

Actividades de razonamiento «up and down» para trabajar las fracciones en 1.º de ESO

por

AURORA DOMENECH PENÓN Y SERGIO MARTÍNEZ-JUSTE

(IES Pilar Lorengar; IES Pilar Lorengar y Universidad de Zaragoza)

Dentro de un proyecto de innovación basado en la introducción de una metodología de cooperación docente en el departamento de Matemáticas de nuestro centro (IES Pilar Lorengar, Zaragoza) hemos elaborado una secuencia didáctica innovadora para enseñar la fracción en 1.º de ESO. Esta secuencia introduce actividades que no suelen incorporar las unidades didácticas tradicionales. En este artículo presentamos un tipo concreto de estas tareas novedosas, las basadas en razonamientos *up and down*, que a través de la resolución de problemas inciden en los significados de la fracción.

¿Qué es el razonamiento *up and down*?

Una actividad de razonamiento *up and down* «implica coordinar la idea de la fracción como una unidad múltiple ($a/b = a$ veces $1/b$) con la idea de fracción unitaria ($1/n$) como una unidad iterativa y se manifiesta en las actividades de representar fracciones a partir de otra fracción» (Buforn, Llinares y Fernández, 2018). Al alumno se le solicita representar un objeto con una cierta medida expresada mediante una fracción dando como dato un objeto cuya medida viene expresada por otra fracción.

Una actividad que requiere este tipo de razonamiento sería, por ejemplo, la que introducen en un cuestionario para maestros en formación Buforn y Fernández (2014):

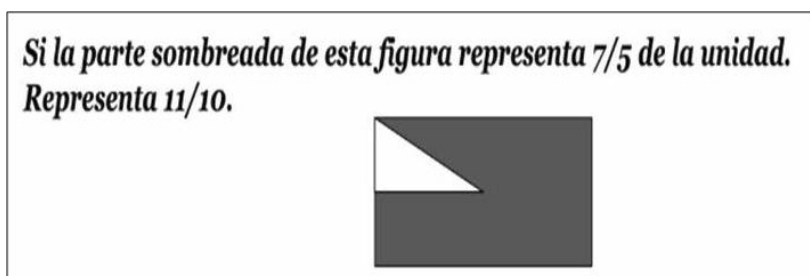


Figura 1. Problema de razonamiento *up and down* extraído de Buforn y Fernández (2014)

Para poder resolver esta tarea, debemos interpretar correctamente la fracción $7/5$ no como el número que representa la parte del rectángulo que está sombreada sino como la cantidad de área de una unidad diferente, u . En el caso anterior, podemos dividir toda la figura en triángulos de la misma área que el triángulo en blanco. Hay sombreados 7 de esos triángulos, luego cada uno de ellos es $1/5$ de la unidad, u , en la que estamos midiendo, es decir $1/8$ de rectángulo es $1/5$ de la unidad que estamos empleando. Para construir $11/10u$ basta con buscar piezas de tamaño la mitad que uno de esos triángulos ($1/16$ del rectángulo) y *juntar* 11 de ellas.

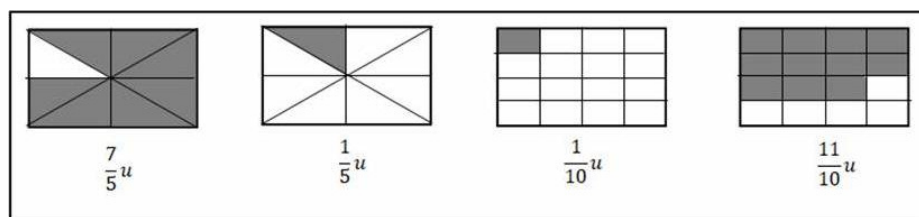


Figura 2. Una posible resolución del problema planteado en la figura 1

Aunque la tarea anterior pudiera resultar complicada para un alumno de 1.º de ESO, este tipo de actividades tienen un gran interés en diferentes niveles educativos. El hecho de que el alumnado sea capaz de establecer coordinaciones de este tipo implica un avance conceptual importante en la comprensión del concepto de fracción.

