Yeo y Lim, 2009; Yeap, 2010) es un modelo de representación de problemas de naturaleza puramente aritmética –en los que los datos corresponden exactamente a valores de las magnitudes del problema– y también de naturaleza algebraica –con datos referidos a relaciones entre las distintas magnitudes –.

El modelo consiste en identificar cada magnitud con un rectángulo de diferente longitud y en traducir adecuadamente las relaciones que existen entre las magnitudes en relaciones entre las longitudes de los segmentos, a través de la manipulación de esas barras rectangulares –sólidas o fraccionadas– y de un uso razonado de las propiedades de las operaciones aritméticas. El uso de una operación u otra, de una propiedad u otra, es elección del alumno, siempre y cuando esté justificada su aplicación, por lo que es un modelo flexible que dota al

ISBN 978-84-945722-3-4

alumno de una gran autonomía. Esta flexibilidad, junto con la aparición paulatina de las dificultades en los problemas que se presentan a los alumnos y de las variaciones ligeras en la representación de cada problema es coherente con los principios didácticos de las teorías de aprendizaje de Bruner (1961).

El modelo de barras es una excelente representación válida del problema. Al estar presentes de forma gráfica, sin números, simplemente con un dibujo, todas las magnitudes que intervienen en el problema, todas las relaciones entre ellas mostradas por el problema, la pregunta del problema y los datos, ayuda de forma muy eficiente al niño en el planteamiento de una estrategia de resolución que respeta las fases establecidas por Pòlya (1945) (ver también Mason, Burton & Stacey 2010). Al conseguirse de forma gráfica también la solución, la comprobación de que su valor numérico es coherente con los datos del problema, y que verifica los requisitos del enunciado, puede hacerse de forma rápida. Además, una vez adquirida la destreza de resolver problemas de esta manera, con números naturales pequeños como datos, la estrategia puede ser aplicada sin dificultades a datos de otra naturaleza.

El modelo de barras es además un modelo de representación pensado para ayudar al niño a avanzar desde el estadio manipulativo –se comienza utilizando policubos para los problemas de magnitudes discretas, y regletas de Cuisenaire para problemas de magnitudes continuas– hacia el estadio icónico –mediante la conversión de los primeros en barras fraccionadas y de los segundos en barras sólidas– de forma directa y natural (Bruner, 1960). Además, la manipulación geométrica de las barras utilizadas para la representación del problema, se muestra como un modelo de resolución también para aquellos problemas de naturaleza algebraica, en los que cada paso en el proceso de solución del problema puede traducirse en el modelo algebraico en un paso en el proceso de solución de una ecuación algebraica ayudando así a los alumnos a realizar manipulaciones de índole algebraica con objetos o dibujos mucho antes de poder llevarlas a cabo con variables.

Finalmente, distintas versiones del modelo de barras se pueden aplicar a una gran diversidad de problemas aritméticos. Diversos tanto por la naturaleza de las magnitudes del mismo –discretas o continuas; naturales, enteras, decimales o fraccionarias; porcentajes–, como por la variedad de situaciones y relaciones entre las magnitudes del problema a las que el modelo puede aplicarse –unión o problemas parte-todo, comparaciones tanto aditivas como multiplicativas, problemas de cambio y problemas de antes-después-. El modelo de barras

ISBN 978-84-945722-3-4

muestra la similitud interna entre los distintos tipos de problemas, ayudando así al alumno a descubrir que esa estructura común se traduce en una misma operación que puede estar presente en muy variados enunciados. Todo esto atiende a las prescripciones de la teoría de *multiple embodiment* de Diennes(1961) que propone la necesidad de una presentación múltiple y variada de los conceptos y estructuras matemáticas para llegar a su plena comprensión y adquisición.

Comprensión de la aritmética en personas con trisomía 21

La alteración genética llamada trisomía 21, es la causa más frecuente de una discapacidad intelectual congénita considerada de leve a moderada, aunque lo que implica esta discapacidad está siendo recientemente sometido a revisión (Zimpel, 2016).

