CB-1.311

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS ENVOLVENDO ARRANJOS COM REPETIÇÃO: UMA ANÁLISE À LUZ DO MODELO DO PENSAMENTO COMBINATÓRIO DOS ALUNOS

Belmira Mota – Rosa Tomás Ferreira
belmiramota@gmail.com – rferreir@fc.up.pt
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto – CMUP, Portugal

Núcleo temático: A resolução de problemas em matemática
Modalidad: CB
Nivel educativo: Terciário
Palabras clave: modelo de pensamento combinatório dos alunos; arranjos com repetição; resolução de problemas

Resumo

Recorrendo ao Modelo de Pensamento Combinatório dos Alunos desenvolvido por Lockwood (2013), procurámos analisar o modo como os alunos abordam problemas combinatórios cuja resolução envolve a utilização de arranjos com repetição. Para tal, a professora-investigadora propôs a uma turma do 12º ano (17-18 anos) duma escola do interior norte de Portugal, a resolução de dois problemas de seleção – retirar k elementos de um conjunto de n elementos – e um de distribuição – distribuir k objetos por n espaços vazios (usando a tipologia de Dubois, 1984). Os alunos trabalharam em pequenos grupos, num ambiente exploratório de ensino-aprendizagem.

Os dados para esta comunicação foram recolhidos em duas aulas de 90 minutos através de observação participante, gravações em vídeo e recolha documental das resoluções dos alunos. O ambiente exploratório de ensino-aprendizagem potenciou a escolha, por parte dos alunos, de abordagens distintas (e.g., modelação matemática, princípio fundamental da contagem), assim como a descoberta de diferenças entre os dois tipos de problemas. Porém, tal como sugerem Batanero et al. (1997), demonstraram maiores dificuldades na resolução do problema de distribuição. A análise dos dados permitiu corroborar as relações entre os três componentes do modelo de Lockwood: fórmulas/expressões; processos de contagem; conjuntos de resultados.

Introdução e motivação

A importância do ensino-aprendizagem da Análise Combinatória (AC) está bem documentada na literatura em Educação Matemática. A aprendizagem da AC não requer um número significativo de pré-requisitos. Mas é necessário um raciocínio matemático crítico

ISBN 978-84-945722-3-4

na resolução dos problemas combinatórios. É esta combinação entre a acessibilidade e a exigência cognitiva que proporciona um contexto rico no ensino da Matemática.

Neste trabalho, são considerados *problemas combinatórios* todos os problemas cuja resolução envolva o recurso ao raciocínio combinatório. Os problemas combinatórios cuja resolução envolva a aplicação direta duma operação combinatória denominam-se *problemas combinatórios simples*. Dubois (1984) classificou estes problemas nas categorias de: 1) *Seleção:* a ideia principal é retirar k elementos de um conjunto de n elementos; 2) *Partição:* a ideia principal é a de dividir um conjunto de n elementos em k subconjuntos distintos; e 3) *Distribuição*: a ideia principal subjacente é a de distribuir n objetos por k espaços vazios.

A investigação de Batanero e seus colaboradores (1997) permitiu constatar que alguns alunos, que eram capazes de selecionar a operação correta para um problema de seleção, não eram capazes de a aplicar, quando o problema era alterado para um de distribuição ou partição, o que mostra a dificuldade em estabelecer relações entre problemas, aparentemente diferentes, mas com a mesma solução (e.g., Lockwood, 2011).

Este trabalho incide sobre as resoluções dos alunos de uma tarefa contendo dois problemas de seleção e um de distribuição. Pretendemos responder às seguintes questões de investigação: 1) De que modo como os alunos abordam problemas cuja resolução envolve a utilização de arranjos com repetição? e 2) Como os alunos distinguem os problemas de seleção dos de distribuição?

Um modelo do pensamento combinatório dos alunos

Objetivando representar uma análise conceptual das atividades dos alunos no que diz respeito à AC, Lockwood (2013) criou e testou o *Modelo do Pensamento Combinatório dos Alunos* (Figura 1) onde são estabelecidas relações entre três componentes: fórmulas/expressões, processos de contagem e conjuntos de resultados.

