CB-1.314

DIVERSIFICANDO RECURSOS PARA A COMPREENSÃO DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Belmira Mota – Rosa Tomás Ferreira
belmiramota@gmail.com – rferreir@fc.up.pt
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – CMUP, Portugal

Núcleo temático: Recursos para o ensino e aprendizagem das matemáticas
Modalidade: CB
Nível educativo: Terciário
Palavras chave: Princípio Fundamental da Contagem; Recursos; Resolução de problemas de contagem

Resumo

O Princípio Fundamental da Contagem (PFC) está subjacente às fórmulas das operações combinatórias (arranjos e combinações) e o seu uso é central na resolução de problemas de contagem, mas os alunos têm dificuldades em reconhecer situações de natureza multiplicativa (e.g., Lockwood & Caughman, 2016; Tillema, 2013). Para compreender como a diversificação de recursos pode apoiar a compreensão do PFC e a resolução de problemas de contagem, a professora-investigadora propôs a uma turma do 12º ano (17-18 anos), duma escola no interior norte de Portugal, a resolução, em pequenos grupos, duma tarefa de contagem com algum grau de abertura. Foi sugerido o recurso ao smartphone na pesquisa necessária à resolução da tarefa.

Os dados foram recolhidos em duas aulas de 90 minutos através de observação participante, gravações em vídeo e recolha documental das produções dos alunos na tarefa proposta. Ao longo da pesquisa efetuada, os alunos sentiram necessidade de elaborar listagens e, posteriormente, diagramas que conduziram à utilização adequada do PFC. Os resultados sugerem que os diagramas facilitam a distinção das situações de natureza multiplicativa das de natureza aditiva. A diversificação de recursos contribuiu para a compreensão do PFC.

Introdução e motivação

Várias investigações indicam a necessidade de compreender o pensamento dos alunos na resolução de problemas de contagem (e.g., Lockwood, 2013). Tendo em conta que o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) está subjacente à generalidade dos problemas de contagem, consideramos importante procurar compreender o pensamento dos alunos na sua aplicação. Dada a falta de estudos que abordem explicitamente o PFC (Lockwood, Reed, & Caughman, 2016), procurámos analisar o modo como alunos que ainda não conhecem as operações combinatórias entendem e aplicam o PFC. Para tal, envolvemos os alunos duma

ISBN 978-84-945722-3-4

turma do 12.º ano (17-18 anos) que, no contexto de uma experiência de ensino (integrada numa investigação mais ampla em curso), exploraram uma tarefa com algum grau de abertura recorrendo a uma diversidade de recursos. Neste trabalho pretendemos responder às seguintes questões de investigação: (1) De que modo os alunos utilizam o PFC? (2) De que modo os alunos distinguem as situações de natureza multiplicativa, das de natureza aditiva? e (3) De que modo a diversidade de recursos utilizada contribuiu para a aprendizagem do PFC?

O papel dos recursos na aprendizagem matemática

Tal como Adler (2000), conceptualizamos o termo *recurso* como um nome (objeto) e um verbo (ação). Os recursos devem ser transparentes pois devem desempenhar simultaneamente as funções de visibilidade (têm de ser visíveis para serem utilizados) e invisibilidade (é através deles que se atinge o conhecimento pretendido). Porém, Adler sublinha que a transparência não é uma característica inerente ao recurso, mas uma função subjacente ao seu uso, pelo que pode facilitar ou bloquear o acesso ao conhecimento. Assim, para que um recurso promova a aprendizagem, em alguma altura necessita deixar de ser o objeto (visível) de atenção e passar a ser o meio para atingir o conhecimento, ou seja, deve ficar invisível.

Adler (2000) sublinhou que considerar apenas os recursos humanos e materiais (que denominou *recursos básicos*) é restritivo, dado que existem muitos outros, tais como matemáticos, culturais e sociais que não devem ser esquecidos. Assim, propôs a ampliação do conceito de recurso e classificou-os em três categorias. Os *recursos humanos* incluem os professores e o seu conhecimento pedagógico e científico. Os *recursos materiais* incluem as tecnologias, os manuais, os próprios objetos matemáticos (e.g., esquemas, diagramas, teoremas, números) e todos os objetos que possam ser usados no processo de ensino-aprendizagem. Os *recursos culturais* incluem a linguagem utilizada e o tempo disponível (e.g., calendário escolar, duração da aula).

