EL CÁLCULO DEL VOLUMEN DE UNA PIRÁMIDE TRUNCADA EN EL ANTIGUO EGIPTO Y LA MATEMÁTICA ESCOLAR

Emmanuel Colombo Rojas[1]; Viviana Carolina Llanos[1, 2]; María Rita Otero[1, 2]
[1]Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECYT), Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Bs. As. Paraje Arroyo Seco s/n, Tandil, Argentina.
[2]Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).
ecolombo@exa.unicen.edu.ar, vcllanos@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Se presenta un breve análisis relativo a la forma de hacer Matemática en el Antiguo Egipto, a partir del ejemplo del cálculo del volumen de un tronco de pirámide. Se busca fundamentar la trascendencia de este logro, y la relevancia de un estudio de la Matemática a partir de situaciones problemáticas que le den una razón de ser. Para ello, se pondrá énfasis en estrategias, procedimientos y conocimientos propios de los egipcios que derivaron en la resolución de este problema; y, a su vez, se los diferenciará de los planteamientos que tendríamos en cuenta en la actualidad.

Palabras clave: Matemática, Geometría Egipcia, Problemas.

Abstract

One presents a brief analysis relative to the way of doing Mathematics in the Former Egypt, from the example of the calculation of the volume of a trunk of pyramid. One seeks to base the transcendency of this achievement, and the relevancy of a study of the Mathematics from problematic situations that give him a raison d'être. For it, we will put on emphasis in strategies, procedures and own knowledge of the Egyptians who derived in the resolution of this problem; and, in turn, one will separate them from the approaches that we would have in it counts at present.

Keywords: Mathematics, Egipcian Geometry, Problems.

1. Introducción

Hoy en día se reconocen algunos aspectos de la Matemática como elementos intrínsecos a ésta cuando, en realidad, estos no siempre estuvieron allí, ni fueron como los conocemos o tratamos. Por ejemplo, la civilización del Antiguo Egipto (3000 años atrás) poseía conocimientos matemáticos sencillos, que posibilitaron el medir superficies para trabajar la tierra y construir obras arquitectónicas faraónicas que hoy admiramos, como las pirámides de Giza, acerca de las cuales sabían cómo calcular sus dimensiones o su volumen. Las técnicas y la escritura de las que disponían en ese momento diferían en mucho de lo que nosotros tenemos hoy para enfrentar este problema. Podemos considerar también otros ejemplos, como el Teorema de Pitágoras, las fórmulas para el cálculo de áreas y volúmenes de cualquier figura, y hasta las generalizaciones y los sistemas de numeración.

Klimovsky y Boido (2005) argumentan que la fundamentación de la matemática reside en la propia Matemática, en cuestiones de Lógica y Filosofía, y en la Historia de la

Ciencia; a diferencia de las primeras civilizaciones humanas, donde la fundamentación provendría de la experiencia, de su practicidad. La Historia de la Matemática da testimonios de la evolución de las técnicas, las formas de representación y las interpretaciones de distintos problemas en Matemática. Sin embargo, aun cuando ha evolucionado y se ha constituido como Ciencia, la enseñanza de cualquier conocimiento matemático se presenta como acabado, sin necesidad de conocer los orígenes o preguntarse cómo habría surgido ese conocimiento y con qué fin. Es preciso tomar en cuenta las razones de ser de los conocimientos en la cultura, las rupturas y las continuidades y las etapas intermedias e iniciales, para proponer una enseñanza con sentido, funcional a las necesidades que podría tener un ciudadano. Estas modificaciones identificadas en el desarrollo histórico de la Matemática, nos dan la idea de que no tenemos por qué aceptar al conocimiento matemático como acabado, sino como algo susceptible a cambios y nos centraremos en discutir dichas transformaciones. Las preguntas que surgen ¿qué clase de problemas tuvieron lugar en los orígenes de la Matemática?, ¿cómo se hacía Matemática en ese período? resultan esenciales para conocer cuál es la visión de la matemática que queremos transmitir.

