CB-1.388

DISEÑO DE EXPERIENCIAS DE AULA USANDO RAZONAMIENTO AUTOMÁTICO CON GEOGEBRA

Zoltán Kovács[1] – Tomás Recio[2] – M. Pilar Vélez[3]
zoltan@geogebra.com – tomas.recio@unican.es – pvelez@nebrija.es
[1]Private Pädagogische Hochschule der Diözese Linz, Austria; [2]Universidad de Cantabria, España; [3]Universidad Antonio de Nebrija, España.

Núcleo temático V: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.
Modalidad: CB
Nivel educativo: 3
Palabras clave: Enseñanza secundaria, geometría, razonamiento automático, GeoGebra

Resumen

Las últimas versiones de GeoGebra disponen de herramientas y comandos que permiten hacer razonamiento automático en geometría (GGB-ART); esto es, derivar, descubrir y/o demostrar, de modo general y riguroso, propiedades sobre una construcción geométrica representada en GeoGebra. El propósito de esta comunicación es exponer, a través de diversos ejemplos, las posibilidades de GGB-ART, así como plantear el diseño de experimentos de aula para estimar el posible impacto de estas herramientas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Para ello consideramos que es necesario comenzar promoviendo la reflexión colectiva sobre las oportunidades y diferencias –frente a la metodología tradicional-- que plantearía el uso escolar de los comandos de GGB-ART. En definitiva, se trata de avanzar hacia un marco en el que desarrollar experiencias de aula que aprovechen estas herramientas, tanto en un contexto escolar clásico (como utensilio auxiliar del currículo tradicional) como en un contexto curricular diferente, en el que se asuma la disponibilidad y popularización de una especie de "calculadora geométrica" entre el alumnado.

Introducción

El razonamiento automático en geometría ha sido objeto de estudio e investigación durante los últimos 50 años desde diferentes de enfoques. Véase, por ejemplo, el trabajo pionero de Gelertner (1959) en el contexto de la inteligencia artificial; o el conocido libro de Chou (1988), en el marco de la geometría algebraica, que ha inspirado gran número de trabajos posteriores basados en el cálculo simbólico (por ejemplo, el de Recio & Vélez (1999)). Sin embargo, el uso e impacto de tales aportaciones en el contexto educativo ha sido muy limitado.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

En contraste, durante las últimas décadas se ha generalizado el uso de entornos de geometría dinámica[20] en el ámbito escolar. Entre ellos, uno de los más recientes y también el más popular, por su carácter abierto y multiplataforma, es GeoGebra[21].

Este mismo contraste se refleja en documentos recientes que pretenden dar una visión panorámica de la enseñanza de la geometría. Así, en el "ICME-13 Survey on geometry in education" (Sinclair et al., 2016) se incluye una sección dedicada a estudiar el papel de la tecnología en este contexto y, otra, sobre los avances en la enseñanza y el aprendizaje de los procesos de demostración en geometría; pero ninguna se refiere al uso de herramientas de demostración automática. En todo caso algunas conclusiones del citado informe invitan a investigar el papel de la tecnología en el aula, a través del diseño de tareas y de la práctica docente: en este sentido, creemos que es llegado el momento de iniciar tales investigaciones en lo que se refiere a GGB-ART.

Es fácil observar que los sistemas de geometría dinámica pueden resultar herramientas muy útiles para el ejercicio del razonamiento geométrico en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Trazar, con uno de estos programas, una construcción geométrica y analizar diferentes configuraciones de la misma mediante el arrastre de elementos de dicha construcción, permite conjeturar propiedades y convencerse de su validez en un gran número de casos, como elementos auxiliares para avanzar hacia la obtención, por parte del alumno, de una demostración matemática rigurosa de cierta propiedad.

Pero nuestra comunicación hace referencia a otra característica de algunos de los sistemas de geometría dinámica. Así, cuando hablamos de *razonamiento automático en geometría* nos referimos, específicamente, al caso en el que estos sistemas tengan, además, implementados ciertos algoritmos que los conviertan en una suerte de "calculadora geométrica", capaz de analizar automáticamente ciertas tareas (derivar relaciones, descubrir propiedades o demostrar/refutar enunciados) con rigor matemático, es decir, no simplemente de modo visual, numérico o probabilístico, uniendo, así, la capacidad gráfica de los sistemas de geometría dinámica y la capacidad lógica del razonamiento automático en geometría mediante cálculo simbólico.

