CB-1.378

ANTECEDENTES A LA DISTRIBUCIÓN NORMAL EN EL BACHILLERATO TECNOLÓGICO

Omar Pablo Torres Vargas – Ana María Ojeda Salazar
optorres@cinvestav.mx – amojeda@cinvestav.mx
Cinvestav, México

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos
Modalidad: Comunicación Breve (CB)
Nivel educativo: Bachillerato
Palabras clave: Estocásticos, distribución normal, bachillerato tecnológico, enseñanza.

***Resumen**. Esta investigación, cualitativa, enfoca la enseñanza de variables aleatorias y sus distribuciones, por sus prerrequisitos, en el bachillerato tecnológico. A partir de la propuesta curricular de Heitele (1975), caracterizamos la comprensión de estudiantes de la distribución normal y la propuesta institucional respectiva (DEMS-IPN, 2008). Abductivamente consideramos, en retrospectiva, tres asignaturas consecutivas. En un grupo de Probabilidad y Estadística, de sexto semestre, los estudiantes privilegiaron la operatividad entre conjuntos sin interpretar los resultados como eventos del espacio muestra, lo cual precedió a su dificultad para identificar los eventos correspondientes a los valores de una variable aleatoria para describir su función de densidad de probabilidad. Otro grupo de estudiantes, de Cálculo Integral en quinto semestre, en problemas de relacionar una integral definida y el área bajo la curva (Orton, 1983), mostraron dificultades con conjuntos, con el lenguaje proposicional, con identificar en una desigualdad los límites de una integral definida y en la gráfica de esta última. Durante la enseñanza del comportamiento de funciones a cuatro estudiantes de Cálculo Diferencial, del cuarto semestre, se les dificultó la lectura de la simbología matemática y procedimientos algebraicos para solucionar una inecuación. Los resultados en Cálculo explicarían dificultades de comprensión de la función de densidad normal.*

El problema de investigación. La discontinuidad del tratamiento de estocásticos en el sistema educativo (Torres, 2013) y el énfasis en el conocimiento de cálculo (Pollatsek, Lima y Well, 1981) de sus conceptos en el ejercicio de la propuesta educativa provocan que los estudiantes inadviertan lo aleatorio de los fenómenos a los que se refieren. El programa de *Probabilidad y Estadística* en sexto semestre (DEMS-IPN, 2008) establece como actividad sustantiva de aprendizaje "revisar el modelo matemático de la distribución Normal, el significado de sus parámetros, su representación gráfica y las condiciones en las que sea

ISBN 978-84-945722-3-4

aplicable” (p. 14). Su importancia deriva de que “Una de las variables aleatorias que se encuentran frecuentemente en la práctica es la variable aleatoria continua que tiene una distribución normal” (Bowker y Lieberman, 1981, p. 78).

Esta investigación, parte de una más amplia, se refiere a la comprensión de estudiantes de sexto semestre del bachillerato tecnológico de la función de distribución normal. Abductivamente, rastreamos sus requerimientos conceptuales en los dos cursos de matemáticas antecedentes. Más precisamente, fuimos “del resultado al caso” (Deledalle, 1990, p. 171), lo cual interpuso “una etapa suplementaria en el proceso experimental” (Deledalle, 1990, p. 170). Presentamos los primeros resultados obtenidos con estudiantes bachilleres que cursaban: *Probabilidad y Estadística*, del sexto semestre; *Cálculo Integral*, del quinto semestre; y *Cálculo Diferencial* del cuarto semestre.

Preguntas de investigación. ¿Cuáles son las características de la comprensión de las ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) de estudiantes en las asignaturas *Cálculo Diferencial*, *Cálculo Integral* y *Probabilidad y Estadística* del bachillerato tecnológico? ¿Cuáles son las implicaciones de la enseñanza del comportamiento de funciones, área bajo la curva, tratamiento de datos agrupados y muestreo para la enseñanza de variables aleatorias y sus distribuciones a los estudiantes bachilleres?