Neste estudo, utilizámos recursos de todas estas categorias. A professora foi o recurso humano privilegiado; a tarefa, o material de escrita, a calculadora, o *smartphone*, os esquemas, diagramas e o PFC foram os recursos materiais escolhidos; e a linguagem e o tempo constituíram os recursos culturais habituais. Relativamente a estes últimos,

ISBN 978-84-945722-3-4

salientamos que o contexto da tarefa é familiar a muitos dos alunos da turma e que as conversas entre eles durante a discussão dos resultados obtidos, constituíram-se num ponto fundamental no desenvolvimento deste estudo. A escolha do *smartphone* prendeu-se com o facto de ser um objeto que todos os alunos possuem e sem o qual (aparentemente) não conseguem viver. Geralmente é considerado um bloqueio à aprendizagem, na medida em que se constitui como um fator externo de distração. Paradoxalmente, tencionámos torná-lo num recurso *invisível* promotor da aprendizagem. Pretendemos que, durante a exploração da tarefa, os alunos passassem a usar os seus *smartphones* como um meio para a obtenção de dados que lhes permitissem apresentar uma resposta coerente à tarefa proposta e ignorassem as funcionalidades que usam habitualmente, como por exemplo, as redes sociais.

Metodologia de investigação

Este trabalho insere-se numa investigação mais ampla em curso, qualitativa e interpretativa, com *design* de experiência de ensino (Steffe & Thompson, 2000). Os 31 alunos da turma participante no estudo foram divididos em sete grupos de quatro alunos e um de três. A experiência de ensino realizada foi conduzida num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, que se distingue do ensino direto pelos papéis desempenhados pelos alunos e professores, pelas tarefas propostas e modo como são geridas, e pela comunicação que é estabelecida dentro da sala de aula (e.g., Menezes, Tomás Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014). Enquanto que no ensino direto o processo está centrado no professor que transmite toda a informação aos alunos, numa abordagem exploratória, o aluno assume um papel ativo na sua própria aprendizagem, explorando tarefas de natureza diversificada, individualmente ou em colaboração com outros alunos, numa ambiente pautado por uma comunicação essencialmente reflexiva e instrutiva (Menezes et al., 2014; Ponte, 2005).

A tarefa *Viagem Lisboa – Vila Meã* (Figura 1) pretendia conduzir os alunos à aplicação do PFC. Foi desenhada pela professora e objetivava que fossem os próprios alunos a decidirem o número de elementos que considerariam em cada uma das etapas independentes, subjacentes ao PFC. Esta tarefa foi trabalhada em duas aulas de 90 minutos, de cunho exploratório, que se desenrolaram de acordo com a estrutura apresentada por Oliveira e colaboradores (2013). A primeira aula contemplou as duas primeiras fases: *introdução* e

ISBN 978-84-945722-3-4

realização da tarefa; na segunda aula, foi efetuada uma *discussão coletiva* seguida pela *sistematização das aprendizagens*.

O João é natural de Vila Meã mas trabalha em Lisboa. Ao fim-de-semana vem a Vila Meã visitar a família e os amigos. Umas vezes usa o avião, outras o comboio e outras o seu próprio carro.

Esta semana, o carro do João precisava fazer a revisão e, por isso, no domingo, o João foi para Lisboa de boleia com um amigo. Mas, na sexta-feira, terá de escolher entre o avião ou o comboio, dado que não tem boleia. Se vier de avião, apenas pode escolher voos que saem de Lisboa a partir das 17:00 e, se vier de comboio, pode selecionar um a partir das 15:30. De quantas maneiras diferentes o João pode fazer a viagem Lisboa – Porto – Vila Meã?

Figura 1. Tarefa proposta aos alunos

Na fase da *introdução*, a professora começou por fazer notar que, utilizando transportes públicos, o João tem, necessariamente de fazer a viagem Lisboa – Porto e, seguidamente, Porto – Vila Meã. Informou ainda que a viagem seria efetuada na sexta-feira da semana em curso, aquando da aplicação da tarefa. Dado que todos os alunos da turma possuíam um *smartphone*, a professora sugeriu que os utilizassem para investigar o número de opções que o João dispunha em cada etapa. Recomendou que consultassem os *sites* das companhias de transportes públicos que pretendiam usar e/ou *sites* que permitissem visualizar voos de diversas companhias aéreas.

