

RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO DOS ESTUDANTES DO 2º ANO DO ENSINO MÉDIO AO RESOLVEREM PROBLEMAS

Taianá Silva Pinheiro – Sandra Maria Pinto Magina – Rogério Pedro Fernandes Serôdio
taiannasilva@gmail.com – sandramagina@gmail.com – rserodio@ubi.pt
Prefeitura Municipal de Eunápolis – Brasil – Universidade Estadual de Santa Cruz - Brasil
– Universidade da Beira Interior - Portugal

Núcleo temático: I - Ensino e aprendizagem da matemática em diferentes modalidades e níveis educacionais

Modalidade: Comunicação Breve (CB)

Nível educativo: Terciário (16 a 18 anos)

Palavras-chave: raciocínio combinatório; análise combinatória; estudo diagnóstico.

Resumo

Este artigo apresenta um estudo realizado com 20 estudantes do 2º ano do Ensino Médio que teve por objetivo identificar e categorizar os níveis de raciocínio utilizados ao resolverem problemas, antes e depois de terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória. Para tal foi aplicado um instrumento diagnóstico contendo 14 questões envolvendo os quatro tipos de operações combinatórias (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), sendo controladas três variáveis: tipo de problema, ordem de grandeza e repetição. Para subsidiar a pesquisa recorremos aos estudos de Piaget (1951), além dos estudos realizados por Pessoa e Borba (2010,2012), Moro, Soares e Filho (2010) sobre o raciocínio combinatório todos com o objeto matemático análise combinatória. Metodologicamente trata-se de uma pesquisa qualitativa, com uma análise dos dados que terá como referência os níveis propostos por Moro, Soares e Filho(2010). Tal análise permitiu a adaptação desses níveis de raciocínio combinatório. Os resultados apontam que os estudantes apresentam uma ínfima melhora no desempenho dos problemas de um momento para o outro. Em relação ao nível sobre a presença de soluções combinatórias, há um aumento nos níveis, por tipo de problema, na seguinte ordem: produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação.

Introdução

Em relação à Análise Combinatória, nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN é proposto que busque o desenvolvimento do raciocínio combinatório no decorrer da Educação Básica e para que isso ocorra deve-se “[...] levar o aluno a lidar com situações que envolvam diferentes tipos de agrupamentos que possibilitem o desenvolvimento do raciocínio combinatório e a compreensão do princípio multiplicativo” (BRASIL,1998, p.52). Apesar de ser recomendado pelos PCN que seja trabalhado esse conteúdo no decorrer do Ensino

Fundamental, de acordo com Pessoa e Borba (2009), a maioria dos problemas envolvendo o raciocínio combinatório (arranjo, permutação, combinação) só são vistos no 2º ano do Ensino Médio, sendo somente trabalhado durante o Ensino Fundamental os problemas de produto cartesiano.

Pesquisas relativas à Análise Combinatória (SANTANA e OLIVEIRA (2015); PESSOA e BORBA (2009, 2010, 2012), MORO, SOARES E FILHO(2010)) apresentam e discutem sobre níveis de raciocínio combinatório nos diversos anos escolares e diferentes modalidades de ensino. Evidenciando as dificuldades dos estudantes quando abordados os problemas de permutação, combinação e arranjo.

Diante das pesquisas supracitadas, evidenciamos a de Moro, Soares e Filho (2010) em que nos níveis apresentados e discutidos pelos autores são referenciados no nosso trabalho numa adaptação para os estudantes do 2º ano do Ensino Médio com o objetivo de identificar e categorizar os níveis de raciocínio utilizados ao resolverem problemas, antes e depois de terem estudado, em ambiente escolar, o conteúdo de Análise Combinatória. Para nos aportar teoricamente, temos os estudos de Piaget sobre a ideia do acaso (1951) e algumas pesquisas sobre o raciocínio combinatório.

Quadro teórico

Estudo sobre a ideia do acaso

Para identificar e categorizar os níveis de raciocínio dos estudantes, vamos nos guiar pelas descrições apresentadas por Piaget e Inhelder na obra “A gênese da ideia de acaso na criança” (1951), de acordo com os estágios apresentados na Epistemologia Genética. A obra foi dividida em três partes (parte I e II – noções de acaso e probabilidade e parte III- operações combinatórias), vamos nos ater a terceira, pois para a construção da compreensão do acaso é necessária associação e apropriação das operações combinatórias.