Actividades para 1.º de ESO y últimos cursos de primaria

En nuestra propuesta para trabajar la fracción en 1.º ESO hemos introducido actividades como las anteriores con un nivel acorde a nuestros estudiantes. En la figura 3 mostramos la primera actividad de este tipo a la que se enfrentan en clase, en la que solicitamos explícitamente como paso intermedio que construyan un objeto de medida unidad. Es importante señalar que no se habían hecho ni explicado ejercicios similares anteriormente.

[1] El siguiente papiro mide $\frac{5}{3}$ Bu.

--	--	--	--	--

a) Dibuja 1 Bu.

b) Ahora, dibuja un papiro de $\frac{3}{4}$ Bu.

Figura 3. Primera actividad de aula de tipo *up and down* en 1.º ESO

Aclaremos que *Bu* es el término que utilizamos en nuestra propuesta para nombrar una unidad de medida de longitudes y también al objeto que lo soportaba. Previamente se habían realizado actividades manipulativas de cálculo de medida y construcción de tiras de papel que simulaban papiros del mundo egipcio.

Después de observar sus respuestas y ponerlas en común con todo el grupo, se formaliza el esquema de razonamiento para la resolución con apoyo de proyecciones en la pizarra digital como la que se observa en la figura 4:

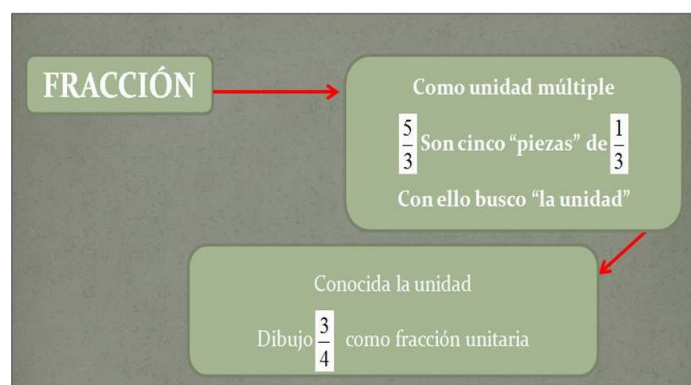


Figura 4. Diapositiva utilizada en clase para formalizar un posible esquema de razonamiento

La mayor dificultad que encuentran los alumnos al principio es buscar un objeto que represente la unidad de medida. Actividades de esta *búsqueda de la unidad* podrían hacerse previamente o después de los primeros ejemplos. Incluso podrían presentarse como un reto o un juego en el último ciclo de primaria. Algunas actividades muy interesantes de este tipo pueden encontrarse en el libro de Cordel y Mason (2000) sobre el razonamiento proporcional. De hecho este tipo de actividades han sido siempre relacionadas con la enseñanza temprana de la proporcionalidad (Lamon, 2007). Presentamos algunos ejemplos extraídos o adaptados del libro de Cordel y Manson en los que dada una figura inicial sobre una trama de puntos a la que se le otorga una fracción como medida se pide al alumno que dibuje la unidad.

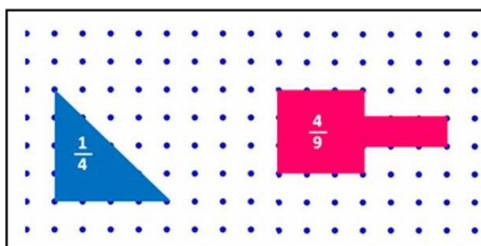


Figura 5. Actividad para completar la unidad extraída de Cordel y Manson (2000)

El trabajo con tramas o con papel cuadrículado puede facilitar encontrar la solución en este tipo de ejercicios. Si el triángulo azul mide como una pieza (porque el numerador es 1) de las cuatro en las que se ha partido (fraccionado) una unidad (denominador 4), necesitamos cuatro triángulos iguales (en un nivel de dificultad mayor cualquier otra pieza de la misma área) y colocarlos de forma que se genere un rectángulo, que es la figura que se pide que represente la unidad completa. Esta actividad se puede trabajar con lápiz y papel, o con copias manipulables del triángulo azul. En el caso de la figura rosa se deben identificar que el rectángulo buscado se ha fraccionado en 9 piezas iguales, y que una de ellas ($1/9$) debe ocupar una superficie que debe ser la cuarta parte de la figura rosa, por ejemplo 3 cuadrados de la trama puestos en horizontal.

