Números enormes pero no infinitos

por
José Miguel Rubio Chueca
(SIES Rodanas, La Muela)

La final de la XXVI Olimpiada Matemática Aragonesa de 2.º de la ESO tuvo lugar en el Aula Magna de Ciencias el día 6 de mayo el 2017. En ella, participaron 102 alumnos de los IES de la comunidad autónoma de Aragón, que intentaron resolver, como todos estos años, seis problemas usando conocimientos matemáticos e intuición.

El problema que voy a analizar en esta ocasión es el número seis que llevaba por título, «Números enormes pero no infinitos» y el enunciado es el siguiente:

Enunciado

El número 10^{100} es un número muy grande cuyo nombre se denomina *googol* y es mayor que el número de átomos en el universo conocido. Dicho número inspiró a los creadores de Google para denominarlo de esa manera. Un *googolplex* es (10 elevado a un *googol*).

Sin embargo, sabemos que hay números en matemáticas mayores que un googol. Por ejemplo, el último número primo encontrado es $2^{74\,207\,281}-1$ y es mucho mayor que un googol.

También el número $9^{99\,999}$ tienen muchas cifras aunque no tantas como el último primo. Ahora bien, ¿sabrías cuáles son los dos últimos dígitos de $9^{99\,999}$?

Solución

Para hallar la solución a este problema nos tenemos que dar cuenta que pide solamente los dos últimos dígitos de $9^{99\,999}$.

Entonces, en lugar de realizar las potencias de nueve, se puede partir de $9^1=9$, y extraer las dos últimas cifras y multiplicarlas por 9, del resultado volver a extraer las dos últimas cifras y volver a multiplicarlas por 9, y continuar de esa forma. Como solo hay 100 números de dos cifras (contando el cero), las dos últimas cifras se empezarán a repetir de forma cíclica a partir de una de ellas por el *principio del palomar.*

En nuestro caso vemos lo que ocurre:

$$9^1=09,\ 9^2=81,\ 9^3=\ldots29,\ 9^4=\ldots61,\ 9^5=\ldots49,\ 9^6=\ldots41,\ 9^7=\ldots69,\ 9^8=\ldots21,\ 9^9=\ldots89,\ 9^{10}=\ldots01,\ 9^{11}=\ldots09,\ldots$$

Vemos que a partir del exponente 11 se repetirían las dos últimas cifras de forma cíclica.

Por lo tanto, antes de llegar al número 99 999 este ciclo se habrá repetido una cantidad de veces igual a la parte entera del cociente $99\,999:11$ (*aritmética de restos*).

Al llegar al resto que nos de la división entera, se tendrán los dos dígitos buscados. Al hacer la división obtenemos de resto 9, por lo tanto: $99\,999=9\,090\cdot 11+9$.

Buscando en la serie anterior, vemos que en la posición 9 tenemos que los dos últimos dígitos son 89. Luego la solución pedida en el problema es 89.

Análisis de los resultados

En cuanto a las soluciones proporcionadas por los alumnos en la final de la olimpiada el 73 % dio una respuesta errónea sin razonamientos apropiados que les llevase a una explicación del problema. El 15 % buscó patrones, mediante regularidades en las últimas cifras de las potencias, sin llegar a la solución correcta. Finalmente, el 12% restante llegaron a la solución del problema razonando de forma precisa y clara.

En primer lugar veamos dos ejemplos de soluciones que cometieron algún error que les llevó a una solución imprecisa:

Respuesta razonada

Comenzamos por la última cifra. La última cifra es siempre 9 ó 1 (9, 81, 729, 6561, 59049, 531441...).

Si está elevado a un nº impar, la última cifra será 9, y si está elevado a un nº par, la última cifra será 1. 99999 es impar y por tanto 9^{99999} terminará en 9.

Seguimos con la penúltima cifra. La penúltima cifra se va alternando entre 8-2-6-4-4-6-2-8 que son 8 cifras.

Dividimos 99999 entre 8 y nos da 12499. Con el resto que nos da (7) comenzamos a buscar en la serie anterior el nº en 7ª posición

8, 2, 6, 4, 4, 6, 2, 8
7ª pos.

Por tanto el 2 es la penúltima cifra.

$\boxed{9^{99999} \text{ termina en } 29}$

Analizando las respuestas erróneas razonadas que han dado los finalistas, hemos llegado a la conclusión del problema que ha supuesto establecer el patrón que seguían las potencias. La mayoría de las respuestas, han establecido diferencias entre la cifra correspondiente a la unidad, y la cifra correspondiente a la decena. Este hecho, ha supuesto que cometieran algún error a la hora de ver la regularidad en la cifra de las decenas.

Respuesta razonada

Lo primero, la última cifra será un 9 o un 1.

Cuando vamos multiplicando por 9, las dos últimas cifras al cabo de un tiempo se van repitiendo.

81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, 81, 29, 61...

Ahora el caso es saber cuál de ellas será. Cada 10 veces vuelves a empezar, y como el último nº de 99.999 es 9, tocará la posición 9; es decir: 01.