ISBN 978-84-945722-3-4

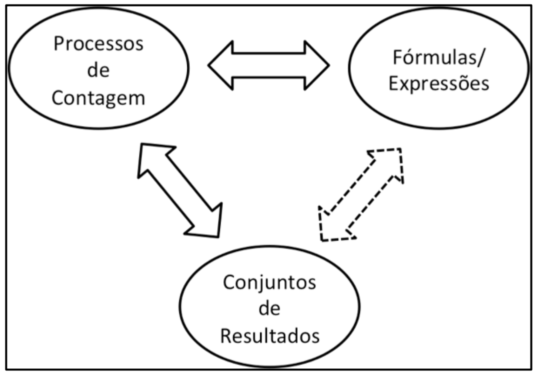

Figura 1. Modelo do Pensamento Combinatório dos Alunos (Lockwood, 2013, p. 253)

De modo a exemplificar e explicar cada um dos componentes deste modelo, consideremos o problema combinatório seguinte: *Assumindo que Portugal, Brasil e Espanha ocuparão as três primeiras posições na final do campeonato do mundo de futebol de 2018, de quantas maneiras diferentes poderão ser ocupados os três primeiros lugares?* São consideradas *fórmulas/expressões* as condições matemáticas que detêm algum valor numérico. Normalmente a resposta ao problema é uma fórmula ou expressão. No exemplo acima, $3!$ e $3 \times 2 \times 1$ são dois exemplos de fórmulas/expressões.

Os *processos de contagem* referem-se ao(s) processo(s) de enumeração no(s) qual(quais) os alunos se envolvem à medida que resolvem o problema. No caso do problema acima, um processo de contagem poderia ser a aplicação do princípio fundamental da contagem (PFC); outro poderia ser a construção de um diagrama de árvore. A classificação de um procedimento como processo de contagem depende da experiência do indivíduo. Um indivíduo pouco familiarizado com a AC recorre a um diagrama de árvore, enquanto outro, mais experiente, poderá não sentir necessidade de construir um diagrama, dado que já recorre ao PFC como um instrumento que lhe permite compreender e resolver problemas mais complexos.

O *conjunto de resultados* é o conjunto de elementos que podemos imaginar a serem gerados ou enumerados através de um processo de contagem, ou seja, o conjunto cujo cardinal representa a resposta ao problema. No exemplo apresentado, o conjunto de resultados seria o conjunto de todas as sequências diferentes que é possível constituir com o nome das três equipas.

ISBN 978-84-945722-3-4

Numa tarefa combinatória, uma fórmula/expressão pode ser o resultado de um processo de contagem, na medida em que lhe pode ser atribuído um significado combinatório. Inversamente pode ser conceptualizado um processo de contagem a partir de uma fórmula/expressão. A relação entre os processos de contagem e o conjunto de resultados é considerada a mais flexível, dado que após a utilização de um processo de contagem, o aluno pode verificar que o resultado não coincide com o cardinal do conjunto de resultados pretendido e, portanto, reinicia o processo. Ou seja, o processo de contagem pode resultar numa fórmula/expressão que permita determinar o cardinal do conjunto de resultados inerente à tarefa em causa ou, inversamente, a descrição do conjunto de resultados pode conduzir a um processo de contagem que permita deduzir a fórmula/expressão pretendida. Na Figura 1, a seta que simboliza a relação entre o conjunto de resultados e as fórmulas/expressões está a tracejado porque a investigação realizada tem apontado para a ausência de uma relação direta (Lockwood, 2013) – só os mais experientes relacionam alguns conjuntos de resultados com fórmulas particulares sem considerar qualquer processo de contagem.