Elementos teóricos. Epistemológicamente, el triángulo propuesto por Steinbring (2005) para la constitución del concepto matemático plantea la interrelación necesaria entre *objeto*, *signo* y *concepto*. En estocásticos, la variable aleatoria implica un giro conceptual respecto a la función de variable real, dado que el dominio de la primera es un espacio muestra, el valor que asigna a cada evento de ese espacio es *probable* y su probabilidad corresponde a la del evento; el dominio de la segunda es un conjunto que no depende del azar y se predicen con seguridad los valores asignados. La variable estocástica es una de las diez ideas fundamentales que Heitele (1975) ha propuesto como guía continua de un curriculum en espiral (Bruner, 1960) para dotar al estudiante de modelos explicativos de la realidad en cada etapa de su desarrollo. En una vía similar, la idea de variación, planteada por Burril y Biehler (2013) como fundamental en estadística, es “la identificación y la medida de la variabilidad para predecir, explicar y controlar, se utiliza para describir el efecto global del cambio” (Burril y Biehler, 2013, p. 9). Wild y Pfannkuch (1999) distinguieron tres mensajes principales de la variación como un elemento central de las definiciones publicadas del

ISBN 978-84-945722-3-4

pensamiento estadístico, surgidas en el área de control de calidad: “La variación es omnipresente; la variación puede tener serias consecuencias prácticas; y las estadísticas son un medio para entender un mundo de variaciones” (p. 235). Además, la distribución es como “los lentes por los cuales observamos la variación” (Wild, 2006, p. 11), en el mundo real y en los datos.

Pollatsek *et al.* (1981) distinguieron tres tipos de conocimiento en la comprensión de un concepto —el de cálculo, el funcional y el analógico— y la necesidad de introducir los tres en la enseñanza. Por su parte, Hogarth (2002) ha señalado la interacción entre los sistemas *tácito* (operaciones automáticas) y *deliberado* (operaciones controladas) del individuo para estimular su memoria de trabajo. Formalmente, una variable estocástica es una función, a menudo denotada por X y, por x (aquí consideramos sólo $x \epsilon \Re$), los valores que asigna a los eventos E de un espacio muestra Ω ($X(E)$, $E \subseteq \Omega$). Por tanto, la probabilidad de que la variable X asuma un determinado valor (o valores) es la del evento respectivo, correspondiente a la inversa de la variable, o $X^{-1}(x)$ (o del conjunto de valores de que se trate). En la enseñanza en el bachillerato, esta última notación con frecuencia se omite y se presentan las expresiones analíticas de las variables aleatorias o sus gráficas respectivas. Así, la enseñanza de la distribución normal frecuentemente se basa en la gráfica de su función de densidad, pues su expresión analítica no es sencilla. Cuando se le presenta mediante su expresión analítica, Bowker y Lieberman (1981) especifican que “esta función de densidad no puede integrarse directamente. Sin embargo, la probabilidad de que X sea menor o igual a b puede representarse por el área sombreada” (p. 79) que subtiende la curva de la función en el intervalo $(-\infty, b)$.

Método. Con carácter cualitativo (Borovcnik, 2014) e interpretativo (Wittrock, 1986), la realidad de la organización local de la enseñanza y del aprendizaje en el aula (IREM, 1997) se observa como proceso contextualizado en el medio educativo; la observación participante se enfoca en la “descripción de la realidad, además, el profesor debe ayudar a los estudiantes, por etapas sucesivas, a que sustraigan de ella poco a poco para construir progresivamente un modelo matemático” (p. 57). Mediante la célula de análisis (Ojeda, 2006) caracterizamos el desempeño de estudiantes del bachillerato tecnológico, durante su estudio de la función de densidad normal planteada como variable aleatoria y sólo como función. En los dos casos se

ISBN 978-84-945722-3-4

estudió la comprensión de la variación (Burril y Biehler, 2013; Wild y Pfannkuch, 1999), es decir, tanto desde el punto de vista probabilístico como determinista. Aplicamos el triángulo epistemológico en el análisis de la interacción en el aula (Steinbring; 2005). La Figura 1 resume el procedimiento seguido e indica el tipo de instrumentos aplicados para recolectar datos.