Na fase de *realização*, os alunos trabalharam autonomamente em grupos e a professora monitorizou este trabalho, procurando apreender as estratégias adotadas e as resoluções por eles conseguidas, e fornecendo *feedback* sempre que tal se mostrava necessário, sem nunca lhes dar a resposta ou diminuir o nível de exigência cognitiva da tarefa (Stein & Smith, 2009). Com base nesta monitorização, a professora selecionou três resoluções para serem apresentadas e discutidas com toda a turma. A escolha das resoluções para a fase de *discussão coletiva* passou por incluir resoluções que retratavam as dos vários grupos ou demonstravam uma distinção clara entre uma abordagem multiplicativa e uma abordagem aditiva. A professora apoiou os alunos na sua apresentação, colocando questões que procuravam ajudar e esclarecer ideias e a envolver toda a turma na validação das respostas. A fase de *sistematização das aprendizagens* decorreu após a discussão coletiva e incluiu a

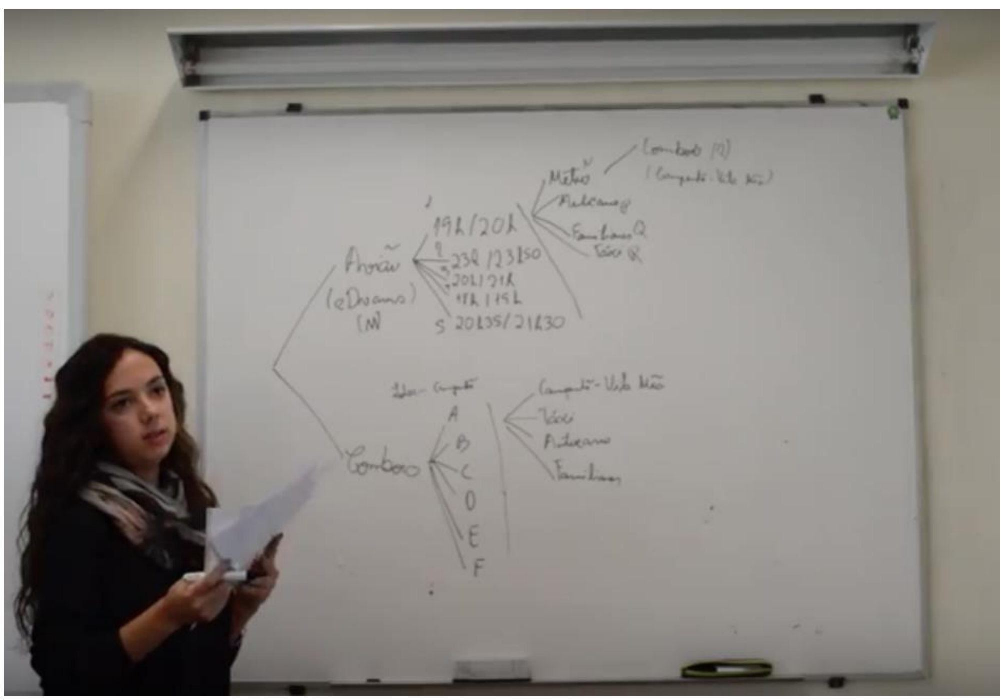
ISBN 978-84-945722-3-4

formalização do PFC, apoiada nas conclusões a que chegaram os alunos na exploração e discussão da tarefa proposta.

Os dados recolhidos e analisados para este trabalho baseiam-se nas produções escritas de um dos grupos. A escolha deste grupo baseou-se na resolução que considerámos ser a mais complexa e a que melhor retratava a necessidade de distinguir as situações em que é aplicado o PFC das situações em que é preciso recorrer à adição. Analisámos ainda os diálogos decorridos no seio deste grupo em grande grupo, durante a discussão coletiva, que foram registados em vídeo e integralmente transcritos.

Análise dos dados

O grupo selecionado (constituído pelo Daniel, Adriana e Luísa – pseudónimos) começou por elaborar um diagrama de árvore (Figura 2). À medida que traçaram o diagrama no quadro, os alunos explicaram o significado de cada um dos seus elementos. Começaram por referir que, à partida, existiam duas hipóteses, avião ou comboio, e que utilizaram o *site eDreams* para efetuarem a pesquisa dos voos disponíveis para o dia em causa. Caso o João optasse pelo comboio, teria ainda de decidir qual das seis estações existentes na cidade de Lisboa (representadas pelas letras A, B, C, D, E e F) selecionaria. No caso de efetuar a viagem de avião existiam cinco voos em horários que consideraram adequar-se à situação em causa.



ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 2. Diagrama elaborado pelo grupo de alunos

Em articulação com os restantes alunos da turma, durante a fase de discussão coletiva da tarefa, todos os elementos deste grupo concordaram que limitaram as suas escolhas a horários que consideravam exequíveis, dado que "no domingo tinha de voltar a fazer as malas para regressar a Lisboa". Para apanhar cada um dos cinco voos, o João tinha quatro hipóteses: ir de metro, de autocarro ou de táxi para a estação de caminho de ferro de Campanhã ou, em alternativa, um familiar deslocar-se ao aeroporto e, deste modo, seguiria diretamente para casa. Justificaram ainda que consideraram que apenas existia uma hipótese para o metro e uma para o autocarro porque partiram do princípio que o João optaria pelo primeiro que tivesse oportunidade de entrar. De notar que, nesta fase, os alunos referiram claramente "pusemos ***para cada um*** destes aviões o metro, o autocarro, familiares ou táxi", justificando, deste modo, que os quatro ramos que saíam do primeiro voo se replicavam pelos restantes. De igual modo, explicaram as hipóteses existentes, caso o João tivesse optado por efetuar a viagem Lisboa – Porto de comboio.

Seguidamente, o Daniel referiu que, após a construção do diagrama, "fizemos *conjuntos* e no fim contámos as hipóteses todas: 157". Procurando clarificar estes procedimentos para os restantes colegas, a professora perguntou se tinham feito algum cálculo para chegar ao valor de 157, ao que os alunos responderam afirmativamente. Pediu-lhes então que mostrassem aos colegas como tinham procedido:

> **Adriana:** É para fazer duma estação para dar o exemplo?
> **Professora:** Sim. Quero ver como é que vocês chegaram ao 157. Porque basicamente o que vocês têm aí é uma lista de opções. Mas esse esquema que está aí foi utilizado para vocês fazerem algum cálculo?
> **Luísa:** Não. É só para simplificar. Foi para nos organizarmos.
> **Professora:** Vocês chegaram ao 157 contando uma por uma?
> **Todos:** Não. Foi por conjuntos.
> **Professora:** Então, dêem-me um exemplo de um conjunto.
> **Adriana:** Por exemplo, se ele escolhesse o Cais do Sodré (letra A), tinha três comboios que podia ir até Campanhã. Para o primeiro comboio tinha quatro hipóteses (comboio, familiares, táxi ou autocarro).
> **Professora:** E então depois era um copiar colar para os outros dois comboios?
> **Grupo:** Sim.
> **Professora:** Esse grupo quantas hipóteses dá?
> **Luísa:** 3 vezes 4, 12.
> **Professora:** E este 12 aparece uma única vez?
> **Adriana:** Não. Cada um dos grupos tinha um número de hipóteses diferentes.
> **Professora:** Então por isso é que vocês tiveram de somar?
> **Luísa:** Sim. Senão fazíamos 6 vezes 12.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A professora reforçou que, caso o número de hipóteses em cada estação fosse sempre o mesmo, não existiria a necessidade de somar porque, nesse caso, o 12 surgiria por seis vezes e bastaria multiplicar o 12 por seis. Mas, como nos dados que os alunos recolheram, para cada uma das estações existia um número diferente de hipóteses, o grupo teve a necessidade de determinar o número de hipóteses para cada estação e, em seguida *adicionar* os seis resultados *diferentes*.