Metodologia de investigação

Este trabalho insere-se numa investigação mais ampla em curso, qualitativa e interpretativa, com *design* de experiência de ensino (Steffe & Thompson, 2000). Os 31 alunos da turma de 12.º ano (17-18 anos de idade) participante no estudo foram divididos em sete grupos de quatro alunos e um de três. A experiência de ensino realizada foi conduzida num ambiente de ensino-aprendizagem exploratório, que se distingue do ensino direto pelos papéis desempenhados pelos alunos e professores, pelas tarefas propostas e modo como são geridas, e pela comunicação que é pautada pelo diálogo entre alunos e entre alunos e professor, que os incentiva a apresentarem as suas dúvidas e exporem o raciocínio utilizado nas resoluções das tarefas propostas (e.g., Menezes, Tomás Ferreira, Martinho, & Guerreiro, 2014).

A professora/investigadora construiu a tarefa *Festival de Verão* (anexo I) contendo dois problemas de seleção e um de distribuição. Esta tarefa foi explorada em duas aulas de 90 minutos, de cunho exploratório, seguindo as fases apresentadas por Oliveira e colaboradores (2013). Na primeira aula, decorreram as fases de *introdução* e *realização* da tarefa; os

ISBN 978-84-945722-3-4

momentos de *discussão coletiva* e de *sistematização das aprendizagens* decorreram na segunda aula. A professora selecionou três grupos para apresentarem as suas resoluções à turma e, quando considerou conveniente, procedeu à *sistematização das aprendizagens*, com a participação dos alunos e com base na discussão prévia das suas resoluções.

Análise dos dados

O primeiro problema proposto foi resolvido por todos os grupos sem que muitas dificuldades. Selecionámos o grupo I para apresentar a sua resolução na discussão coletiva, dado que consideramos ser exemplificativo dos erros cometidos na resolução de problemas que envolvam a utilização de arranjos com repetição e representativo das resoluções dos restantes grupos. As alunas deste grupo começaram por construir o diagrama representado na Figura 2. As alunas explicaram que as seis opções do *Amigo 1* se replicavam pelos restantes. A primeira resposta a que o grupo chegou foi $4 \times 6 = 24$, tendo-se gerado o diálogo seguinte:

Professora: Porque desistiram desta resposta?
Manuela: Porque estava mal.
Professora: Como é que chegaram à conclusão de que estavam mal?
Patrícia: Porque se fizéssemos uma listagem ía dar muito mais que 24!
Professora: E depois? Tu dizias que era quanto, Patrícia?
Patrícia: 4^6. Mas a Manuela dizia que que era 6^4.
Mónica: Depois da Manuela explicar, concordamos que a resposta era 6^4.
Joana: Porque cada uma tinha 6 hipóteses.

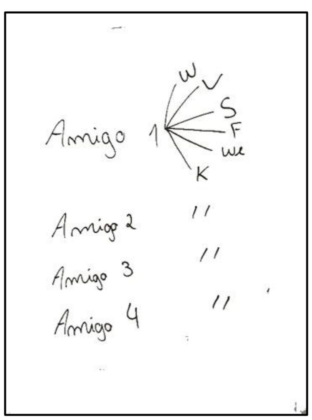

Figura 2. Diagrama elaborado pelo grupo I no quadro

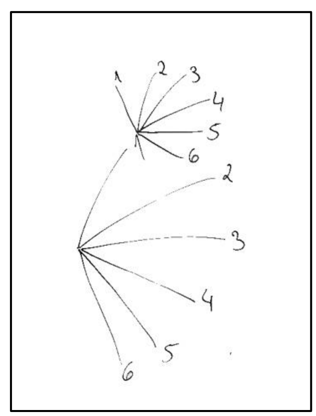

Figura 3. Diagrama elaborado pela Manuela na explicação da sua resposta

Perante esta situação, a professora pediu à Manuela que explicasse a sua resposta. Ao longo da sua explicação, a Manuela construiu o diagrama representado na Figura 3. Referiu que a

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

construção total do diagrama iria ocupar muito espaço, mas que era capaz de *imaginar* o diagrama na sua totalidade. Posto isto, a professora considerou importante sistematizar as aprendizagens decorrentes da apresentação deste grupo e referiu que a particularidade deste problema consiste no facto de, em cada etapa, o número de hipóteses ser sempre igual a 6 e que, por isso, é possível escrever a resposta como uma potência, em que a base representa o número de hipóteses existentes em cada etapa e o expoente o número de vezes que a experiência se repete (número de etapas existentes), ou seja, está a ser utilizado um *arranjo com repetição*.

