Raíces y cuadrados

por
RICARDO ALONSO LIARTE
(IES Salvador Victoria, Monreal del Campo)

El cálculo de la raíz cuadrada de un número no representa mayor problema teniendo una calculadora a mano. Es una tarea que se realiza en las aulas de forma más o menos habitual en la resolución de ejercicios y problemas. No es tan cotidiano, sin embargo, interpretar y utilizar la raíz cuadrada con sentido geométrico, más allá de algunos casos sencillos. Por ejemplo, raíz de dos representa la diagonal de un cuadrado de lado 1, la proporción en la que se basa la norma DIN. Raíz de 3 es el doble de la altura de un triángulo equilátero de lado 1. Raíz de 5 tiene que ver con el pentágono regular (y es el título de un programa de radio)… No todos los radicales ofrecen una interpretación geométrica notable, pero todos ellos se pueden representar a través de un segmento de una forma exacta.

Para ello, sobre la recta numérica, se construye un cuadrado de altura 1 y base 1, cuya diagonal, raíz de 2, transportada sobre la recta, servirá de base para construir otro rectángulo de altura 1 y de diagonal raíz de 3. La repetición del procedimiento ofrece un método recursivo para ir representando geométricamente sobre la recta las raíces cuadradas de los números naturales (figura 1).

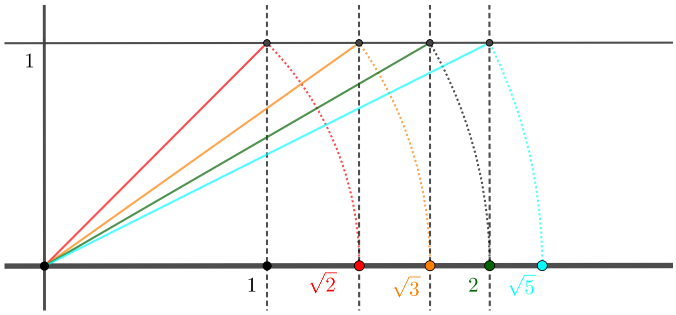

Figura 1

Otra disposición de los segmentos ofrece una visualización más llamativa: la espiral de Teodoro. Para obtenerla, partiendo de un triángulo rectángulo de catetos 1, la hipotenusa se convierte en la base del siguiente triángulo rectángulo con altura la unidad, y se repite el proceso (figura 2).

Una actividad que da un poco de color al cuaderno del alumnado y ofrece la posibilidad de desarrollar la creatividad artística consiste en proponer decorar la espiral, contextualizarla, hacer que forme parte de un dibujo. Y hay muchas posibilidades… (figura 3)

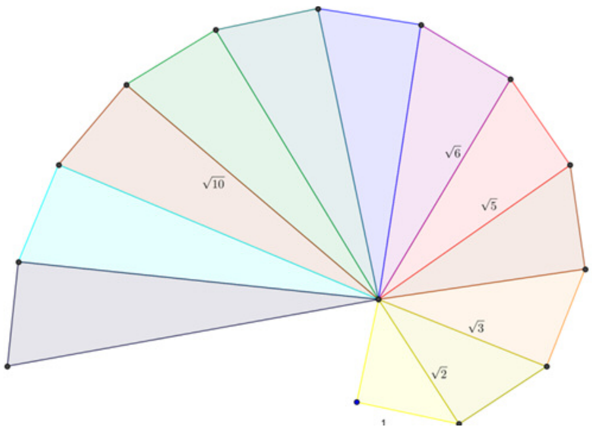

Figura 2

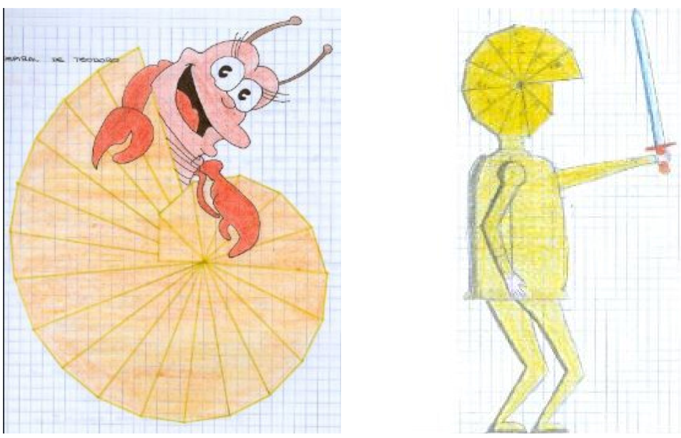
Figura 3

Este método ofrece una visión geométrica de la raíz cuadrada de los primeros números naturales, pero resulta poco eficaz para hallar el segmento que representa la de un número cualquiera. La obtención de su raíz cuadrada requiere apoyarse en la del número anterior, con lo cual el proceso es laborioso y demasiado largo para números grandes.