Ressaltamos que os participantes do nosso estudo, segundo o que é proposto por Piaget, estão no terceiro estágio, em que o nível de sistematização e formalização são mais sofisticados. Vamos apresentar inicialmente o que os autores abordam sobre a operação combinação, em que evidencia para o experimento realizado, as observações referentes a cada estágio. Dessa maneira, para o primeiro estágio os sujeitos apresentam os resultados possíveis através de tentativas, sem sistematização. Para o segundo estágio, progredem para um método mais correto, saindo de uma ideia aditiva para a associação multiplicativa

(PIAGET; INHELDER, 1951). Já no terceiro estágio, foi realizado de maneira mais completa, percebendo as características, com foco na regularidade determinando a generalização.

Quando citaram sobre as permutações, Piaget e Inhelder (1951) evidenciaram que, comparando com a combinação, a permutação apresenta um atraso sobre a compreensão do sistema, pois essa operação passa a ser mais difícil do que a combinação por se tratar de alteração na ordem e não apenas uma combinação entre elementos. Assim, para o primeiro estágio, há a falta de compreensão sobre o que seria irreversibilidade, influenciando na construção de um sistema em que fosse apresentada todas as possibilidades. No segundo estágio, alguns sujeitos apresentaram entre impressões de regularidades sem notar a tendência de um sistema até a dedução. Para o terceiro estágio, ocorre a descoberta do sistema, em que ocorreram generalização de sistemas parciais.

No que concerne aos arranjos, os sujeitos pertencentes ao primeiro estágio realizaram por tentativa, sem perceber a existência de um sistema. No segundo estágio, ocorre um progresso gradual, no que se refere a regularidade e sistematização; como aconteceu nas permutações e combinações; apresenta algo empírico para determinar os arranjos. Já no terceiro estágio, ocorre a descoberta e compreensão da lei de forma a elencar todos os arranjos possíveis.

Desse modo, nessa seção apresentamos a descrição referente a cada operação combinatória, a partir dos estágios propostos por Piaget na Teoria da Epistemologia Genética. Para que possamos acrescentar subsídios para a análise, a fim de identificarmos e categorizarmos os níveis de raciocínio dos estudantes vamos apresentar a seção seguinte em que apresentamos sobre a ideia de alguns autores sobre o raciocínio combinatório.

Raciocínio combinatório

Na Análise Combinatória, para a resolução de problemas é necessário analisar as variáveis contidas no problema e buscar uma solução diante das possibilidades, entre elas: fórmulas, listagem, agrupamentos; sem ter que contar os elementos um a um, para isso utiliza-se do princípio multiplicativo. Essa análise diante de situações envolvendo problemas combinatórios acontece a partir do desenvolvimento do raciocínio combinatório. Para Pessoa e Borba (2012) o raciocínio combinatório é “[...] como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto” (PESSOA; BORBA, 2012, p.4).

Ratificando essa ideia, Santana e Oliveira (2014) ao referir-se a raciocínio combinatório afirmam em seu estudo que estão “[...] circunscrevendo ao encadeamento de pensamentos que nos possibilitam analisar estruturas e relações discretas relacionadas a conjuntos finitos.” (SANTANA; OLIVEIRA, 2015, p.193). Esses encadeamentos de pensamentos serão analisados na nossa pesquisa, a partir das estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes.

Metodologia

O estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa. Essa aplicação foi realizada numa escola pública do extremo sul da Bahia, escolhida por conviniência (aceitação da escola, do professor e da turma em receber a pesquisadora). Os sujeitos da pesquisa foram 20 estudantes de uma turma do 2º ano do Ensino Médio que participaram de todas as fases da pesquisa dentre a qual responderam 14 questões envolvendo os quatro tipos de operações combinatórias (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), essas situações foram elaboradas de forma que tivéssemos condições de controlar as três variáveis: tipo de problema, ordem de grandeza e repetição. Assim, as situações foram organizadas sendo duas de produto cartesiano e quatro de cada um dos tipos combinatórios restantes.