En cualquiera de los casos, el alumno de forma intuitiva está trabajando el concepto de fracción como unidad múltiple: $4/9$ son 4 piezas de $1/9$. Con 9 piezas como esa de $1/9$ generarán un rectángulo que representará la unidad completa.

Es importante buscar la unidad no solo con fracciones propias (recordemos que en el mundo anglosajón el uso extendido del número mixto provoca que se preste poca atención a las fracciones impropias) por lo que podemos ampliar estas actividades, con la misma idea de dibujar un rectángulo que represente la unidad completa:

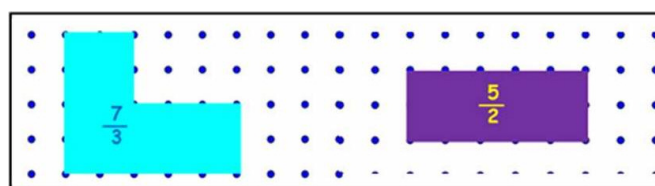


Figura 6. Actividad para completar la unidad similar a las de Cordel y Manson (2000) pero con fracciones impropias

En esta actividad se debe pensar en el $5/2$ como cinco piezas de tamaño la mitad de la unidad, por lo que la unidad (el rectángulo que se pide) son dos de las piezas resultantes al dividir el objeto en 5 partes iguales. El $7/3$ también se debe interpretar como 7 piezas de tamaño $1/3$, por lo que necesitan 3 piezas de ese tamaño para formar el rectángulo. De nuevo deberán *repartir* la pieza entre 7 trozos iguales.

En un siguiente momento podemos introducir actividades en las que no se pida explícitamente construir la unidad, por ejemplo: «Sabendo que la figura morada tiene un área $5/2$ de la unidad, representa una figura cuya área sea $7/4$ de la unidad».

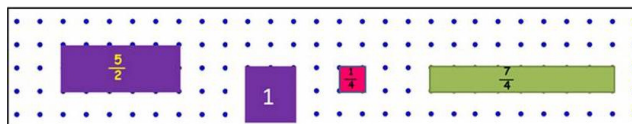


Figura 7. Problema y resolución de razonamiento *up and down* sobre trama cuadrada

Este es un tipo de actividad abierta, ya que, aunque hemos dado como solución la que aparece en la figura 7, la más sencilla para formar la unidad como rectángulo que es como se les pide en el ejercicio, se podría trabajar con otros *cuartos* que diesen como unidad otro tipo de figura (no necesariamente rectangular o no necesariamente con los vértices en la trama) cuya área fuese $7/4$ (este tipo de actividades es también interesante al trabajar la conservación de la unidad área con perímetros variables). Por ejemplo:

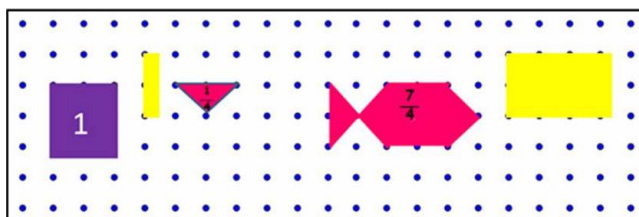


Figura 8. Otras soluciones para la figura de $7/4$

A pesar del interés de las anteriores situaciones, es importante aprovechar este modo de razonamiento para resolver situaciones contextualizadas ahondando en la representación gráfica de un contexto realista en el que los datos y los resultados pueden interpretarse adecuadamente trabajando con diferentes magnitudes (longitud, peso, valor económico, capacidad, tiempo) y en diferentes contextos (ver figura 9).