Existen otros procedimientos para hallar la raíz cuadrada de un número n, que mejoran claramente lo anterior. Uno de ellos es el siguiente (figura 4):

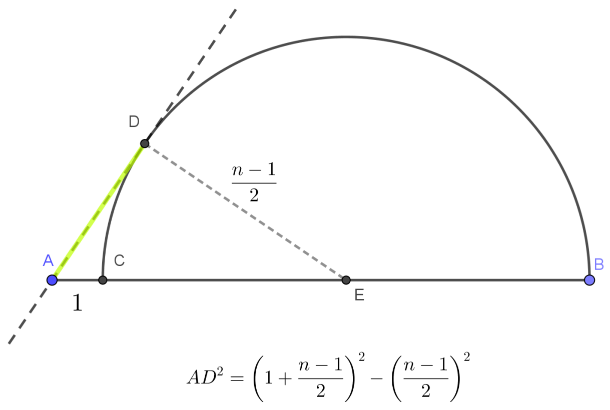

Figura 4

Se dibuja el segmento de longitud n (AB) y se señala el punto C a una distancia de una unidad de A. Se traza una semicircunferencia que tenga por diámetro el segmento CB, de longitud $n-1$. Desde el extremo A del segmento original se traza la recta tangente a la semicircunferencia en D. El segmento AD representa la raíz cuadrada de n.

Pero hay más posibilidades. A continuación se muestran dos en los que la aplicación de los teoremas del cateto y de la altura justifican las construcciones (figura 5):

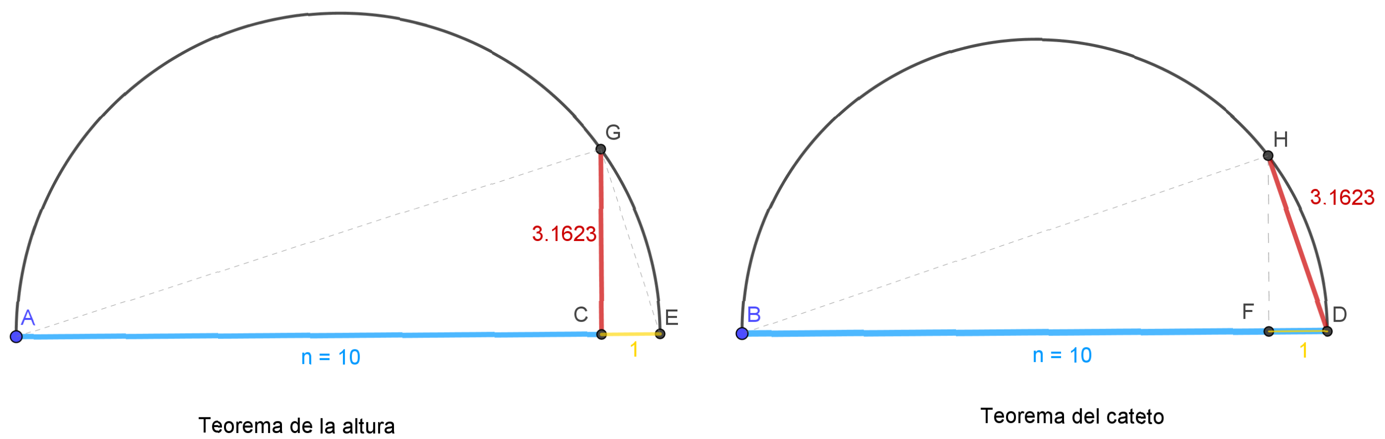

Figura 5

Al segmento de longitud n (AC), se le añade otro de longitud 1 (CE). La perpendicular a dichos segmentos por C corta en G a la semicircunferencia que tiene por diámetro AE. La aplicación del teorema de la altura para un triángulo rectángulo (y AGE lo es), demuestra que el cuadrado del segmento GC es el producto de AC y CE, es decir, n. Luego el segmento GC es la raíz cuadrada de n.

Otra manera de resolverlo consiste en aplicar el teorema del cateto a la construcción que parte del segmento de longitud n, BD, al que se sustrae un segmento de longitud 1 (FD). El cuadrado de HD equivale a n, y por tanto HD representa la raíz cuadrada de n.

Es decir, lo que se consigue con cualquiera de estos procedimientos es el lado de un cuadrado cuya área coincide con la de un rectángulo de lados 1 y n. Si en lugar de utilizar un segmento de longitud 1, se usa uno de otra longitud, el procedimiento ofrece un método para cuadrar un rectángulo de lados cualesquiera. Estos resultados aparecen en *Los Elementos*[1] de Euclides, como procedimiento para obtener la media proporcional de dos números. De la misma manera, hallar la media geométrica de dos números es equivalente a calcular la raíz cuadrada del producto de dichos números y el significado geométrico es el mismo, la cuadratura del rectángulo que tiene por lados los números dados.