Ao longo da fase de realização, foi evidente que todos os grupos manifestaram maiores dificuldades na exploração do problema de distribuição, tendo identificado os dois problemas de seleção como sendo semelhantes. Um exemplo ilustrativo é a resolução do Grupo IV que apresentou a resolução representada na Figura 4.

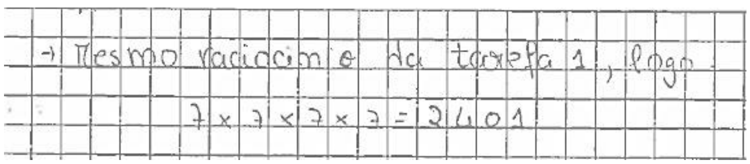

Figura 4. Resolução do Problema 3 da tarefa pelo Grupo IV

Embora o problema de distribuição tenha sido o que despoletou maiores dificuldades, também foi o que deu origem a uma maior diversidade de resoluções. Por exemplo, o Grupo II recorreu à modelação matemática na resolução deste problema e, por isso, foi chamado para a discussão coletiva. Os alunos explicaram que resolveram começar por considerar em primeiro lugar que tinham uma única aplicação e três pastas; em seguida, contabilizaram o número de maneiras distintas de arrumar duas aplicações em três pastas e elaboraram o esquema representado na Figura 5.

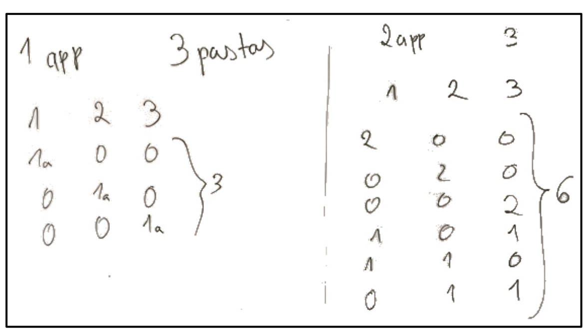

Figura 5. Diagrama elaborado pelos alunos do grupo II

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

No entanto, e apesar de terem descoberto algumas relações entre o número de aplicações e de pastas, os alunos abandonaram esta abordagem. Na discussão coletiva, a professora pediu-lhes que explicassem à turma as razões dessa desistência:

> **José:** Porque, por exemplo, se fossem três aplicações e cada pasta ficasse com uma única aplicação, era errado contar esta situação como sendo uma só porque poderia, por exemplo, ficar a/b/c ou b/c/a ou...
> **Professora:** Não estou a perceber muito bem o que estás a dizer. Podes explicar melhor?
> **Júlio:** Então vamos fazer três aplicações e três pastas.
> **José:** Foi aqui que descobrimos o erro.
> **Júlio:** Vamos chamar às três aplicações a/b/c. Quando chegamos ao caso em que uma pasta fica com duas aplicações, outra com uma e outra com zero. Aqui temos várias hipóteses.

De seguida, o José referiu que fizeram uma listagem com todas as opções e chegaram à conclusão que, com três aplicações, teriam 27 maneiras diferentes de as distribuir pelas três pastas existentes. Regressando ao caso de terem duas aplicações, refizeram a sua resposta e concluíram que teriam nove maneiras diferentes de as distribuir. Assim sendo, verificaram que, com uma aplicação, a resposta seria 3, com duas, 3^2, com três, 3^3, e, generalizando, consideraram que a resposta correta seria 3^{30}.

O grupo III apresentou a resolução representada na Figura 6.