Por lo tanto, las 2 últimas cifras de 9^{99999} serán $\boxed{01}$

Veamos ahora, algunas soluciones correctas en su desarrollo de razonamiento y solución:

Respuesta razonada

Los dos últimos números de cada potencia de nueve siguen una serie dependiendo del resto de la división (exponente : 10):

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
09	81	29	61	49	41	69	21	89			

MAL

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
01	09	81	29	61	49	41	69	21	89	

99999 | 10
99 9999
99
99
9

→ Los últimos 2 nº son 8 y 9.

Respuesta razonada

• Los 2 últimos dígitos de nueve al multiplicarse por sí mismo en un orden (9^1-9^2-9^3-9^4-9^5-9^6...) forman una serie que se repite cada 10 resultados,

9-81-29-61-49-41

69-21-89-01-9

• Luego sólo hay que dividir el número de veces que se multiplica 9 por sí mismo entre 10*, y de resto da 9, lo que significa que hay 9 números que comienzan una serie y no la terminan, es decir, ~~el último número sería~~ los 2 últimos dígitos serán $\boxed{89}$

* (en este caso 99999)

Ambas soluciones han sido elaboradas siguiendo un proceso de razonamiento similar. Veamos algunas soluciones razonadas de una forma original:

Respuesta razonada

Cada vez que elevamos a 10 el nueve, obtenemos como dos últimas cifras 01. Como 9 elevado a 99990 es lo mismo que multiplicar 9999 veces 9^{10} y cada vez que multipliquemos el número las dos últimas cifras serán 01, sólo tenemos que multiplicar nueve veces por nueve el número uno. El resultado obtenido es: 387.420.489, que al multiplicarlo por 9^{99990} nos dará 9^{99999}. Como a nosotros sólo nos interesan las dos últimas cifras de cada uno, pues son los que influyen en las dos últimas cifras definitivas, multiplicamos uno por otro. $01 \cdot 89 = 89$ serán las dos últimas cifras de 9^{99999}

Respuesta razonada

Al multiplicar 9 por sí mismo 12 veces y anotar cada resultado, podemos observar una secuencia que se repite en un ciclo de 10 números en sus dos últimos dígitos. Ésta es:

09, 81, 29, 61, 49, 41, 69, 21, 89, 01.

Sabemos que al elevar 9 a 9^{100000} las dos últimas cifras será el décimo resultado de nuestra secuencia: 01. Por tanto, las dos últimas cifras del número anterior; es decir 9^{99999}, son 89.

En todas las respuestas dadas de forma correcta, los participantes analizaron y encontraron pautas que les llevaron a observar las regularidades en el contexto numérico determinando la solución. Es conveniente afirmar que las respuestas de los participantes han puesto de manifiesto la importancia de la identificación de patrones en el proceso para resolver el problema. La mayoría de los patrones que han sido identificados han dado la solución o se han aproximado a ella.

Sin embargo, la situación adversa que han encontrado es establecer la regularidad con la decena. A veces, desmenuzar el problema en casos sencillos nos facilita la comprensión y conexión para hallar la solución. Sin embargo, también es ventajoso ver las partes como un todo que nos permita llegar al resultado final. La mayoría de los casos en los que el alumno ha diferenciado entre las unidades y las decenas, estableciendo después la conexión, ha cometido algún fallo inoportuno.

Separando los dígitos que las potencias del 9 cumplen que:

La regularidad en el caso de las unidades es: 9 – 1 – 9 – 1 – 9 – 1 – 9 – 1 – 9 – 1 – 9

Y en caso de las decenas es: 0 – 8 – 2 – 6 – 4 – 4 – 6 – 2 – 8 – 0

Si observamos los dos dígitos se cumple: 09 – 81 – 29 – 61 – 49 – 41 – 69 – 21 – 89 – 01 – 09

Los alumnos que han observado la regularidad de las dos cifras, no han tenido tantos errores para establecer la solución al problema comprendiendo mejor el método para generalizar las dos últimas cifras a cualquier exponente.

Finalmente, es importante reconocer este tipo de problemas como paso previo al razonamiento inductivo. Además, es claro que este tipo de problemas debe trabajarse en la ESO puesto que en el bloque del RD 1105/2014 «Procesos, métodos y actitudes», bloque común en toda etapa de secundaria y eje fundamental de la asignatura uno de los criterios nos dice: «Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos […]».

Por último, afirmar que la utilización del razonamiento inductivo en el descubrimiento de patrones y leyes que los rigen cumple un papel fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y de otras ciencias. Formar una conjetura a partir de un patrón y generalizarla es una consecuencia propia del razonamiento inductivo. Siempre que se buscan patrones, se inicia un proceso de generalización hacia la comprensión más profunda de una ley que esté ligada a un tipo de comportamiento. Por lo tanto, el reconocimiento de patrones numéricos nos ayuda a comprender previamente los patrones de fenómenos naturales y sociales ayudándonos a modelarlos y comprenderlos. Pasando de casos particulares a propiedades comunes y generales modelizan los procesos que nos ayuden a una mayor comprensión. Grandes matemáticos como Poincaré o Pólya, hasta asociaciones como la National Council of Teachers of Mathematics, siempre han defendido la inducción como un extraordinario medio para la adquisición del conocimiento, por lo que consideramos que este tipo de problemas deberían de jugar un papel importante para nuestros alumnos.