A participação dos estudantes consistiu em três etapas: a primeira, a aplicação do teste prévio, que foi realizado em dois encontros sendo que, das 14 questões, sete foram respondidas no primeiro encontro, e as questões restantes, foram respondidas após uma semana; as questões foram resolvidos em dois momentos de modo que não ficasse exaustivo para os estudantes. Os mesmos desconheciam quais seriam os dias da aplicação dos testes. Entre a etapa 1 e a etapa 2 passaram-se quatro semanas. Já na segunda etapa, a relacionada as aulas que foram ministradas pelo professor da disciplina, aconteceram em quatro encontros. Essa etapa aconteceu de modo que pudemos acompanhar se os conteúdos presentes no texto fossem ensinados pelo professor. E na terceira etapa, o teste posterior foi realizado em dois encontros, assim como foi na etapa 1.

Em relação ao instrumento¹³ utilizado no estudo, temos que as questões presentes no mesmo tanto na primeira quanto na terceira etapa são de igual teor (número de questões, mesmo tipos combinatórios com as mesmas variáveis adotadas), alterando apenas os elementos dos problemas; os estudantes só tiveram acesso ao teste,

¹³ As questões contidas no instrumento segue no anexo . Cabe salientar que foi necessária a retirada de duas questões, logo o questionário apresenta a sequência faltando as questões 6 e 9.

lápiz, borracha e caneta, ressaltamos ainda que nem a pesquisadora, nem o professor tirou dúvidas referentes ao teste. Como critério de escolha das questões de cada teste, para que a distribuição das questões fosse a mais equilibrada possível, temos, pelo menos, uma questão de cada tipo (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação), com e sem repetição e com ordem de grandeza, pequena, com intervalos de 7 à 24 e grande, com intervalos de 36 à 210.

Principais resultados

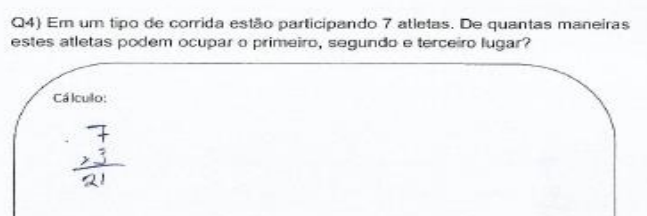
Moro, Soares e Filho (2010) propuseram níveis e subníveis para classificar o patamar do raciocínio combinatório presentes nas resoluções de problemas de produto cartesiano. No nosso estudo, dado o tamanho da amostra ser bem menor, optamos por classificar apenas por níveis, no entanto fizemos alguns acréscimos nas descrições, para ajustar ao nosso estudo.

Para além dos quatro níveis que veremos mais adiante Moro, Soares e Filho (2010)¹⁴ consideraram também os seguintes casos: (a) *soluções em branco* e (b) *só resposta*. Segue a descrição dos níveis de raciocínio acrescidos da nossa interpretação a partir da análise dos dados coletados. Com isso, estamos afirmando que os níveis apresentados a seguir são todos baseados na classificação propostas pelos autores supracitados.

Nível I – Ausência de solução combinatória

Ao utilizar o princípio multiplicativo e a árvore de possibilidades como estratégias, usa-as de maneira equivocada sem qualquer significado, nem indicação de sistematização ou generalização. Para exemplificar este nível apresentamos a figura 1.

Figura 1 – Protocolo do estudante A05 na questão 4 do teste prévio



Fonte – protocolo de pesquisa

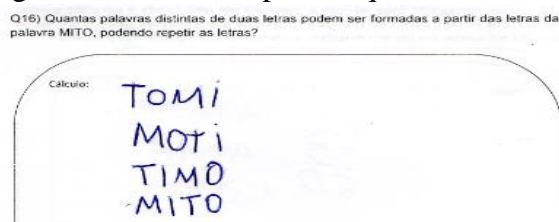
Nível II – Primeiros indícios de relações para soluções combinatórias