El problema de la cuadratura de un rectángulo fue abordado por las matemáticas hindús. Los *Salbasutras*[2], textos que recogen procedimientos geométricos de construcción, exponen métodos para hacerlo. El siguiente está recogido en Gheverghese (1996:315-316), como el resultado del Sulbasutra de Baudhayana (entre el siglo V y II a. C.) (figura 6).

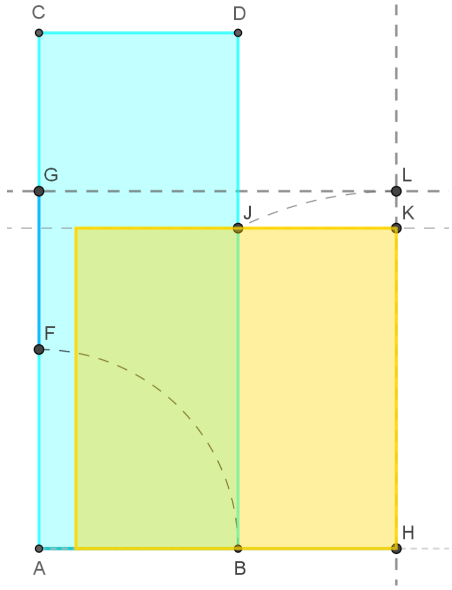

Figura 6

Partiendo de un rectángulo *ABCD*, y llevando el lado pequeño sobre el grande, se obtenien el punto *F*. Por el punto medio de *CF* (*G*) se traza una perpendicular al segmento. Por el punto *H*, obtenido al prolongar el segmento *AB* con otro igual al valor de *FG*, se traza una perpendicular a *AB* que interseca en *L* con la perpendicular del paso anterior. Con ayuda del compás se obtiene el punto *J* tal que $HJ = HL$. Trazando una perpendicular por *J* al lado *AC* se consigue el punto *K* que determina el lado del cuadrado buscado: *HK*.

El teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo *HKJ* permite justificar la construcción,

$$HK^2 = HJ^2 - KJ^2 = AH^2 - BH^2 = (AH + BH) \cdot (AH - BH) = AC \cdot AB$$

Si se analizan ambas construcciones, la griega y la hindú, se puede ver que existe una relación entre ellas que permite construir el segmento de la misma manera. Si el rectángulo tiene lados de longitudes a y b, los dos métodos construyen un segmento de longitud la semisuma de los lados, que luego se convierte en el radio de la semicircunferencia que es hipotenusa del triángulo rectángulo, uno de cuyos catetos es la semidiferencia y el otro el segmento buscado (figura 7).

¿Y cómo encaja Japón en todo esto?

Japón comenzó el periodo Edo en el siglo XVII con una etapa de paz y aislamiento frente a Occidente. Este periodo de paz propició el resurgimiento de las artes y la cultura japonesa. Y fue en ese momento cuando comenzaron a aparecer en los templos y santuarios tablillas con contenidos matemáticos, los *sangakus*, una mezcla de ofrenda, reto y arte. Se conservan en torno a las 800 tablillas.

Un resultado clásico de las matemáticas de la época Edo nos conduce de nuevo a la cuadratura de un rectángulo. Está recogido en una tablilla datada en 1820. Se consideran dos círculos de radios r y R, tangentes entre ellos.