Del curso *Probabilidad y Estadística*, los datos de seis sesiones de enseñanza impartidas por el profesor titular y de dos sesiones de enseñanza impartidas por este investigador se recopilaron a partir de un guión de observación en bitácora y de la aplicación en 50 minutos de un cuestionario con cinco problemas de probabilidad y estadística (PE). De la observación de cuatro sesiones de enseñanza impartidas por el profesor titular a 44 estudiantes del quinto semestre en *Cálculo Integral*, con registro en bitácora, se identificaron sus dificultades para tratar conjuntos y el lenguaje proposicional, para reconocer una desigualdad como los límites de una integral definida y en la presentación gráfica de ésta. Los resultados se consideraron para diseñar una estrategia de enseñanza, en seis sesiones en condiciones institucionales, del comportamiento de funciones en *Cálculo Diferencial*, impartida por este investigador, a cuatro estudiantes del cuarto semestre y uno del sexto semestre; se trató el tema de conjuntos solución de desigualdades, la actividad “Estaturas de los estudiantes del grupo”, y el cuestionario (CF) “Comportamiento de funciones” con 24 preguntas abiertas, contestado en 97 min.

ISBN 978-84-945722-3-4

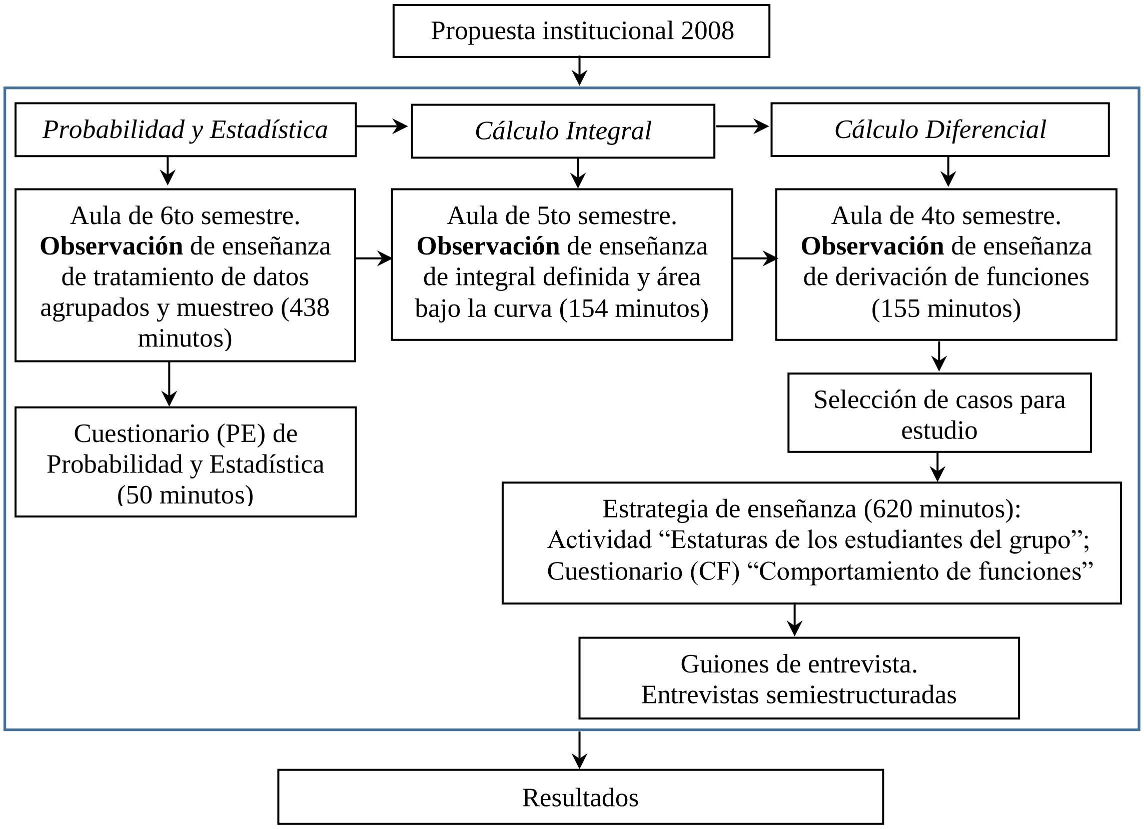

Figura 1. Procedimiento de recolección de datos. Primera etapa de la investigación.

Resultados. Los resultados generales para la formación en estocásticos indican la necesidad de implementar estrategias de enseñanza que pongan de relieve la naturaleza aleatoria de los fenómenos en estudio.