[20] Véase: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_interactive-geometry_software

[21] Véase: https://www.geogebra.org

ISBN 978-84-945722-3-4

Nuestra comunicación tiene como objetivo presentar la reciente implementación en GeoGebra de herramientas y comandos para el razonamiento automático en geometría. Además, plantea la necesidad de reflexionar, por parte de la comunidad educativa, sobre el papel de tales herramientas y sobre su aprovechamiento, diseñando experiencias de enseñanza y aprendizaje, tanto en el contexto actual, donde el ordenador se concibe simplemente como un medio para la enseñanza tradicional de la geometría, como en un contexto didáctico diferente, en el que la enseñanza de la geometría esté marcada por la tecnología.

Derivación, descubrimiento y demostración automática en geometría

Entendemos por "derivación automática de propiedades geométricas" cualquier algoritmo que, a partir de una configuración geométrica y una serie de elementos de ésta, nos devuelva, de modo riguroso, alguna relación verificada por tales elementos en la configuración dada. Por ejemplo, dado un triángulo y señalando la longitud de sus lados y su área, el algoritmo de derivación automática hallaría la fórmula de Heron (o alguna de sus variantes) relacionando las longitudes de los lados y el área de un triángulo.

Nos referimos a "descubrimiento automático en geometría" en el caso de aquellos algoritmos que encuentran de modo sistemático hipótesis complementarias necesarias (y suficientes) para que un enunciado geométrico que hemos conjeturado sea cierto.

Por ejemplo, dados un triángulo y un punto libre, consideremos los tres puntos simétricos de este con respecto a los lados del triángulo. Conjeturamos, entonces, que estos tres puntos están alineados[22]. Obviamente esta conjetura es falsa, pero un algoritmo de descubrimiento automático nos debería dar la condición necesaria (y suficiente) para ubicar el punto libre de forma que sus simétricos estén alineados.

Finalmente, la "demostración automática de enunciados geométricos" incluye algoritmos que admiten como entrada un enunciado geométrico, tal como: "Si trazamos dos segmentos desde un vértice de un cuadrado hasta los puntos medios de sus dos lados adyacentes, entonces la diagonal opuesta queda dividida en tres segmentos iguales"[23], y devuelven una respuesta matemáticamente rigurosa (ej. no basándose en comprobaciones probabilísticas) de verdadero o falso al enunciado dado.

[22] Este ejemplo aparece en Recio & Vélez (1999).

[23] Este ejemplo aparece en Howson, G. and Wilson, B. (1986). ICMI Study: School mathematics in the 1990's. Cambridge University Press.

ISBN 978-84-945722-3-4

Herramientas GeoGebra para el razonamiento automático (GGB-ART)

Como hemos señalado anteriormente el primer propósito de esta comunicación es presentar la reciente implementación en GeoGebra (2016) de herramientas y comandos para la derivación, el descubrimiento y la demostración automática de enunciados geométricos (Abánades et al., 2016; Hohenwarter et al., 2016).

Para comenzar a usar GGB-ART tenemos que dibujar en GeoGebra una construcción geométrica. A partir de aquí GeoGebra ofrece varias posibilidades para explorar y conjeturar propiedades geométricas de nuestra construcción: podemos investigar visualmente, arrastrando los objetos libres, creando deslizadores y/o activando la traza de un objeto al mover otro; podemos usar la herramienta *Relación*, para establecer propiedades comunes a varios objetos, o la herramienta *Lugar*, para conocer la traza de un punto sujeto a ciertas restricciones dadas por nuestra construcción.

Tales métodos son bien conocidos y utilizados usualmente por la comunidad GeoGebra. Están recogidos e ilustrados con abundantes ejemplos en los materiales de GeoGebra que se guardan en https://www.geogebra.org/materials/ .

La pregunta entonces es: ¿qué aporta de nuevo GGB-ART a GeoGebra? Pues bien, hasta ahora las herramientas mencionadas (*Relación*, *Lugar*) eran básicamente numéricas, es decir, no eran rigurosas desde el punto de vista matemático ni generales: sólo aportaban información numéricamente aproximada sobre cada instancia específica de la construcción, con coordenadas concretas. Por lo tanto, el uso de tales herramientas no permite concluir, con generalidad, acerca de la certeza o falsedad matemática de la relación o del lugar visualizado, sólo podemos conjeturar que "parece" ser así en muchos casos.