Além das características apresentadas por Moro, Soares e Filho (2010), e tendo por base os protocolos da nossa pesquisa, acrescentamos características que achamos pertinentes para este nível. São elas: (a) soluções em que são utilizados os números que aparecem no enunciado (por si só), mas não consideram as propriedades pertinentes do problema

¹⁴ Ver Moro, Soares e Filho(2010) para melhor compreensão dos níveis de raciocínio combinatório.

combinatório abordado na questão; (b) listagem de maneira aleatória (ou não), não elencando todas as possibilidades ou ainda a escolha de um único caso de relação entre as variáveis. (c) listagens incompletas ou aparentemente completas e aleatórias, pois nesse último caso o aluno acaba repetindo algumas combinações mesmo chegando à solução correta. (d) uso de barras posicionais, se equivocando na quantidade das mesmas.

Figura 2 – A13, teste prévio, questão 16



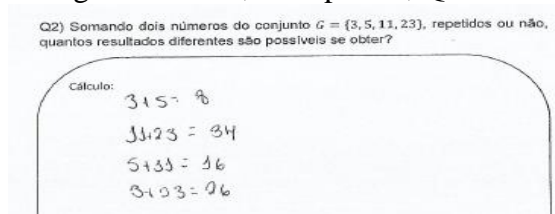
Fonte – protocolo de pesquisa

Nível III – Indícios de soluções combinatórias

Além dos sujeitos da pesquisa apresentar as características citadas anteriormente nas suas soluções, tiveram ainda as que não compreenderam as características pertinentes aos tipos de problemas combinatórios, não considerando, por exemplo, a variável repetição. Utiliza mais de uma forma de resolver, por acaso, tem a correta, mas não se sente seguro, não sabe qual resultado é o correto. Elenca sem uma sistematização, determina todas as possibilidades, chega ao resultado, mas repete combinações.

Apresentaram também listagem parcial e sistemática; indício de sistematização. Em relação à ordem de grandeza pequena, faz a listagem total e aleatória. Para exemplificar tal nível apresentaremos na figura 3:

Figura 3 – A02, teste prévio, Questão 02



Fonte – protocolos da pesquisa

Nível IV – Presença de soluções combinatórias

No nosso estudo, também foram evidenciadas soluções em que houve a representação de todos os casos possíveis, além do uso da fórmula, mesmo apresentando o resultado errado. Como segue na figura 4:

Figura 4 – A19, teste posterior, questão 16

Q16) Quantas palavras distintas de duas letras podem ser formadas a partir das letras da palavra MITO, podendo repetir as letras?

Cálculo:

$$P^2 = 4^2 = 16 \text{ palavras}$$

Fonte – Protocolos da pesquisa

Compreendida as alterações nos respectivos níveis, analisaremos a tabela 1, em que apresentamos as frequências e percentuais das soluções dos alunos para cada tipo de problema combinatório e as respectivas variáveis adotadas, repetição e ordem de grandeza, conforme os níveis apresentados.

Tabela 1 – Frequências e percentuais de soluções a cada tipo de problema, por níveis de raciocínio combinatório(f, %)