Probabilidad y Estadística. Aunque el álgebra de conjuntos es una fuerte estructura simbólica para definir y tratar espacios muestra, al privilegiar en la enseñanza el conocimiento de cálculo (Pollatsek *et al*., 1981) de conjuntos sin interpretarlos como eventos del espacio muestra en cuestión, con sus cardinalidades respectivas, las ideas de estocásticos resultaron poco significativas para los estudiantes. Así, para el reactivo del cuestionario PE caracterizado en la Tabla 1, el diagrama de Venn en la respuesta de un estudiante (véase la Figura 2) no corresponde a la situación de referencia planteada.

Tabla 1. Caracterización del tercer reactivo del cuestionario PE según los criterios de análisis (Ojeda, 2006).

Situación	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos semióticos	Términos empleados

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

A partir de los datos de lectura de 50 estudiantes en tres idiomas, encontrar la probabilidad de que uno de ellos tomado al azar lea al menos uno de los idiomas.	Medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, combinatoria (técnica de conteo), variable estocástica.	Álgebra de conjuntos, operaciones aritméticas.	Signos numéricos, lengua natural escrita.	Probabilidad, 50 estudiantes; 30 francés, 20 alemán, 5 náhuatl, 2 francés y náhuatl, 3 alemán y náhuatl, 2 alemán y francés, uno los tres idiomas; cuando menos un idioma, un estudiante.

Las tres mayores cardinalidades propuestas en el enunciado activaron sólo una relación aditiva entre ellas (sistema tácito; Hogarth, 2002); por las cardinalidades totales, el estudiante interpretó el enunciado como una partición del conjunto universo en cuatro subconjuntos, en lugar de la planteada en ocho subconjuntos no vacíos mediante las cardinalidades dadas. Su diagrama correspondería a la proposición “si se lee náhuatl, se lee francés y alemán”. Su asignación incorrecta de cardinalidades lo llevó a responder que la probabilidad pedida correspondía al evento seguro. La Figura 2 sintetiza la interrelación incompleta entre objeto, signo y concepto para este caso.

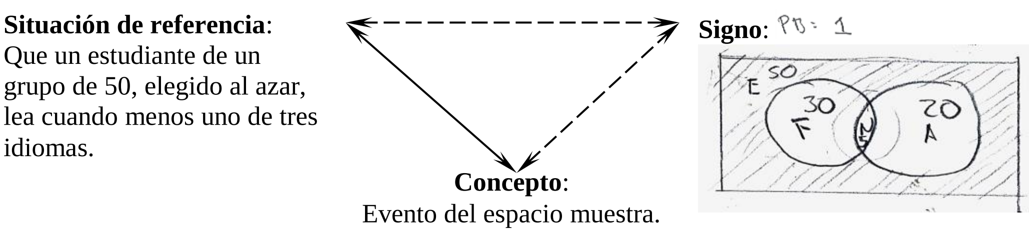

Figura 2. Triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) para “Espacio muestra”.

Plantear en el enunciado del problema otras cardinalidades para las que no se evocara una relación tan inmediata activaría el sistema deliberado (Hogarth, 2002), por lo tanto, se fomentaría que el estudiante expresara a cada subconjunto mediante una proposición. “Como modelo explicativo, el concepto de variable estocástica juega un papel respecto a tres puntos: la distribución de una variable, su esperanza y la composición de variables estocásticas para obtener otras nuevas” (Heitele, 1975, p. 200). Este concepto es fundamental para dar sentido a fenómenos naturales, así que nuestros resultados anticipan dificultades de los estudiantes para identificar los eventos correspondientes a los valores de una variable aleatoria, como la distribución normal, que “juega una parte fundamental en la explicación del mundo que nos rodea” (Heitele, 1975, p. 200).

ISBN 978-84-945722-3-4

Cálculo Integral. Al plantear ejemplos con funciones acotadas en intervalos definidos, la identificación en una desigualdad de los límites de una integral definida se dificultó al suponer que el límite inferior siempre sería el origen, como ocurrió con la estudiante E_{ci} en una sesión (Tabla 2; "OC" denota otros conceptos, "TE" los términos empleados):

Tabla 2. Episodio analizado de la intervención de E_{ci} en una sesión de *Cálculo Integral*.