GGB-ART aporta a GeoGebra nuevas capacidades para el razonamiento automático en Geometría Euclídea plana. Esto se consigue utilizando un motor de cálculo simbólico detrás de la construcción concreta dibujada. Básicamente, a las coordenadas de los puntos libres de nuestra construcción se les asignan, internamente, valores paramétricos (ej. (a,b)); y a las coordenadas de los puntos construidos a partir estos se les asignan valores variables (ej. (x,y)); así, las relaciones geométricas entre los objetos de la construcción se expresan mediante polinomios en esas variables con coeficientes paramétricos.

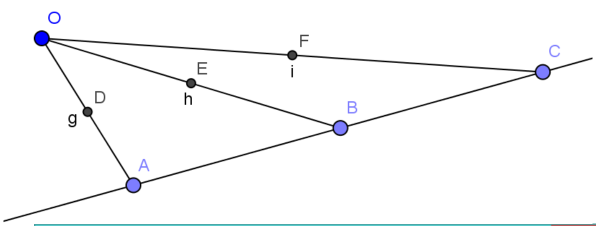
ISBN 978-84-945722-3-4

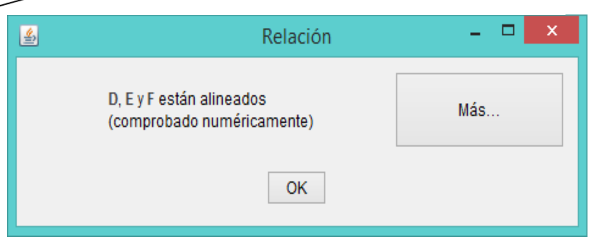
Proponemos a continuación un ejemplo de tarea que nos ayudará describir los comandos e ilustrará las posibilidades de GGB-ART.

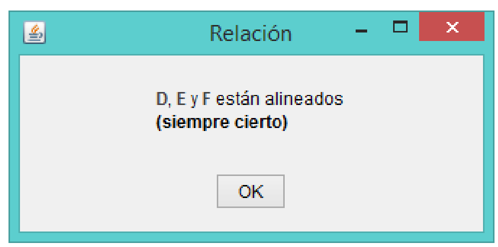
Derivación: hallar (comando `Relación`) las relaciones existentes entre objetos de una construcción geométrica y/o conjeturar.

Cuando ejecutamos el comando `Relación` se muestra una caja con un mensaje que da información numérica (esto es, para la construcción dibujada con coordenadas concretas) sobre igualdades, incidencias, paralelismo, perpendicularidad, concurrencias o alineaciones de uno a varios objetos seleccionados. Algunas de estas propiedades, numéricamente establecida, puede ser analizada en el caso general (con coordenadas arbitrarias): en estos casos aparece en la caja un botón *Más…* que nos aporta información adicional.

Por ejemplo, tracemos con GeoGebra tres puntos *A, B* y *C* en una recta y un punto libre O y preguntemos por la relación entre los puntos medios *D, E* y *F* de los segmentos *OA, OB* y *OC* respectivamente: escribimos en la línea de comandos `Relación[{D,E,F}]`.





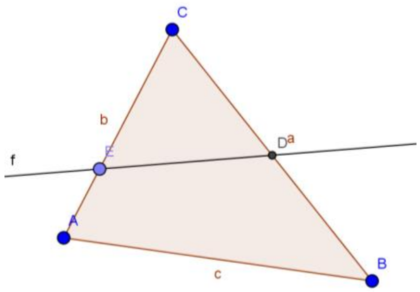


A continuación podemos proponer trazar la recta *DE* que evidentemente pasará por *F*. ¿Qué relación hay ente las rectas *AB* y *DE*?

Investiguemos una configuración similar desde un punto de vista diferente, es decir descubriendo donde tendría que estar E para que ambas rectas sean paralelas:

Descubrimiento: determinar (comando `EcuaciónLugar[<Expresión lógica>,<Punto libre>]`) las modificaciones que se deben efectuar en la construcción geométrica para que una relación sea cierta, es decir, ajustar nuestro enunciado para que tal relación sea verdad.