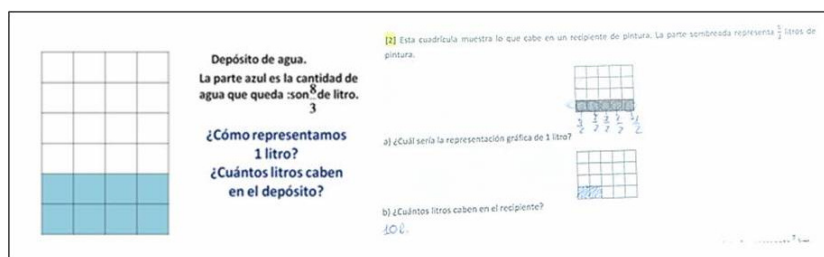


Figura 9. Dos ejercicios de razonamiento *up and down* (derecha, resuelto por un alumno)

También se pueden proponer problemas en los que se mezclen diferentes significados de la fracción cambiando las unidades de referencia de las fracciones (ver figura 10).

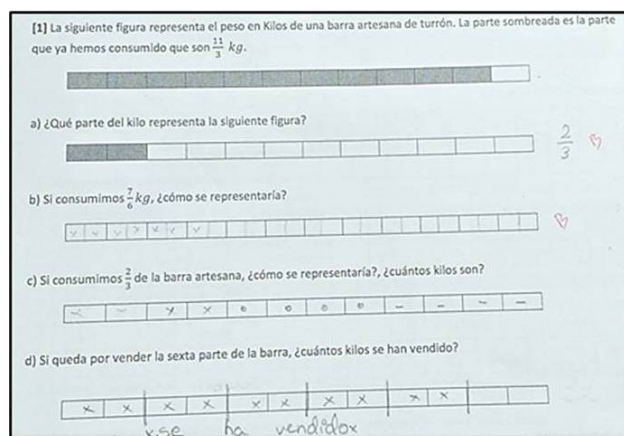
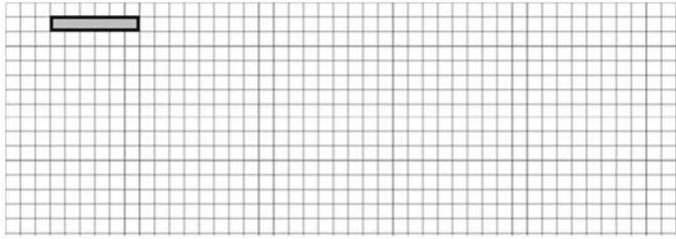


Figura 10. Resolución de un alumno de una actividad en la que aparecen fracciones referidas a diferentes unidades

Algunos resultados

En la prueba escrita que pasamos a los alumnos, les pusimos esta pregunta de razonamiento *up and down* usando la magnitud de longitud.

[9] La siguiente barra representa una longitud de $\frac{3}{4}$ km.



a) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer $\frac{9}{4}$ km. Píntala en rojo.

b) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer $\frac{5}{2}$ km. Píntala en azul.

c) Haz la representación gráfica de una carrera en la que hay que recorrer $\frac{11}{8}$ km. Píntala en negro.

Figura 11. Tarea de razonamiento *up and down* en la prueba escrita

En esta tarea, no se pedía explícitamente construir la unidad, además debían dividir ellos mismos la figura para obtener los 3 cuartos que componían la barra que se da como dato. Para los apartados b y c, los alumnos debían construir también una nueva subunidad de medida para representar la longitud de las carreras. Los resultados de las respuestas que dieron los 77 alumnos que realizaron el examen se presentan en la tabla 1. Solo se han categorizado como respuestas correctas aquellas que dibujan una barra con exactamente la longitud pedida.

	Respuestas correctas	Respuestas incorrectas
Apartado a)	68 %	32 %
Apartado b)	55 %	45 %
Apartado c)	53 %	47 %

Tabla 1. Resultados de la prueba escrita en la tarea de razonamiento *up and down*

Los errores, que se concentran en los apartados b y c principalmente, son muy diversos. En ocasiones los alumnos no construyen bien el tamaño de las subunidades, en otras no dividen en partes iguales para crearlas o al yuxtaponerlas usan piezas de diferente longitud. Algunas respuestas incorrectas pueden verse en la figura 12.