	Intervención	Observaciones
E_{ci}	¿Siempre se pone **del origen al punto más lejano** la integral?	Antecedentes a F1 y F8. OC: Intervalo, valores extremos, integral definida, variable real, origen, sistema cartesiano, distancia entre dos puntos. TE: Del, al; origen, punto más lejano.

Cálculo Diferencial. El tema de desigualdades es un requerimiento para la comprensión de los conceptos tanto del Cálculo (números reales, intervalos, funciones, límites, continuidad, derivada, integral definida y área bajo la curva, por ejemplo) como de Estocásticos. De la actividad "Estaturas de los estudiantes del grupo", resultó: 1) la inadvertencia de los estudiantes del azar en las mediciones de magnitudes físicas; 2) desconocimiento del trazo de un histograma de frecuencias para las mediciones efectuadas; y 3) la adopción de la moda como resultado del conjunto de mediciones, en lugar de la media, en acuerdo con una de las concepciones de "promedio" identificadas por Mokros y Russell (1995). El programa de la DEMS-IPN (2008) establece como actividad sustantiva de aprendizaje del sexto semestre "revisar el modelo matemático de la distribución Normal, el significado de sus parámetros, su representación gráfica y las condiciones en las que sea aplicable" (p. 14).

La dificultad de los estudiantes en la aplicación de procedimientos algebraicos para solucionar una inecuación planteada en simbología matemática, para cuya lectura también mostraron dificultades, explicaría su incomprensión de la función de densidad normal. Ejemplo de esto es el pasaje de la primera sesión de la estrategia de enseñanza conducida por I, respecto al conjunto solución de una desigualdad, aún no aprehendido por los estudiantes asistentes (E_2, E_3 y E_4) (Tabla 3; "OC" denota otros conceptos, "RS" recursos semióticos empleados).

Tabla 3. Episodio analizado de la primera sesión de la estrategia de enseñanza.

Interventor	Intervención	Observaciones
I	Entonces, esto [señala el intervalo (a, b)] ¿que sería? "a..." eh... "(a, coma, b)" entre paréntesis.	OC: Conjunto solución. RS: Intervalo abierto.
E_3	Una coordenada. Sólo un punto. Bueno, sobre la... la línea real que se está indicando, ¿no?, entre esos dos números.	OC: Coordenada, punto, recta real.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

I	¿Estás de acuerdo [en] que sea una coordenada? [pregunta al estudiante E_4].	OC: Coordenada.
E_4	¿Una distancia?	OC: Distancia.
I	Una distancia... ¿Para ti? [pregunta a la estudiante E_2].	
E_2	Sería un... que está ubicada entre esos dos puntos, ¿no?	OC: Noción de intervalo.

La Figura 3 indica que las relaciones que constituyen el concepto conjunto solución, en este caso, no han sido consolidadas por los tres estudiantes participantes.

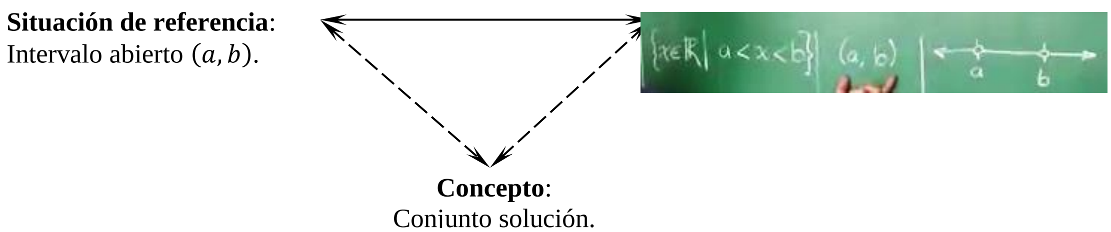

Figura 3. Caracterización de conjunto solución mediante el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005).