Tes Te Pré	Tipo combinatório/ variáveis do estudo													
	Produto Cartesiano		Arranjo				Permutação				Combinação			
	PPp (Q1)	PPg (Q15)	ASp (Q14)	ASg (Q16)	ARp (Q4)	ARg (Q13)	PSp (Q5)	PSg (Q11)	PRp (Q12)	PRg (Q3)	CSp (Q7)	CSg (Q8)	CRp (Q2)	CRg (Q10)
Em bran	(0;0)	(4;20)	(1;5)	(2;10)	(6;30)	(7;35)	(3;15)	(1;5)	(2;10)	(3;15)	(0;0)	(6;30)	(5;25)	(1;5)
Só res nastas	(1;5)	(1;5)	(1;5)	(0;0)	(3;15)	(1;5)	(2;10)	(3;15)	(2;10)	(3;15)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(0;0)
I	(3;15)	(2;10)	(9;45)	(5;25)	(9;45)	(5;25)	(4;20)	(12;60)	(10;50)	(7;35)	(18;90)	(12;60)	(2;10)	(6;30)
II	(1;5)	(0;0)	(8;40)	(10;50)	(2;10)	(4;20)	(10;50)	(4;20)	(3;15)	(7;35)	(2;10)	(2;10)	(9;45)	(13;65)
III	(0;0)	(1;5)	(1;5)	(0;0)	(0;0)	(2;10)	(1;5)	(0;0)	(3;15)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(4;20)	(0;0)
IV	(15;75)	(12;60)	(0;0)	(3;15)	(0;0)	(1;5)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(0;0)	(0;0)
Tes Te Pós														
Em bran	(0;0)	(0;0)	(1;5)	(1;5)	(2;10)	(10;50)	(2;10)	(1;5)	(1;5)	(1;5)	(0;0)	(0;0)	(3;15)	(0;0)
Só res nastas	(1;5)	(1;5)	(1;5)	(3;15)	(2;10)	(2;10)	(1;5)	(3;15)	(2;10)	(2;10)	(0;0)	(4;20)	(0;0)	(2;10)
I	(2;10)	(1;5)	(4;20)	(2;10)	(11;55)	(1;5)	(4;20)	(7;35)	(5;25)	(6;30)	(14;70)	(11;55)	(4;20)	(6;30)
II	(0;0)	(0;0)	(9;45)	(8;40)	(3;15)	(1;5)	(6;30)	(5;25)	(6;30)	(8;40)	(3;15)	(2;10)	(6;30)	(6;30)
III	(0;0)	(0;0)	(4;20)	(3;15)	(0;0)	(5;25)	(3;15)	(2;10)	(5;25)	(2;10)	(2;10)	(3;15)	(4;20)	(6;30)
IV	(17;85)	(18;90)	(1;5)	(3;15)	(2;10)	(1;5)	(4;20)	(2;10)	(1;5)	(1;5)	(1;5)	(0;0)	(3;15)	(0;0)

LEGENDA¹⁵

¹⁵Vide anexo.

Discussão

A partir do que foi descrito nos níveis e análise da tabela 1 observamos que de um momento para o outro (teste prévio para o posterior), que os casos em branco, diminuíram, em contrapartida aumentaram os casos de só resposta e distribuição entre os níveis. Percebemos, como era esperado, um desempenho maior nos problemas de produto cartesiano, tanto no teste prévio quanto no posterior, segundo Pessoa e Borba (2009) esse é um conteúdo visto de maneira mais formal no ensino fundamental do que os demais (arranjo, permutação e combinação).

De maneira geral, o avanço de um teste para outro foi ínfimo. Para o primeiro nível, tivemos que um maior desempenho, nos casos de arranjo, permutação e combinação. E que a variável repetição mesmo para os casos em que a ordem de grandeza é pequena, teve aumento de um teste para o outro; nos tipos de problemas envolvendo arranjo e combinação. A presença da variável repetição pode ter contribuído para esse desempenho, já que possui um grau de dificuldade, por ter que considerar essa variável, além das propriedades relativas a operação de arranjo e de combinação.

Para o nível II, temos para os casos que envolviam as questões de combinações uma queda com mais de 50 % de um teste para o outro. Quando falamos em combinações, temos uma predominância nos dois primeiros níveis, evidenciando uma dificuldade ao resolver problemas desse tipo combinatório.

No nível III e IV, por mais que a melhoria no desempenho de um momento para o outro tenha sido pequena, podemos perceber com a análise dos protocolos também, sobre a listagem de possibilidades como um passo para o desenvolvimento desse raciocínio combinatório. Esses dados nos leva a refletir sobre como deveria ser desenvolvido esse raciocínio a partir da compreensão inicial desses estudantes, buscando contribuições para o ensino desse conteúdo.

Referências bibliográficas

Brasil. Resolução CEB nº 3, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Câmara de Educação Básica do Conselho Nacional de Educação. Disponível em: <http://www.seduc.ro.gov.br/portal/legislacao/RESCNE003_1998.pdf>. Consultado 21/06/2016

Moro, M. L. F.; Soares, M. T. C.; Filho, J. A. C. (2010). Raciocínio combinatório em problemas escolares de produto cartesiano. Zetetike, 18, 211-241.