En este trabajo nos proponemos desarrollar y analizar el ejemplo del cálculo del volumen de una pirámide truncada, considerando cuál habría sido el tratamiento de este conocimiento en la antigüedad, y pensar cómo es tratado en la enseñanza escolar actualmente. Para ello tomaremos el ejemplo del cálculo del volumen de una pirámide truncada presente en el papiro de Moscú (1850 a.C.), y analizaremos los posibles objetivos y desarrollos que permitieron arribar a este resultado.

2. La geometría egipcia

Probablemente la Geometría se ha gestado en el seno de las civilizaciones pre- helénicas (5000- 500 a. C.), como una respuesta a problemas de la vida cotidiana de la época. Para alcanzar una mayor comprensión de la geometría de este período proponemos tomar, a modo de ejemplo, a la geometría egipcia. La matemática egipcia gira en torno a la arquitectura y a la construcción de las pirámides. Los egipcios hallaron fórmulas para calcular el área de triángulos, rectángulos y trapecios, y el volumen de paralepípedos rectos y cilindros; todo siempre fuertemente vinculado a su entorno físico y empírico. Sin embargo, el problema geométrico más complejo abordado por la civilización egipcia y del que haya quedado registro es el del cálculo del volumen de una pirámide truncada (Bell, 1949). Dicho cálculo no se reduce a una fórmula como podríamos pensar sino, más bien, de ejemplos de aplicación precisos (Guasco y Crespo Crespo, 1998; Bell 1949).

El cálculo del volumen de un tronco de pirámide se trata posiblemente del mayor logro matemático de los egipcios. Esto se debe al grado de exactitud de la fórmula obtenida por medios empíricos y a la relativa complejidad del problema. Para hacernos una idea de la magnitud del logro alcanzado por esta civilización, lo compararemos con otro análogo de una civilización del mismo período (5000-500 a. C.): los babilonios. En tablillas de barro sumerias se pueden observar ejemplos de aplicación del cálculo del volumen de una pirámide truncada (Guasco y Crespo Crespo, 1998). Si lo expresamos en forma general en la notación algebraica actual sería la siguiente:

$$V = h.\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right)$$

donde a y b son los lados de las bases y h es la altura. Ésta fórmula no da un valor exacto del volumen de la figura, pero sí se puede afirmar que da un valor suficientemente satisfactorio para los fines prácticos, necesarios en ese momento.

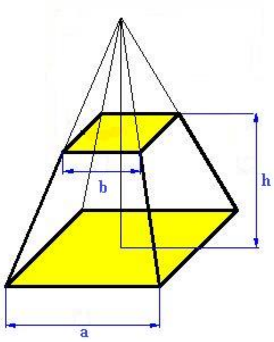

Figura 1: representación gráfica de las dimensiones de una pirámide truncada.

Los egipcios, por su parte, en el papiro que hoy conocemos como papiro de Moscú (1850 a. C.), presentan un ejemplo de la aplicación de una fórmula correcta para calcular el volumen de una pirámide truncada, fórmula que hoy en día se emplea para este propósito. No se conocen procedimientos, y como en el caso de los babilonios, es anónimo. Este descubrimiento es empírico , sin embargo no podríamos dudar de que se trata de una prueba de ingenio extraordinario. Sin dudas, de haber escrito su nombre en el papiro, el autor pasaría a la historia de los grandes geómetras (Bell, 1949; Colombo Rojas, 2014).

Se presenta a continuación el planteamiento y la resolución del problema:

> Si dices una pirámide truncada es de seis de altura, cuatro de base y dos en lo alto. Toma el cuadrado de cuatro que es dieciséis. Toma el doble de cuatro que es ocho. Toma el cuadrado de dos, resulta cuatro. Suma todo, el dieciséis, el ocho y el cuatro, resulta veintiocho. Toma un tercio de seis. Resulta dos. Toma veintiocho dos veces, resulta cincuenta y seis. Ved, es cincuenta y seis. Lo hallaste bien. (Guasco y Crespo Crespo, 1998, p. 17).