Así como el aprendizaje de la lectura y de la escritura por parte de estos niños ha experimentado un gran avance en los últimos años gracias a investigaciones psicológicas y biomédicas (Flórez, Garvía y Fernández-Olaria, 2015; Troncoso y del Cerro, 2005), no puede decirse lo mismo de las matemáticas, siendo las investigaciones en este campo más bien escasas, incluidas en estudios más amplios sobre desarrollo general y no procedentes del campo de la propia disciplina matemática (Faraguer, 2014)

El interés se ha centrado en la evaluación de logros aritméticos, considerados como datos objetivos extraídos con un método pedagógico experimental que utiliza de forma reduccionista el concepto de *edad mental*. Se ha constatado que las personas con trisomía 21 tienen una dificultad para progresar desde niveles adecuados de conteo y de comprensión de la cardinalidad (Porter, 1998; Bird and Buckley, 2001; Abdelhameed, H. 2007) a otras habilidades aritméticas más avanzadas como la comprensión de la notación posicional o los algoritmos de la suma y la resta. (Buckley, 2007; Bruno, Noda, González, Moreno y Sanabria 2011; Bruno y Noda 2012).

Existen algunas características cognitivas comunes a gran parte de las personas con trisomía 21, que pueden explicar en parte estas dificultades observadas con la aritmética. En primer lugar una escasa memoria a corto plazo (Chapman y Hesketh, 2001) y un reducido campo de atención (Zimpel, 2016) que dificulta el aprendizaje de las secuencias numéricas, de los hechos aditivos o de las secuencias para resolver problemas. En segundo lugar un retraso en el lenguaje oral y en el receptivo, en ocasiones asociado a dificultades auditivas, que complica el aprendizaje del lenguaje matemático, la comprensión de enunciados complejos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

como por ejemplo los problemas aritméticos y de mensajes imprecisos. En tercer lugar un retraso en el desarrollo motor grueso y fino (Buckley y Sacks, 2003), que obstaculiza el uso ágil de material manipulativo y la escritura de las cifras. En último lugar, una alta sensibilidad a la motivación (Wishart, 2001), que provoca que estos niños presenten comportamientos elusivos ante el aprendizaje, si por ejemplo, las matemáticas que aprenden no tiene un sentido para ellos.

Sin embargo estas características cognitivas sugieren también algunas pistas para una didáctica de las matemáticas eficaz, sobre la que existe un relativamente escaso número de investigaciones sistemáticas. Bird y Buckley (2001) dirigieron una serie de monografías donde identificaron algunos principios básicos generalmente aceptados desde el punto de vista de la metodología didáctica. Existen también varias investigaciones referidas al uso de materiales concretos y de las nuevas tecnologías (Ortega, 2004; Nye, Fluck y Buckley, 2005; Rieckmann, 2016). Estos trabajos, centrados en los aspectos utilitarios de la materia –lo que supone una preferencia por técnicas y ejercicios de reconocimiento de cifras y de automatización de procedimientos– han evolucionado desde un pesimismo inicial hacia un optimismo de ambición muy moderada en cuanto a lo que las personas con trisomía 21 pueden conseguir en este terreno aritmético. Sorprendentemente hay un abandono de la geometría en las propuestas didácticas, a pesar del énfasis puesto en su potencia visual y la recomendación recurrente en todos estos estudios acerca de la utilización de métodos visuales para el desarrollo del concepto de número.

Es por ello, que recientes trabajos (Gil Clemente, 2016), han adoptado un enfoque didáctico que integra la aritmética y la geometría elementales (Israel y Millán Gasca, 2012) para ayudar a los niños pequeños a comprender más a fondo el número y que amplía sus posibilidades futuras de trabajo a algo más que la mera aplicación de procedimientos y que puede incluso contribuir a desarrollar su pensamiento abstracto. Este enfoque, renuncia a concentrar la enseñanza de las matemáticas en el desarrollo de habilidades de cálculo, que por otra parte no son básicas para construir las matemáticas posteriores (Monari, 2002).

En este contexto y partiendo de que para resolver problemas de tipo aritmético no es imprescindible conocer los algoritmos de cálculo, más aún en un mundo donde las tecnologías están al alcance de todas las personas, hemos tratado de investigar si el modelo

ISBN 978-84-945722-3-4

de barras anterior se presenta como una estrategia eficaz para que los niños con trisomía 21 avancen en la comprensión y resolución de estos problemas.

Base geométrica del modelo de barras y adecuación a las personas con trisomía 21.