Comparando a abordagem deste grupo com os restantes colegas, a professora referiu que alguns efetuaram uma listagem de todos os resultados possíveis, mas, como limitaram as suas opções, chegaram a um número relativamente pequeno como resposta que representaria a resposta à tarefa proposta. Contrariamente, houve grupos que obtiveram como resposta números relativamente elevados, números esses que só foram atingidos através de cálculos pois seria impensável fazerem uma lista exaustiva das hipóteses possíveis. Ficou claro que os grupos que efetuaram cálculos recorreram às operações de adição ou multiplicação. Entrando já na sistematização das aprendizagens, a professora aproveitou a oportunidade para informar os alunos que, quando efetuam a multiplicação, estão a aplicar o *Princípio Fundamental da Contagem*. Reforçou que o resultado da multiplicação apenas traduz o cardinal do espaço de resultados pretendido, se o número de opções em cada uma das etapas da contagem for igual. Quando o número de opções da etapa seguinte não é igual para todos os resultados da etapa anterior, terá de se contabilizar cada etapa separadamente e, no final, adicionar todos os resultados possíveis. Para finalizar apresentou vários exemplos em que os alunos facilmente identificaram quando deveriam "parar" a multiplicação e efetuar uma adição.

Conclusões e implicações

Os diagramas e esquemas desempenham um papel central na determinação do cardinal do conjunto de resultados pretendido, o que mais uma vez ratifica as considerações de Lockwood (2013) quando afirma que os procedimentos que o aluno efetua ou imagina efetuar lhes permitem estabelecer a expressão matemática representativa do cardinal do espaço de resultados. Neste sentido, os diagramas e esquemas elaborados pelos alunos constituíram-se como um recurso central, na medida em que foram a alavanca que os conduziu à aplicação

ISBN 978-84-945722-3-4

do PFC e os ajudou a distinguir situações multiplicativas das que também exigiam a utilização de elementos aditivos.

Acreditamos que os *smartphones* se constituíram como uma verdadeira *re-source*, dado que foram usados para fazer pesquisas essenciais à resolução da tarefa e, portanto, foram recursos invisíveis e não distrativos da atividade matemática. Deste modo, a utilização dos *smartphones* permitiu que todos os alunos pudessem efetuar as pesquisas necessárias à resolução da tarefa proposta, ao contrário do que aconteceria se dispusessem de um computador (os constrangimentos logísticos impediriam a utilização de um por cada um dos elementos do grupo). Assim, a exploração da tarefa saiu enriquecida e, portanto, consideramos que os *smartphones* se tornaram num recurso transparente (Adler, 2000).

Os recursos materiais que foram fornecidos aos alunos permitiram a concretização da situação apresentada na tarefa, o que favoreceu a sua resolução por via da verificação das hipóteses possíveis em cada uma das etapas. As respostas à tarefa variaram desde valores numéricos mais baixos, que refletiam uma abordagem mais simplista à questão, a valores numéricos mais elevados, que traduziam uma maior complexidade na abordagem à tarefa e a necessidade de aplicar o PFC e a adição. Estes resultados, que apoiam estudos anteriores (e.g., Tillema, 2013), sugerem que as situações cuja cardinalidade do espaço de resultados seja numericamente baixa não potenciam a compreensão ou a aplicação do PFC pois os alunos não são desafiados a considerar um maior número de hipóteses em cada uma das etapas independentes subjacentes ao PFC.

Consideramos importante estudar futuramente o modo como os alunos conceptualizam o PFC na resolução de problemas de contagem que envolvam a aplicação de operações combinatórias (arranjos e combinações), ou seja, se aplicam cada uma das fórmulas como uma "abreviatura" do PFC ou, contrariamente, as utilizam sem considerarem o PFC.

Agradecimentos

O segundo autor é apoiado pelo CMUP (UID/MAT/00144/2013), financiado pela FCT (Portugal) através de fundos estruturais nacionais (MEC) e europeus (FEDER), no âmbito do projeto PT2020.

Referências bibliográficas

Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(3), 205-224. doi:10.1023/a:1009903206236

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Lockwood, E., & Caughman, J. S. (2016). Set partitions and the multiplication principle. *PRIMUS, 26*(2), 143-157.

Lockwood, E., Reed, Z., & Caughman, J. S. (2016). An analysis of statements of the multiplication principle in combinatorics, discrete, and finite mathematics textbooks. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 1-36. doi:10.1007/s40753-016-0045-y

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de matemática* (pp. 135-161). Instituto de Educação: Lisboa.

Ponte. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stein, M. H., & Smith, M. S. (2009). Tarefas matemáticas como quadro para a reflexão: Da investigação à prática. *Educação e Matemática, 105*(5), 22-28.

Tillema, E. S. (2013). A power meaning of multiplication: Three eighth graders' solutions of cartesian product problems. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(3), 331-352. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.03.006

ISBN 978-84-945722-3-4