ISBN 978-84-945722-3-4



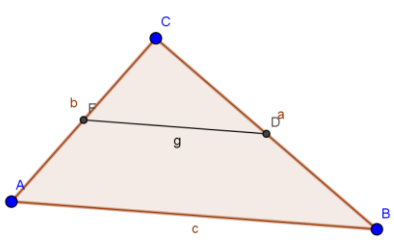
Por ejemplo, construyamos un triángulo de vértices *A*, *B* y *C* y lados opuestos *a*, *b* y *c* respectivamente. Sea *D* el punto medio de *a* y consideremos un punto *E* en el lado *b*. Nos preguntamos ahora, ¿dónde tiene que estar *E* para que *AB* y *DE* sean paralelas?

Hagamos la pregunta a GeoGebra, escribiendo en la barra de comandos: `EcuaciónLugar[SonParalelas[c,f],E]`. Al ejecutar el comando GeoGebra calcula una ecuación implícita y dibuja su traza. En este caso se trata de un único punto que resulta ser el punto medio de *b*.

A continuación podríamos verificar esta conjetura creando el punto medio *F* del segmento *b* y preguntando sobre los segmentos *AB* y *DF* mediante `Relation`. Incluso podríamos plantear más preguntas sobre los segmentos *AB* y *DF*. Puesto que es evidente que no tienen la misma longitud, podríamos preguntarnos, por ejemplo, si la longitud de *DF* es 1,5 veces la longitud de *AB*.

La experiencia podría terminar aquí o bien podríamos intentar verificar si nuestras conjeturas son un teorema, es decir, demostrándolas, bien acudiendo a lápiz y papel o bien aprovechando las funcionalidades de demostración automática GGB-ART.

Demostración: Comprobar (comandos `Demuestra[<Expresión lógica>]` y `DemuestraDetalles[<Expresión lógica>]`) si las relaciones conjeturadas son ciertas en general (es decir, si son teoremas) o si se verifican salvo en algunos casos (en general, degenerados).



Retomando el ejemplo anterior, una vez trazado el punto medio *F* de *b* y el segmento *g* que une *D* y *F*, pedimos a GeoGebra que demuestre nuestra conjetura. Para ello escribiremos en la línea de comandos: `Demuestra[SonParalelas[c,g]]`.

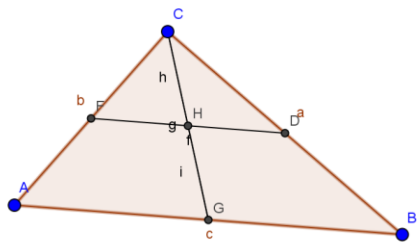
La respuesta aparece en la “Vista algebraica” en el listado “Valor lógico” como *true*.

Intentemos ahora encontrar algún teorema válido para la relación ente los segmentos c y g. Escribamos entonces `Demuestra[c==3g]` y la respuesta es *indefinido*. Esto significa que

ISBN 978-84-945722-3-4

GeoGebra no puede decidir si el enunciado es falso o es cierto bajo ciertas condiciones. En tal caso el comando `DemuestraDetalles` nos puede ayudar.

Pongamos en la línea de comandos `DemuestraDetalles[c==3g]`. La respuesta aparece ahora en el apartado "Lista" de la "Ventana algebraica" como *lista1=false*. Dejamos para el lector la demostración de *c=2g*.



Podríamos incluso dar una vuelta más a nuestro ejemplo y volver al principio.

Construimos el punto medio *G* de *c* y trazamos el segmento *f* entre *C* y *G*. Sea *H* el punto de intersección de *f* y *g*. Preguntemos si los segmentos *h* e *i* en que divide *H* al segmento *g* son iguales

En este caso `Demuestra[h==i]` responde *true*. Y si queremos saber más `DemuestraDetalles[h==i]` nos devuelve {*true*,{*"Están alineados[A,B,C]"*}} lo cual significa que nuestra conjetura es cierta excepto en un caso degenerado, cuando *A*, *B* y *C* están alineados.