El modelo de barras anteriormente descrito, sirve para que los niños visualicen las operaciones que tienen que realizar para resolver un problema, y no está centrado en el aprendizaje de algoritmos, por lo que, en un principio, pareció que podía ayudar a los niños con trisomía 21.

La asociación de números y relaciones numéricas con longitudes de segmentos y relaciones entre ellos que el modelo propone, es un ejemplo concreto de la integración entre aritmética y geometría que Millán Gasca (2015) sugiere para la iniciación matemática infantil. Integración que se basa en la visión de Thom (1971) de la *intuición del continuo* –de distancias– como primera forma del pensamiento consciente y que permite que el niño entienda las relaciones de igualdad, mayor o menor y la adición con mayor claridad si nos apoyamos en dicha intuición.

Se ha estudiado que los niños con trisomía 21 también tienen una intuición ingenua de estas ideas de igualdad, de comparación, de repetición (Gil Clemente, 2016), sobre las que se puede desarrollar un primer aprendizaje de la geometría y a partir de ella, del cálculo aritmético. La fortaleza visual de estos niños hace que la intuición geométrica sea en ellos más intensa que la intuición de número. Todo esto es coherente con el papel fundamental que Edouard Séguin (1812-1880), considerado uno de los padres de la educación especial, atribuyó a la geometría en la educación de los niños con retraso mental. Séguin (1866) basó muchas de sus propuestas didácticas en la comparación geométrica como forma de desarrollar el pensamiento abstracto de estos niños.

Muchos de los métodos o materiales llamados manipulativos que se utilizan para la comprensión del concepto de número– regletas Cuisenaire, perlas de Montessori, bloques de Diennes–, algunos de los cuales se utilizan en el origen del modelo de barras, basan su eficacia, no en que sean “visuales” o “concretos”, sino en que hablan por sí solos a los niños, al explotar esta intuición del continuo geométrica ingenua que tienen los niños (Millán Gasca, 2015), que de forma natural *acuestan* unas figuras al lado de otras para calcular su adición, a través de la repetición.

ISBN 978-84-945722-3-4

Por todo ello, consideramos que el modelo de barras puede ser una estrategia eficaz para los niños con trisomía 21 y hemos puesto en marcha una experiencia didáctica a través de un estudio de caso, que describimos a continuación.

Iniciación al uso del modelo de barras en los niños con trisomía 21: estudio de caso

Los participantes en la experiencia han sido dos niños con trisomía 21, que asisten de forma asidua a un Taller de Matemáticas dirigido por una de las firmantes de esta comunicación, en el que se trabajan contenidos integrados de aritmética y geometría elementales de forma activa. Luis, de 10 años de edad, tiene relativamente bien establecido el conteo de los números del 1 al 100, conoce el anterior y el siguiente de un número con fluidez, aunque no domina estrategias como el *contar desde.* Carmen, de 9 años de edad, cuenta relativamente bien desde el 1 hasta el 20, pero no conoce otras estrategias de conteo. Ambos dibujan las grafías de las cifras del 0 al 9, pero ninguno de los dos ha memorizado los hechos aditivos y por ello recurren al conteo para realizar operaciones que involucren la operación suma.

El objetivo inicial planteado para la experiencia fue utilizar la resolución de problemas de texto para introducir conceptos aritméticos, como la comparación, la adición y la sustracción. Se ha utilizado una metodología lúdica, a través de actividades que tengan un sentido para ellos, ya que sin sentido o motivación se crea desapego por la actividad y los niños no aprenden.

El tiempo planeado para las sesiones se adaptó a la respuesta de los niños, variando entre 20 o 30 minutos las más breves hasta algunas de 50 o 55 minutos. En el momento de escribir la comunicación se han desarrollado las cuatro primeras sesiones de un total de diez previstas.

Todas las sesiones se están grabando para permitir un análisis posterior más detallado.

En la primera de las sesiones se plantearon a los niños verbalmente, varios problemas aritméticos del tipo *parte-todo con ambas partes conocidas*. Los niños los resolvieron utilizando una estrategia manipulativa de primera fase, es decir con los objetos concretos de los que hablaba el problema–caramelos, coches, personajes de serie de televisión– .Al final de la sesión se introdujeron algunos problemas donde se hablaba de objetos no presentes– niños de su clase, árboles–y los niños tenían que sustituir estos objetos por policubos para resolverlos, usando así una estrategia manipulativa de segundo nivel.