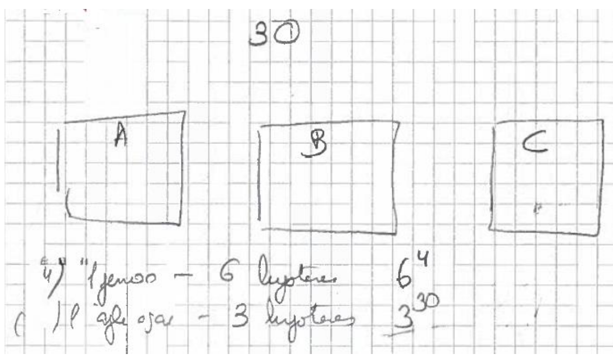

Figura 6. Resolução do Grupo III

Aquando da discussão coletiva, a professora chamou este grupo para que explicassem aos colegas o modo como abordaram este problema. O Filipe explicou à turma:

> **Filipe:** Inicialmente fizemos um esquema parecido com o do grupo anterior, mas depois pensámos no problema de um outro modo. Pensámos que no primeiro problema, cada pessoa tinha de escolher uma aplicação e, neste, cada aplicação teria de escolher uma pasta. A partir daí foi fácil, porque passou a ser igual ao primeiro e chegámos à resposta 3^{30}.

Conclusões

As resoluções dos diferentes grupos demonstram uma forte relação entre os processos de contagem e as fórmulas/expressões que conduzem ao cardinal do conjunto de resultados.

ISBN 978-84-945722-3-4

Demonstram também que o conjunto de resultados pode ser *imaginado* através dos processos de contagem sem que seja concretizado, tal como evidenciam os diversos diagramas apresentados e algumas verbalizações dos alunos. Lockwood e Gibson (2016) referem que as listagens desempenham um papel fundamental na resolução de problemas combinatórios, na medida em que podem fornecer aos alunos um mecanismo através do qual se possam convencer a eles mesmos de que possuem todos os elementos do espaço de resultados em causa. As resoluções dos grupos I e II corroboram estas sugestões, na medida em que as listagens constituíram-se como a alavanca que permitiu aos alunos concluir que a resolução original estava errada e reiniciar o processo de contagem. Esta situação confirma ainda as relações biunívocas entre os três componentes do modelo de pensamento combinatório dos alunos de Lockwood (2013).

Os alunos revelam frequentes dificuldades em relacionar problemas semelhantes, o que conduz a uma falha na transferência do conhecimento, já adquirido, a novas situações (English, 2005). Os dados do presente estudo indicam precisamente que, quando os alunos são capazes de estabelecer relações entre problemas semelhantes, a sua resolução é mais rápida e eficiente, na medida em que já não sentem necessidade de recorrer a processos de contagem, como diagramas e listagens para chegarem à resposta ao problema. Esta situação é ilustrada pela resolução do grupo IV ao segundo problema de seleção proposto, onde referem que se trata de um problema idêntico ao anterior e, em seguida, estabelecem uma expressão cujo resultado é o cardinal do conjunto de resultados pretendido. Também a resolução do grupo III ao problema de distribuição reflete os benefícios do sucesso na relacionação de problemas semelhantes, dado que ao reconhecerem as semelhanças entre o problema de distribuição e o de seleção, foram capazes de estabelecer a fórmula representativa do cardinal do conjunto de resultados, sem recorrerem a quaisquer outros processos de contagem.

Tal como o estudo de Batanero e colaboradores (1997), as resoluções da maioria dos grupos também indicam que os alunos sentiram maiores dificuldades na resolução de problemas de distribuição do que nos de seleção. A maioria dos grupos recorre a um diagrama para resolver o primeiro problema de seleção e à transferência de conhecimentos adquiridos nesta resolução para o segundo problema de seleção. Porém, a resolução do problema de

ISBN 978-84-945722-3-4

distribuição revelou-se um desafio muito maior que conduziu a resoluções mais trabalhosas e complexas, como sendo a modelação matemática.

Agradecimentos

O segundo autor é apoiado pelo CMUP (UID/MAT/00144/2013), financiado pela FCT (Portugal) através de fundos estruturais nacionais (MEC) e europeus (FEDER), no âmbito do projeto PT2020.