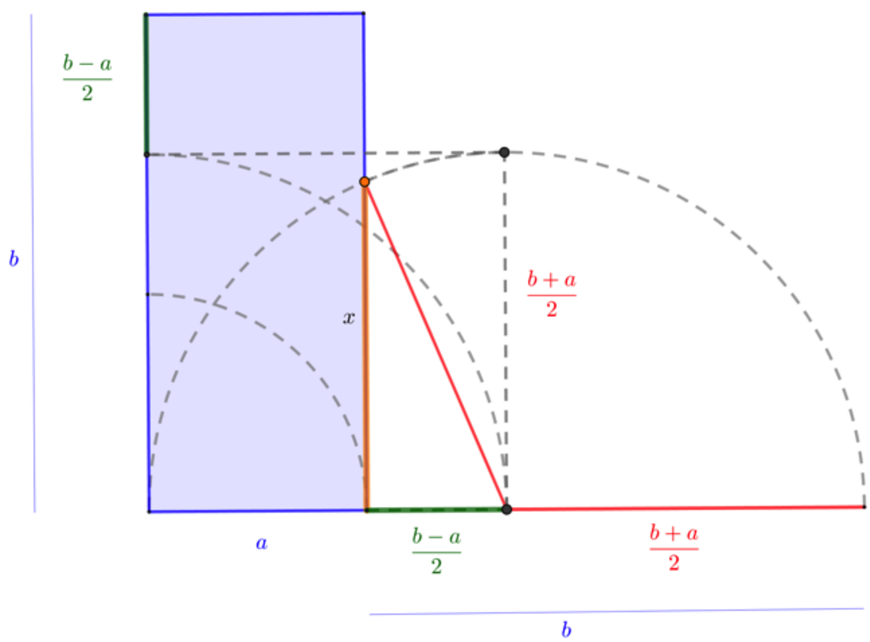

Figura 7

Hay que probar que la distancia entre los puntos de contacto de estos círculos con una tangente común a ellos, es igual a $2\sqrt{Rr}$ (figura 8).

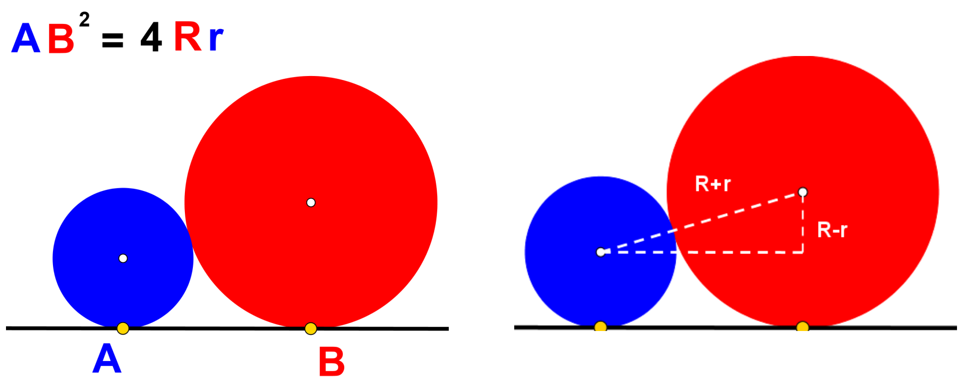

Figura 8

En definitiva es lo mismo que cuadrar el rectángulo que tiene por lados los diámetros de los dos círculos, 2r y 2R. Una construcción gráfica como la que hay en este aplet de Geogebra, lo visualiza y la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo, lo demuestra algebraicamente.

Otro ejemplo de cuadratura lo encontramos en el siguiente sangaku, datado en 1881. Algunos de estos problemas se repiten y son encontrados en diferentes tablillas, atribuidos a diferentes autores. La comprobación geométrica de que es cierta la relación se puede visualizar en este enlace (figura 9).

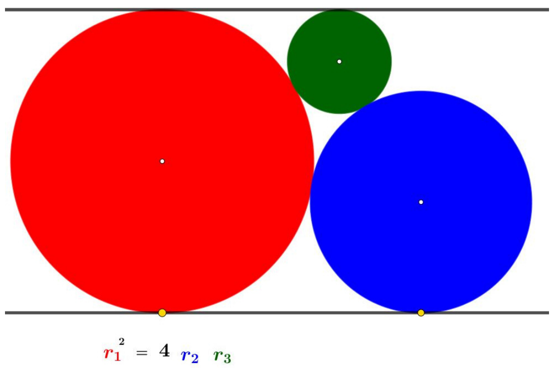

Figura 9

La cuadratura de un rectángulo, aparte de su sentido práctico, tiene un indudable aspecto estético a considerar, como se ha visto en estos ejemplos.

Referencias bibliográficas

Boyer, C. (2013), *Historia de la matemática*, Alianza Editorial, Madrid.
Gheverghese, J. (1996), *La cresta del pavo real. Las matemáticas y sus raíces no europeas*, Pirámide, Madrid,.
Huvent, G. (2008), *Sangaku. Le mystère des énigmes géometriques japonais,* Dunod, Paris.

1 Proposición 14 del Libro II. Proposición 35 del Libro III. Proposición 13 del Libro VI. Versión interactiva de Los Elementos: <https://www.c82.net/euclid/>.

2 *Sulbasutras* o «reglas de la cuerda». *Sulba* es una palabra que se refiere a las cuerdas utilizadas para realizar mediciones, y sutra significa un libro de reglas o aforismos relativos a un cierto ritual o a una ciencia. Son textos que recogen todo el conocimiento geométrico derivado de las planificaciones de templos y de la medición y construcción de altares. Se conservan tres versiones, todas ellas en verso, la más conocida de las cuales lleva el nombre de Apastamba. El carácter de estos textos, meras colecciones de reglas técnicas, excluía toda demostración. Por ello, lo único que puede conocerse son los resultados pero no los métodos y razonamientos que llevaron a ellos.