En la segunda sesión les presentamos un cuaderno con problemas del tipo anterior –“enigmas” para ellos en un juego de detectives– que combinaban texto y dibujo. Todos los

ISBN 978-84-945722-3-4

problemas se resolvieron con policubos y se empezaron a rellenar fichas escritas de los problemas hechos, donde se le hablaba a los niños de sumar y aparecía ya el símbolo “+”. Los problemas tenían una dificultad progresiva: comenzamos dándoles datos gráficos exactos (anexos 1 y 2), sustituimos estos por icónicos (anexo 3) y finalmente, estos por numéricos (anexo 4).

En la tercera sesión se introdujo el fundamento del modelo de barras, pasando a resolver los problemas de forma gráfica, siendo los niños los que decidían cómo dibujar los datos (anexo 5). Al final de la sesión, se introdujeron los problemas *de parte-todo, con una parte desconocida* con manipulación de primer nivel para pasar pronto a la manipulación de segundo nivel con policubos (anexo 6).

En la cuarta sesión se introdujeron los problemas de *comparación de magnitudes* (anexo 7). Estos, junto a los *problemas parte-todo*, serán el fundamento del aprendizaje de la suma y de la resta en las sesiones siguientes.

Primeras conclusiones

Luis y Carmen han comprendido bien las situaciones en que se debe añadir –*juntar*–, en las que se debe separar –*romper*– y en las que se debe comparar –*saber dónde hay más*–

Han interiorizado ciertas estrategias de resolución de los problemas anteriores. Saben que para juntar hay que contar los objetos que se unen. Son capaces de representar autónomamente la unión, con objetos, con material manipulable, y con barras dibujadas. Para resolver los problemas con parte desconocida, la idea de *romper* el total formado por los policubos les ayuda a resolver el problema. Para comparar, yuxtaponen las barras físicas formadas por los policubos o establecen una correspondencia uno-a-uno entre los bloques que forman las barras dibujadas.

Estas primeras experiencias, hacen pensar que el modelo de barras, puede ser un método prometedor para ayudar a los niños con trisomía 21 a establecer una estrategia para resolver problemas aritméticos sencillos. Sin embargo, dado que para calcular la solución, los niños necesitan contar, tendremos que trabajar en sesiones siguientes habilidades relativas a esta capacidad –número siguiente y contar desde–, que nos permitan seguir avanzando.

Referencias bibliográficas

ISBN 978-84-945722-3-4

Abdelhameed, H. (2007). Do children with Down Syndrome have difficulty in counting and why? International Journal of Special Education, 22(2), 129-139.
Bird, G. & Buckley S. (2001). *Number skills for individual with Down syndrome: an overview*. Portsmouth, UK: The Down syndrome Educational Trust.
Bruner, J.S. (1960). *The Process of Education*. Cambridge: Harvard University Press.
Bruno, A., Noda, A., Gonzalez, C. Moreno L., y Sanabria, H. (2011). Addition and substraction by students with Down Syndrome. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 42, 13-35.
Bruno, A., Noda, A. (2012). Estudio de un alumno con Síndrome de Down en la comprensión del sistema decimal. Educación matemática en la infancia, 1(2), 5-22.
Bruner, J.S. (1960). The Process of Education. Harvard University Press.
Bruner, J.S. (1961). The Act of Discovery. Harvard Educational Review, 31, 21-32.
Buckley, S., y Sacks B. (2003) *Motor development for individuals with Down syndrome: an overview*. Potsmouth, UK: Down Syndrome Issues and Information.
Buckley, S. (2007). Teaching numeracy. Down Syndrome Research and Practice, 12 (1), 11-14 .
Chapman, R. y Hesketh, L. (2001). Language, cognition and short-term memory in individuals with Down Syndrome. Down Syndrome Research and Practice 7(1), 1-7.
Diennes, Z.P. (1961). *Building up Mathematics*. New York: Hutchinson Educational Ltd.
Faragher,R. & Clarke,B.(eds) (2014). *Educating learners with Down Syndrome.* New York:Routledge.
Flórez, J., Garvía, B. & Fernández-Olaria, R. (2015). *Síndrome de Down: Neurobiología, Neuropsicología, Salud Mental.* Madrid: Fundación Iberomericana Down 21.
Fuson, K. (1988). *Children´s counting and concepts of number*. New York: Springer-Verlag.
Gil Clemente, E. (2016) *Didáctica de las matemáticas para niños con síndrome de Down a partir de una visión integrada de la aritmética y geometría elementales*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Zaragoza.
Israel, G., Millán Gasca, A. (2012). *Pensare in matemática*. Bologna: Zanichelli.
Kho, T. H, Yeo S. M. & Lim, J. (2009). *The Singapore Model Method for Learning Mathematics.* Singapore:Marshall Cavendish Education.
Kho, T.H. (1987). Mathematical Models for solving Arithmetic Problems. Proceedings of the 4th SEACME, 345-351.
Mason, J., Burton, L. & Stacey, K. (2010). *Thinking Mathematically*. London: Pearson Education Limited.
Millán Gasca, A. (2015). *Numeri e Forme*. Bologna: Zanichelli.
Monari, E. (2002). Learning mathematics at school…and later on. Down Syndrome News and Update 2 (1),19-23.
Nye, J. Fluck, M. y Buckley, S. (2005). Evaluating the Numicon system as a tool for teaching number skills to children with Down Syndrome. Down Syndrome News and Update, 5(1), 2-13.
Ortega, J. M. (2004). *Nuevas tecnologías y aprendizaje matemático en niños con Síndrome de Down*. Tesis doctoral publicada en el Boletín Oficial de la Universidad de Jaén.
Pòlya, G. (1945). *How to solve it. A new Aspect of Mathematical Method*. Princeton: Princeton University Press.
Porter, J. (1998). The understanding of counting in children with severe learning difficulties and nursery children. Bristish Journal of Educational Psychology, 68, 331-345.