Oliveira, T. Santana, E(2015). O raciocínio combinatório revelado ao longo da Educação Básica. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 189-213.

Pessoa, C.A.S.; Borba, R. E.S.R (2009) Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. *Zetetike*,17, 105-150.

_____(2010). O Desenvolvimento do Raciocínio Combinatório na Escolarização Básica. *Revista de Estudos Internacionais e de Fronteira da UFPE*, 1,1-22.


_____(2012). Problemas combinatórios: estratégias e respostas de alunos da Educação Básica. In: *Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)*, 5.

Piaget, J. Inhelder, B(1951). *A origem do acaso na criança*. Rio de Janeiro: Record Cultural.

Anexo

[1] Problemas contidos no instrumento

PROBLEMA COMBINATÓRIO	CLASSIFICAÇÃO
Q1) Cláudia tem 3 blusas e 4 calças. De quantas maneiras diferentes ela pode se arrumar usando uma calça e uma blusa?	Produto cartesiano, parte-parte, pequeno
Q2) Somando dois números do conjunto $G = \{3, 5, 11, 23\}$, repetidos ou não, quantos resultados diferentes são possíveis se obter?	Combinação com repetição pequeno
Q3) Saussas é o nome de uma aldeia francesa. Quantos são os anagramas da palavra SAUSSAS? (Anagrama de uma palavra é uma nova “arrumação” das letras dessa palavra)	Permutação com repetição grande
Q4) A diretoria de um clube é composta por 7 membros que podem ocupar o cargo de presidente, vice-presidente ou secretário. De quantas maneiras podemos formar, com esses membros, chapas que contenham presidente, vice-presidente e secretário?	Arranjo sem repetição grande

Q5) Quantos números de 4 algarismos diferentes podem ser escritos com os algarismos 2,5,6 e 8?	Permutação sem repetição pequeno
Q7) Quantas duplas diferentes podemos formar com um grupo de 6 tenistas?	Combinação sem repetição pequeno
Q8) Quantas comissões diferentes, de 3 pessoas, podem ser formadas a partir de um grupo com 10 pessoas?	Combinação sem repetição grande
Q10) Um menino encontra-se em uma sorveteria que oferece 8 opções de sabores (chocolate, coco, tapioca, morango, cajá, maracujá, goiaba e manga). De quantas maneiras diferentes ele pode escolher um sorvete com três bolas, sabendo que ele pode repetir sabores e que a ordem não importa?	Combinação com repetição grande
Q11) Foram selecionadas para uma entrevista 5 pessoas (André, Mateus, Joana, Carla e Bruna) que chegaram ao mesmo tempo à entrevista. De quantas maneiras diferentes eles podem formar filas enquanto aguardam a sua vez?	Permutação sem repetição grande
Q12) Quantas sequências diferentes, de 4 símbolos, podemos formar com os símbolos abaixo 	Combinação sem repetição pequeno
Q13) Suponhamos que $x, y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Quantos pares ordenados, (x, y) distintos, podemos formar utilizando todos os valores possíveis para x e y ?	Arranjo com repetição grande
Q14) Quantas palavras de 3 letras, distintas – com ou sem significado –, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?	Arranjo sem repetição pequeno
Q15) Numa lanchonete há 12 tipos de sanduíche e 5 tipos de refrigerante. Quantas opções de lanche podem ser formadas com 1 sanduíche e 1 refrigerante?	Produto cartesiano, parte-parte, grande
Q16) Quantas palavras distintas de duas letras podem ser formadas a partir da palavra PANO podendo repetir as letras?	Arranjo com repetição pequeno

[3] Legenda da tabela 1 - PPp = Parte parte pequena; PPg=Parte parte grande; ASp= Arranjo sem repetição pequena; ASg =Arranjo sem repetição grande; ARp =Arranjo c/ repetição pequena; ARG = Arranjo repetição grande; PSp =Permutação sem repetição pequena; Psg = Permutação sem repetição grande; PRp =Permutação com repetição pequena; PRg =Permutação com repetição grande; Crp=

Combinação com repetição pequena; Crg= Combinação com repetição grande; Csp= Combinação sem repetição pequena; Crg= Combinação com repetição grande.