Referências bibliográficas

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V., & Godino, J. D. (1997). Effect of the implicit combinatorial model on combinatorial reasoning in secondary school pupils. *Educational Studies in Mathematics*, *32*(2), 181-199.

Dubois, J.-G. (1984). Une systématique des configurations combinatoires simples. *Educational Studies in Mathematics*, *15*(1), 37-57.

English, L. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning* (pp. 121-141). Boston, MA: Springer US.

Lockwood, E. (2011). Student connections among counting problems: An exploration using actor-oriented transfer. *Educational Studies in Mathematics*, *78*(3), 307-322.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 251-265.

Lockwood, E., & Gibson, B. R. (2016). Combinatorial tasks and outcome listing: Examining productive listing among undergraduate students. *Educational Studies in Mathematics, 91*(2), 247-270.

Menezes, L., Tomás Ferreira, R., Martinho, M. H., & Guerreiro, A. (2014). Comunicação nas práticas letivas dos professores de matemática. In J. P. Ponte (Ed.), *Práticas profissionais de professores de matemática* (pp. 135-161). Instituto de Educação: Lisboa.

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Anexo I

Festival de Verão

ISBN 978-84-945722-3-4

As tecnologias de informação e comunicação fazem parte integrante do nosso dia-a-dia. Recorremos a elas na vida profissional e na vida pessoal, nomeadamente para organizar viagens, conversar com os amigos ou simplesmente ir a um concerto ou ao cinema. Suponha que o seu grupo de trabalho foi a um festival de verão. Mas para combinar os detalhes, teve de trocar mensagens para, finalmente, escolher qual seria o eleito. As tarefas abaixo ilustram alguns dos possíveis episódios que antecederiam a desejada ida ao festival.

Problema 1

Existem variadas aplicações para *smartphones* que permitem comunicar gratuitamente. Algumas das mais procuradas são as seguintes:

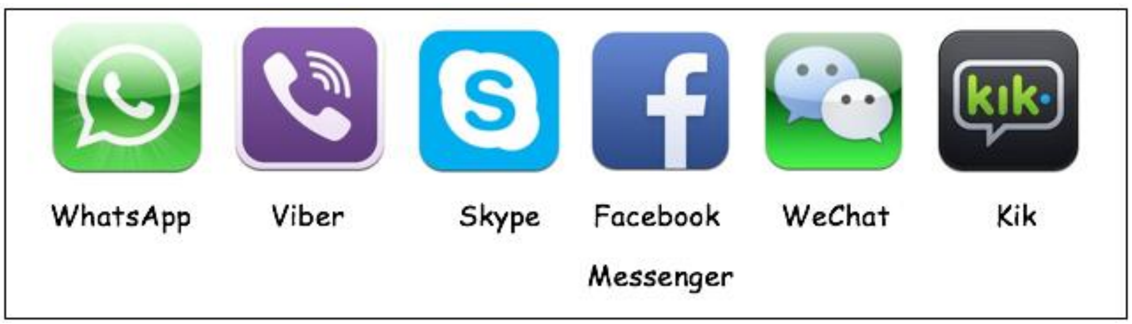

Figura 1

Se cada elemento do seu grupo apenas pudesse selecionar uma aplicação das indicadas na Figura 1, de quantas maneiras diferentes poderia ser feita essa seleção?

Problema 2

ISBN 978-84-945722-3-4

Hoje em dia existem centenas de aplicações disponíveis para *smartphones*, sendo que muitas sã inteiramente gratuitas. Por vezes, acumulam-se n ambiente de trabalho. A Joana tem trinta aplicaçõe que pretende arrumar em três pastas. Supondo qu cada aplicação pode ser colocada em qualquer um das três pastas, de quantas maneiras diferentes as trinta aplicações podem ser distribuídas pelas três pastas?

Problema 3

Alguns dos festivais que tiveram lugar no Verão de 2016 foram os seguintes:

Figura 2

Se cada elemento do seu grupo tivesse escolhido um único festival dos apresentados na Figura 2, de quantas maneiras diferentes poderia ser feita a seleção?

ISBN 978-84-945722-3-4