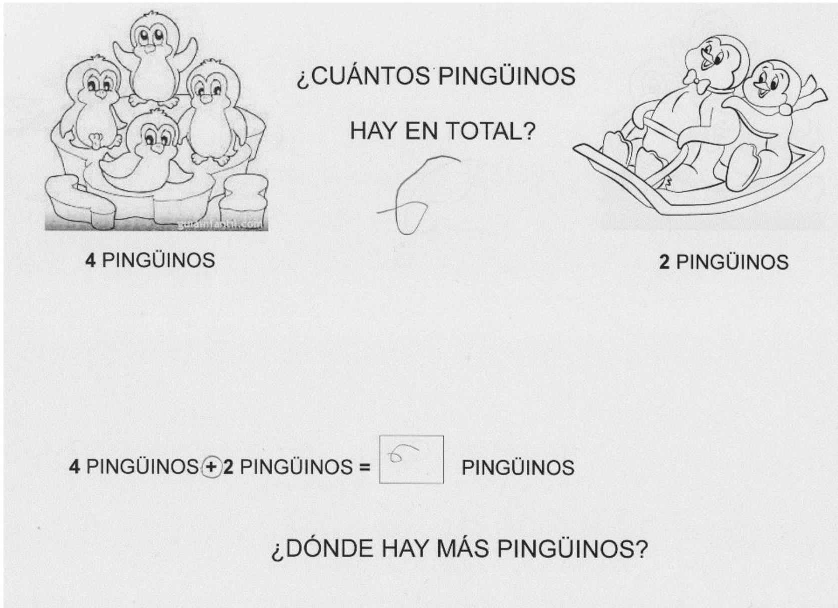
ISBN 978-84-945722-3-4

Rieckmann, T. (2016). Cognitive development and mathematics en Zimpel, A., Trisomy 21: what we can learn from people with Down syndrome, Capítulo 8, pp 158-174. Göttingen: Vandenhoeck &Ruprecht.
Séguin, E. (1866). *Idiocy: and its treatment by the physiological method*. New York: Augustus M. Kelley.
Thom R. (1971). Modern Mathematics: an educational and philosophic error? American Scientist, 59, 695-699.
Troncoso, M,V. y Del Cerro. M. (2005) *Síndrome de Down: lectura y escritura*. Barcelona: Editorial Masson y Fundación Síndrome de Down de Cantabria.
Yeap B. H. (2010). *Bar Modelling: a problem solving tool. From Research to practice*. Singapore: Marshall Cavendish Education.
Wood, D., Bruner, J., & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 17, 89-100.
Wishart, J.(2001). Motivation and learning styles in young children with Down Syndrome. Down Syndrome Research and Practice, 7(2), 47-51.
Zimpel, A. (2016) *Trisomy 21: what we can learn from people with Down Syndrome*. Göttingen: Vandenhoeck &Ruprecht.