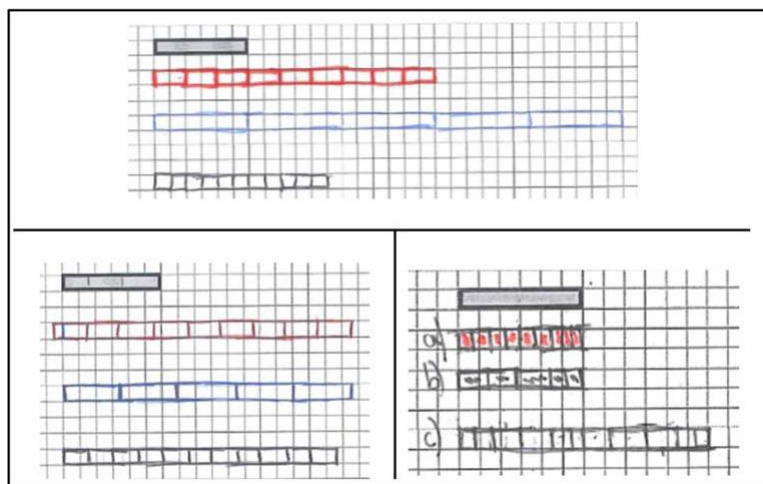


Figura 12. Algunos errores del ejercicio de la prueba escrita

En las respuestas correctas también hay variedad ya que algunos alumnos dejan constancia de todo el razonamiento, unos necesitan dejar constancia del tamaño de las piezas que están representando, y otros representan ya la fracción como una medida de longitud única.

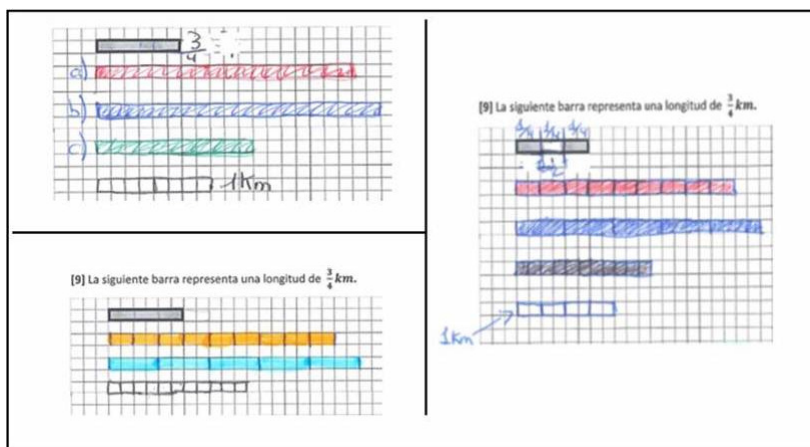


Figura 13. Algunas respuestas correctas en la prueba escrita

Conclusiones

Terminaremos diciendo que creemos que los resultados obtenidos trabajando este tipo de actividades han dado lugar a mejorar el razonamiento del alumnado, han potenciado la capacidad de comprender el significado de la fracción y su representación gráfica y han ayudado a evaluar lo razonable de una respuesta en un ejercicio relacionando la fracción como medida de una magnitud en contextos realistas. Comparando con otros años, esta forma de razonar ha facilitado la comprensión posterior de las operaciones con fracciones, dándole también sentido a su uso en la resolución de problemas contextualizados.

Referencias bibliográficas

- CORDEL, B. y R. MASON (2000), *Proportional reasoning (Algebraic thinking series)*, Fresno, CA: Aims Education Foundation.
- BUFORN, A. y C. FERNÁNDEZ (2014), «La coordinación de la idea de unidad en la representación de fracciones impropias» en *Actas del XV Congreso de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, Baeza: CEAM, 491-500.
- BUFORN, A., S. LLINARES y C. FERNÁNDEZ (2018), «Características del conocimiento de los estudiantes para maestro españoles en relación con la fracción, razón y proporción», *Revista mexicana de investigación educativa*, 23(76), 229-251.
- LAMON, S. J. (2007), «Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework» en F. K. Lester Jr. (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, Charlotte: NCTM-Information Age Publishing, 629-668.