Esquemáticamente la situación es la siguiente:

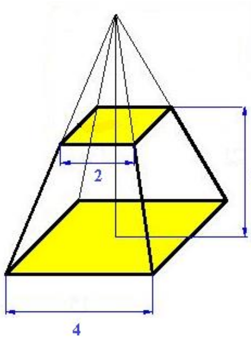

Figura 2: Representación gráfica del problema abordado por los arquitectos egipcios

Si seguimos las instrucciones del papiro tenemos que:

$$v = (4^2 + 8 + 2^2).\frac{6}{3}$$

$$v = 28.\frac{6}{3}$$

$$v = 56$$

En general, podemos hacer la siguiente comparación:

Papiro de Moscú	Notación actual
Toma el cuadrado de cuatro que es dieciséis.	a^2
Toma el doble de cuatro que es ocho.	$a.b$
Toma el cuadrado de dos, resulta cuatro.	b^2
Suma todo, el dieciséis, el ocho y el cuatro, resulta veintiocho.	$a^2+a.b+b^2$
Toma un tercio de seis. Resulta dos.	$1/3.h$
Toma veintiocho dos veces, resulta cincuenta y seis. Ved, es cincuenta y seis. Lo hallaste ben.	$V=1/3.h.(a^2+a.b+b^2)$

Tabla 1: Presentación comparativa del procedimiento egipcio y sus correspondientes expresiones en la notación algebraica actual.

A pesar de que la argumentación egipcia hace referencia a un caso particular, conserva procedimientos válidos para el cálculo de cualquier pirámide truncada de base cuadrada. El ejemplo de aplicación de los egipcios es exacto y su expresión resulta mucho más sencilla que la ofrecida por los babilonios. Para darnos cuenta de la magnitud de este logro basta con considerar cuanto tiempo debió transcurrir para que ésta fórmula fuese probada: se requirió de la teoría de límites y del cálculo integral para poder demostrarla recién en el año 1900 d. C (Bell, 1949).

El cómo llegaron a ésta fórmula es un misterio ya que no hay registros escritos de ello en el papiro de Moscú ni en ningún otro documento de la época (Morales Peral, 2002). Sin embargo, se podría pensar en ciertos procedimientos que bien podrían haber sido los empleados por los egipcios como el propuesto por García Cruz (1988) y por Maza Gómez (2002): al tronco de pirámide de dimensiones *h, b* y *a* se le agrega una pirámide de base cuadrada de lado *b* y altura de longitud *k* de modo tal que obtenemos una pirámide de base de lado *a* y altura *h+k*.

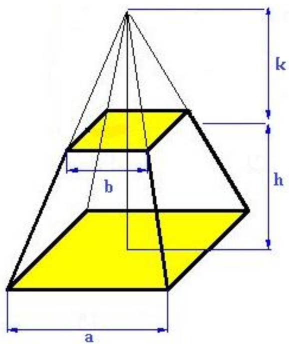

Figura 3: Representación gráfica de la figura correspondiente al planteamiento de García Cruz (1988).

Para calcular el volumen de la pirámide truncada entonces bastaría con quitarle el volumen de la pirámide de dimensiones b y k a la pirámide de dimensiones a y $h+k$ de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}.a^2(h+k) - \frac{1}{3}b^2k \\
&= \frac{1}{3}.\left(a^2h + a^2k - b^2k\right) \\
&= \frac{1}{3}.\left(a^2h + k\left(a^2 - b^2\right)\right) \\
&= \frac{1}{3}.\left(a^2h + k(a-b)(a+b)\right)
\end{aligned}
$$

En este punto consideramos un cuadrado de lados a y $h+k$. Trazamos una diagonal y separamos el lado a en segmentos de longitud b y a-b.

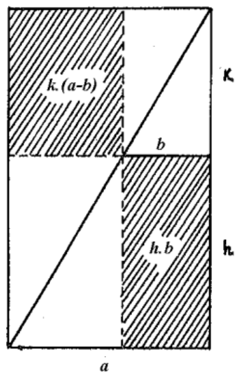

Figura 4: rectángulo de lados a y $h+k$.

La diagonal nos separa al rectángulo conformado en dos triángulos de áreas iguales. Si a cada una de estas áreas se le resta el área de los triángulos de áreas $\frac{b.k}{2}$ y $\frac{(a-b).h}{2}$, podemos concluir que las áreas de los cuadrados sombreados son iguales. Esto es, $k.(a-b) = h.b$. Reemplazando, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}.\left(a^2h + hb.(a+b)\right) \\
&= \frac{1}{3}.\left(a^2h + hba + hb^2\right) \\
&= \frac{1}{3}h.\left(a^2 + ab + b^2\right)
\end{aligned}
$$

que es el resultado al que se quería arribar.