Razonamiento automático con GeoGebra en el aula de matemáticas

El segundo objetivo de esta comunicación es plantear a la comunidad de educadores el diseño de tareas de aula que nos permitan estimar, más adelante, mediante una evaluación de las experiencias en el aula, el posible impacto de estas herramientas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Para ello hacemos una llamada a la colaboración y a la reflexión colectiva sobre las oportunidades y diferencias que plantea el uso escolar de los comandos de GGB-ART, buscando dar respuesta a preguntas como: ¿son realmente útiles las herramientas GGB-ART para la enseñanza y aprendizaje de la geometría? En caso afirmativo, ¿para qué aspectos?, ¿cuáles deberían ser los requisitos y cambios en el contexto educativo, si se evidencia la utilidad didáctica de herramientas tales como GGB-ART? (Botana, Recio & Vélez, 2017).

Nuestra propuesta aboga por poner en marcha experimentos de aula que estudien el aprovechamiento de estas herramientas desde dos puntos de vista:

ISBN 978-84-945722-3-4

1.- Desde el contexto curricular y didáctico actual, en el que GGB-ART actuaría como utensilio auxiliar del currículo tradicional, complementado las utilidades que ya proporciona GeoGebra al razonamiento en geometría.

En este contexto el comando `Relación` tendría un papel protagonista por su sencillez y potencia a la hora de conjeturar propiedades en una construcción, mientras que la etapa de demostración rigurosa se podría continuar desarrollando con lápiz y papel.

2.- Desde otro contexto curricular y didáctico diferente, en el que se asuma la disponibilidad y popularización de una "calculadora geométrica". Se trataría de otra forma de aproximarse a la geometría que combinaría la experimentación empírica y el razonamiento formal mediante la interacción hombre-máquina, en línea con la propuesta *computer-mediated thinking* (Corless, 2004) basada en la teoría *material intelligence* (diSessa, 2001). Una propuesta en la que el desarrollo cognitivo y las competencias computacionales del estudiante se ven reforzadas por la interacción con el ordenador; y en la que el papel del profesor y el diseño de tareas son clave.

En definitiva, se trata de confrontar (y poner a cooperar!) el "enseñar de un modo diferente" con "enseñar algo diferente"!

Referencias bibliográficas

Abánades, M.A., Botana, F., Kovács, Z., Recio T. & Sólyom-Gecse, C. (2016). *Development of automatic reasoning tools in GeoGebra*. ACM Communications in Computer Algebra. Volume 50 Issue 3, September 2016. pp: 85-88, and Software Demonstration Award at the ISSAC 2016 Conference. Recuperado de http://www.issac-conference.org/2016/awards.php).

Botana, F., Recio, T. & Vélez, M.P. (2017). *The role of automated reasoning of geometry statements in mathematics instruction.* Poster CERME-10, TWG 15: Teaching Mathematics with Technology and Other Resources. Dublin. Recuperado de https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0181.pdf

Chou, S.C. (1988). *Mechanical Geometry Theorem Proving*. D. Reidel Pub. Co. Dordrecht, Holland.

ISBN 978-84-945722-3-4

Corless, R. (2004). *Computer-mediated thinking*. Proceedings of the TIME-2004 Workshop, Montreal, Canada. Recuperado de http://www.apmaths.uwo.ca/~rcorless/frames/PAPERS/EDUC/CMTpaper.pdf

Di Sessa, A. (2001). *Changing minds: Computers, learning and literacy*. MIT Press. Cambridge, Ma. USA.

Gelertner, H. (1959): *Realization of a geometry theorem proving machine.* Proc. Int. Conf. on Information Processing. Paris, UNESCO house. pp. 273-282.

Hohenwarter, M., Kovács, Z. & Recio, T. (2016). *Deciding geometric properties symbolically in GeoGebra*. In: R&E-SOURCE, Open Online Journal for Research and Education, Special Issue #6, March 2017, ISSN: 2313-1640, http://journal.ph-noe.ac.at

Recio, T. & Vélez, M.P. (1999). Automatic Discovery of Theorems in Elementary Geometry. *Journal of Automated Reasoning* 23, 63-82. DOI: 10.1023/A:100613532210.

Sinclair, N., Bartolini Bussi, M.G., de Villiers, M. et al. (2016). Recent research on geometry education: an ICME-13 survey team report. *ZDM Mathematics Education*, 48(5), pp 691-719.

ISBN 978-84-945722-3-4