Comentarios. Los resultados reportados de los cursos *Probabilidad y Estadística*, *Cálculo Integral* y *Cálculo Diferencial*, apuntan a una desarticulación entre ellos, no de manera curricular sino en la forma de tratar sus temas en la enseñanza para que sean consistentes las estructuras de los modelos explicativos, que se basen en intuiciones favorables y que fomenten la constitución de la distribución normal por los estudiantes de grados superiores. Privilegiar en la enseñanza la operatividad de desigualdades, sin que las diferentes formas de presentación de sus conjuntos solución sean claras al estudiante, puede provocar la indistinción entre referente y signo y, por tanto, se coarta el perfeccionamiento del concepto (Steinbring, 2005), por ejemplo, el planteamiento de desigualdades en un problema en estocásticos, como en el registro de las mediciones de estaturas mediante intervalos. Los temas *Integral definida* y *área bajo la curva* serían antecedentes para el estudio de la probabilidad (como áreas bajo la curva de funciones de densidad) si se incluyeran en su enseñanza ejemplos de funciones comunes en una introducción elemental a estocásticos que, a la vez, promovieran dotar de sentido a los temas en foco. Orton (1983) reportó que muchos de los estudiantes de su estudio tuvieron problemas “en la comprensión de la relación entre una integral definida y áreas bajo la curva” (p. 12). Si en la enseñanza se pretende introducir el papel de la variación por medio del comportamiento de funciones de naturaleza estocástica,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

éstas deben tratarse como funciones de densidad de probabilidad contextualizadas en "la concepción estadística de problemas del mundo real" (Wild y Pfannkuch, 1999, p. 223). La propuesta curricular de los conceptos de la disciplina matemática tendrá que adaptarse a las intuiciones propias del sujeto en la formación de los modelos explicativos, ya que el establecimiento intuitivo previo en estocásticos es urgente. "Por otro lado, la adquisición temprana de modelos explicativos inadecuados puede, aparentemente, desarrollar intuiciones *contrariées*, firmemente arraigadas, difíciles de erradicar y que pueden impedir la adquisición del conocimiento analítico" (Heitele, 1975, p. 189). La advertencia del azar en mediciones físicas directas fue difícil para los estudiantes de ingeniería (Torres, 2013); el conocimiento previo al estudio de la normal debe estar sustentado por un modelo explicativo apropiado (Heitele, 1975) que incluya la comprensión de la variación (Wild y Pfannkuch, 1999), tratamiento de datos agrupados, muestreo, integral definida, área bajo la curva, desigualdades y comportamiento de funciones, por citar algunos, para una formación sustentada en el desarrollo de las ideas fundamentales de estocásticos.

Referencias bibliográficas

Borovcnik, M. (2014). Empirical research on understanding probability and related concepts - A review of vital issues. In de Sousa, B. & Gould, R. (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics.* The Netherlands: International Statistics Institute.

Bowker, A. & Lieberman, G. (1981). *Estadística para ingenieros*. Colombia: Prentice/Hall Internacional.

Bruner, J. (1960). *The Process of Education*. USA: Harvard University Press.

Burrill, G. & Biehler, R. (2013). Les idées statistiques fondamentales dans le curriculum scolaire. *Statistique et Enseignement*, 4 (1), 5-24.

Deledalle, G. (1990). *Leer a Peirce hoy*. España: Gedisa.

Dirección de Educación Media Superior (DEMS-IPN). (2008). *Programas de Estudios*. México: IPN.

Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics*, Vol. 6 (2), pp. 187-205.

Hogarth, R. M. (2002). *Educar la intuición*. *El desarrollo del sexto sentido*. España: Paidós.

IREM, (1997). *Enseigner les probabilités au Lycée*. France : Réseau des IREM, Direction des Lycées et Collèges, pp. 54-104.

Mokros, J. and Russell, S. J. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 26, pp. 20-39.

Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años*. México: Santillana, Cinvestav, pp. 195-214.

ISBN 978-84-945722-3-4

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics* 14, pp. 1-18.

Pollatsek, A.; Lima, S.; Well, D. (1981). Concept or Computation: Students' Understanding of the Mean. *Educational Studies in Mathematics* 12, pp. 191-204.

Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.

Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por estudiantes de ingeniería: El caso de un instituto tecnológico.* Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.

Wild, C. (2006), The concept of distribution. *Statistics Education Research Journal*, Vol. 5 (2), pp. 10-26.

Wild, C. and Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, Vol. 67 (3), pp. 223-265.

Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. España: Paidós.

ISBN 978-84-945722-3-4