Como hemos descrito hasta aquí, la matemática fue un medio para estudiar y manipular el entorno. No había, entonces, una búsqueda de rigurosidad en los cálculos ni de nada que diese su razón de ser. Un resultado aproximado burdamente valía lo mismo que uno exacto ya que, para sus fines, daba resultados suficientemente aceptables. Así, la Matemática era, una ciencia abocada exclusivamente a la organización, explicación y predicción de ciertos aspectos de la realidad; y no había preocupación alguna por aspectos formales relativos a la exactitud y validez de los procedimientos empleados (Guasco y Crespo Crespo, 1996; Colombo Rojas, 2014). En este contexto, el hallazgo por parte de los egipcios de un ejemplo de aplicación exacto para el cálculo del volumen de un tronco de pirámide fue un logro enorme.

3. Conclusiones

El aporte de los egipcios constituye una base importante para la constitución de una geometría más rigurosa. En el camino de la abstracción, la Matemática puede llegar a perder su razón de ser, pareciéndose más a un juego puramente formal, perdiendo tal vez los motivos que le habrían dado sentido a esos conocimientos. La obra de los egipcios, y el ejemplo analizado, nos permite dar cuenta de cuáles habrían sido los orígenes y la razón de ser de esta disciplina que hoy veneramos, y admiramos sin cuestionamientos, sin preguntarnos por qué, cómo y para qué habría surgido un determinado conocimiento.

El cálculo del volumen de una pirámide truncada da cuenta de aspectos que han permanecido aparentemente invariantes durante siglos, lo cual representa un gran logro para los egipcios. Estos no utilizaron las mismas estrategias que empleamos hoy en día para realizar este cálculo, principalmente porque en ese momento necesitaban una respuesta para sus fines prácticos. Sin embargo, si hoy tenemos que realizar este cálculo, es posible recurrir a libros de texto, o a la web y obtener una fórmula general que permita calcular el volumen de esta figura tridimensional, sin tener una idea suficientemente clara de por qué nos daría ese resultado, o por qué habría que realizar esos cálculos. El ejemplo analizado pone en evidencia los cambios que sufre un Conocimiento Matemático, hasta tratarlo como lo conocemos hoy. Esto deja abierta la necesidad de enfocar ahora el problema en la escuela, en la matemática que debe saber y transmitir un profesor, y analizar lo que los textos escolares y el currículum “mandan” estudiar; con el objetivo de contribuir a precisar las razones de la pérdida de sentido de la matemática escolar.

4. Referencias bibliográficas

Alcaraz, A. B. (2007). Matemáticas en el Antiguo Egipto. Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea: Departamento de Didáctica de la Matemática y de las CC.
Experimentales, Escuela Universitaria de Magisterio. Disponible en: http://www.ehu.eus/aba/div/paseo-06-07.pdf.
Bell, E. T. (1949). *Historia de las matemáticas*. México: Fondo de Cultura Económica.
Colombo Rojas, E. (2014). *Análisis Praxeológico y Didáctico de la génesis de la Geometría Analítica: una perspectiva histórica.* Tesis de Licenciatura en Educación Matemática. Director: Dra. Viviana Carolina Llanos, co-director: Dra. María Rita Otero UNICEN, Tandil.
García Cruz, J. A. (1988). Geometría egipcia (y II). *Revista Números*, 17, pp. 27-34.
Guasco, M. J. y Crespo Crespo, C. (1996). *Geometría: su enseñanza* (1ª ed.) Buenos Aires: Conicet.
Klimovsky, G. y Boido, G. (2005). *Las desventuras del conocimiento matemático* (1ª ed.) Buenos Aires: AZ editora.
Maza Gómez, C. (2002). *Matemáticas en la Antigüedad.* Universidad de Sevilla, sitio acreditado para curso 2007/08. Disponible en: http://personal.us.es/cmaza/index.html.
Morales Peral, L. (2002). Las matemáticas en el Antiguo Egipto. *Apuntes de historia de las matemáticas,* 1(1).