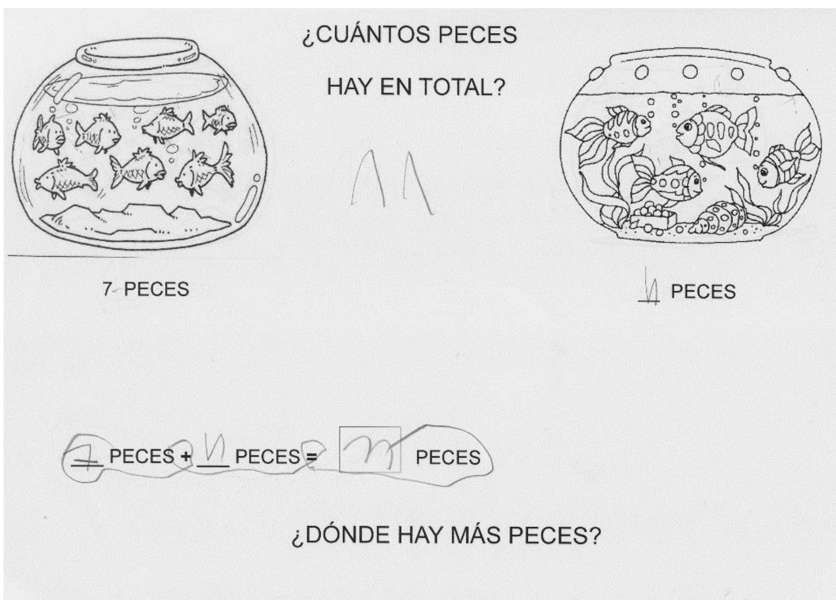
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexos

Anexo 1. Problemas de parte-todo, todo desconocido. Datos gráficos exactos

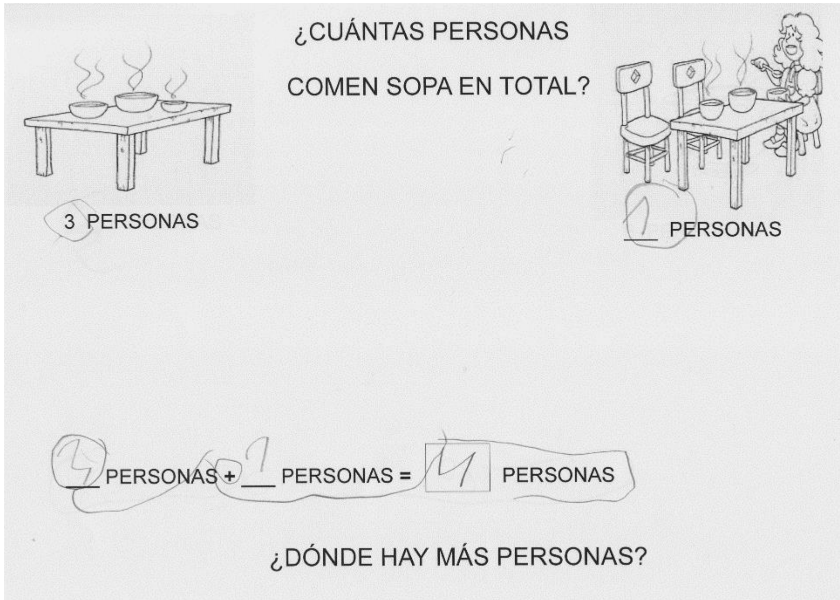


Anexo 2. Problemas de parte-todo, todo desconocido. Datos gráficos exactos

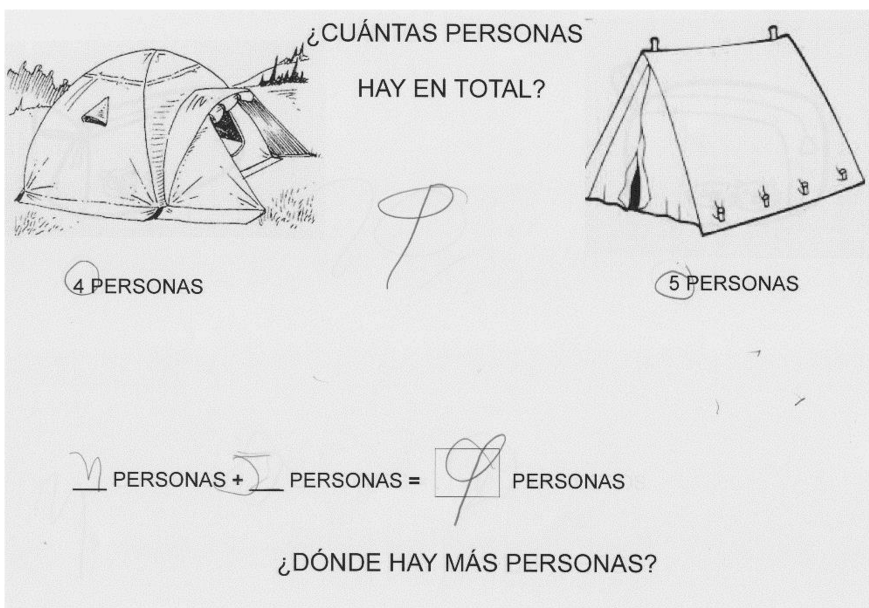


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 3. Problemas de parte-todo, todo desconocido. Datos gráficos icónicos

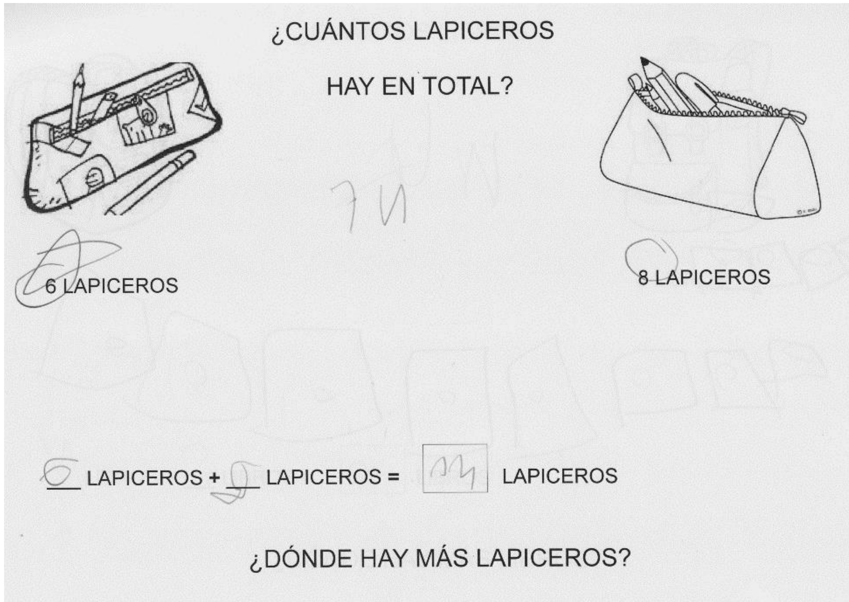


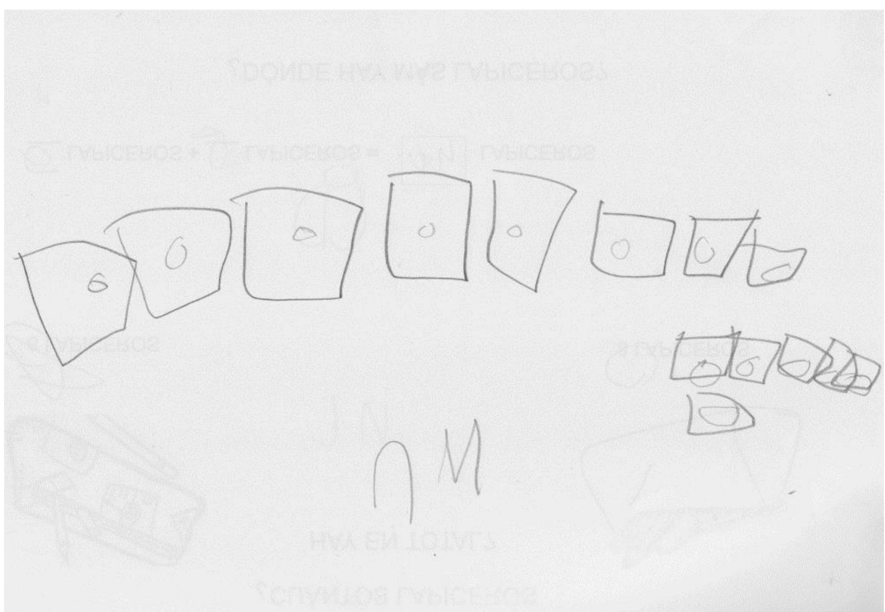
Anexo 4. Problemas de parte-todo, todo desconocido. Datos numéricos. Resolución con policubos.



VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

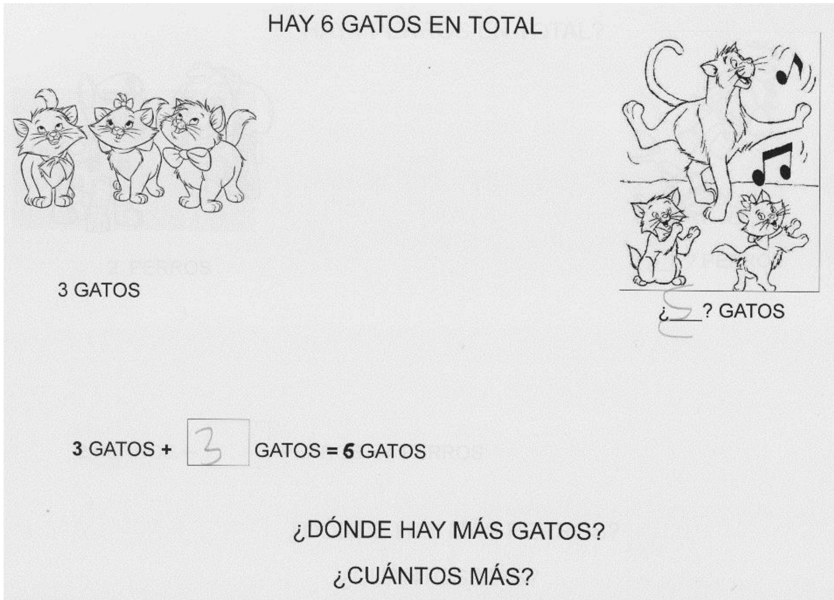
Anexo 5. Problemas de parte-todo-todo desconocido. Iniciación al modelo de barras



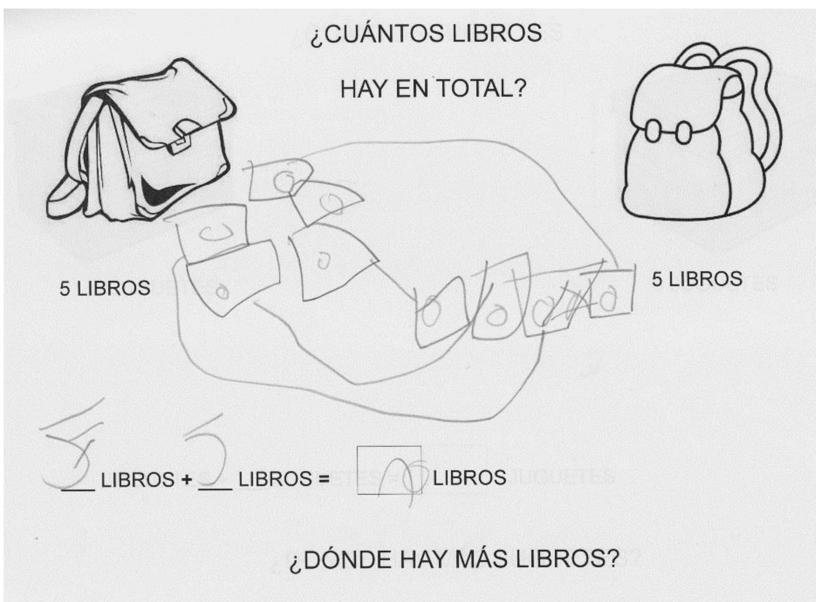


VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 6: Problemas de parte-todo, con una parte desconocida



Anexo 7 Problemas de comparación



ISBN 978-84-945722-3-4