CUADERNOS DE INVESTIGACIÓN Y FORMACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
2007, Año 2, Número 3, pp. 11-44.

USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

Ronny Gamboa Araya
ronny132000@yahoo.com
Escuela de Matemática
Universidad Nacional

Resumen

Las tendencias actuales en la enseñanza de la matemática han destacado la importancia del uso de la tecnología como un medio que permite al estudiante obtener conclusiones y realizar observación que en otros ambientes, por ejemplo "lápiz y papel", sería difíciles de obtener.
El propósito de este artículo es mostrar cómo el uso de la tecnología ayuda en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, siempre que este proceso sea bien dirigido por el profesor.

Abstract

The current tendencies in the teaching of Mathematics emphasize the importance of the use of Technology as means to allow students to draw conclusions and to carry out observations in other environments, different from the "pencil and paper" where it would be difficult to do so.
The purpose of this article is to show how the use of Technology helps students to learn Mathematics (specifically through problem solving), if this process is appropriately conducted by the teacher.

Palabras clave

Tecnología, resolución de problemas, enseñanza, matemática.

¿Cuáles herramientas tecnológicas resultan importantes en la resolución de problemas y el aprendizaje de los estudiantes? ¿Qué tipo de representaciones se favorecen con el uso de distintas herramientas tecnológicas? ¿Cómo contribuye, en la comprensión de un concepto, el uso de distintas herramientas tecnológicas? ¿Cómo interactúa el estudiante con la tecnología? ¿Qué tipo de conjeturas y observaciones realizan los estudiantes al resolver problemas con ayuda de alguna herramienta tecnológica? Estas son algunas preguntas que orientan la investigación relacionada con el uso de la tecnología en la educación matemática.

El uso de la tecnología ha generado cambios sustanciales en la forma como los estudiantes aprenden matemáticas. Cada uno de los ambientes computacionales que pueden emplear, proporcionan condiciones para que los estudiantes identifiquen, examinen y comuniquen distintas ideas matemáticas.

El uso de la tecnología puede llegar a ser una poderosa herramienta para que los estudiantes logren crear diferentes representaciones de ciertas tareas y sirve como un medio para que formulen sus propias preguntas o problemas, lo que constituye un importante aspecto en el aprendizaje de las matemáticas (Barrera & Santos, 2001).

Investigar y documentar el proceso de interacción del estudiante con las herramientas tecnológicas cuando resuelve problemas, observando aspectos relacionados con su uso, las representaciones que emplea, el tipo de conjeturas y conclusiones que obtiene, proporciona argumentos para identificar qué tipo de actividades son las que se tienen que plantear para alcanzar una mayor comprensión de los conceptos matemáticos, así como identificar las ventajas y desventajas que se presentan al trabajar con estas herramientas.

Tradicionalmente las evaluaciones, tareas y discusiones de la clase de matemáticas se realizan enfatizando en el manejo de reglas algebraicas, cuyo dominio "muestra la comprensión o no" de cierto contenido. Cuando se enfrenta a los estudiantes a situaciones que no dependen de una formulación simbólica (como gráficas, tablas, aproximaciones) o que no representa un "ejercicio típico", siempre tratan de reducir el problema a una expresión algebraica, fracasando o teniendo mucha dificultad en el proceso de solución. Esto debido a que los profesores introducen los temas bajo dicho enfoque, sin utilizar otras representaciones para un concepto o distintas técnicas de resolución, y esperan que los estudiantes los comprendan; mientras que estos gastan muchas horas dominando las reglas y aplicándolas para resolver ejercicios.

La introducción de la tecnología en el salón de clases ha cambiado la forma en que se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. A diferencia del enfoque algorítmico que se le ha dado a la enseñanza de esta disciplina, ésta se puede desarrollar ahora en un ambiente de descubrimiento y reflexión.

LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA TRADICIONAL

Tradicionalmente, en la enseñanza de las matemáticas se ha puesto mucho énfasis en el trabajo con ejercicios rutinarios a los cuales los estudiantes dan solución mecánica, debido al énfasis que los profesores han dado a los procedimientos, sin dar oportunidad para que el alumno reflexione sobre estos procesos.

Este abordaje rutinario en la enseñanza ha generado una separación entre los conceptos teóricos y su aplicabilidad, lo que ha provocado en los alumnos desinterés por las matemáticas. Lester (1983), citado en Santos (1997), afirma que una práctica común en la enseñanza de las matemáticas es que los maestros muestren a los estudiantes solamente los movimientos correctos al resolver un problema. Por ejemplo, siempre seleccionan el método, el procedimiento y las operaciones adecuadas, por lo que los estudiantes se crean la falsa idea de que resolver problemas es el acto de seleccionar una serie de "trucos" que son accesibles sólo a unos cuantos.

Aunque muchas veces los alumnos manipulen y respondan con acierto varios de los ejercicios propuestos por su profesor (los cuales no toman en cuentan los aspectos de comprensión sino el manejo algebraico) ello no garantiza que el concepto hubiese sido interiorizado por el estudiante.

Un problema importante y común que se presenta en el aprendizaje de las matemáticas es que los alumnos mecanizan o automatizan un algoritmo o proceso sin tener una comprensión cabal de las ideas y conceptos que están detrás. [...] No intentan resolver el problema por otros medios o no tratan de ver la solución más claramente. (Flores, 1997, p. 49)

Peralta (1994) señala que la creación de automatismos en los alumnos les induce, en muchos casos, a efectuar cálculos mecánicos sin preguntarse si tienen o no sentido. Y continúa señalando que el profesor frecuentemente, apremiado por lo extenso de los planes de estudio, no acostumbra ofrecer a sus alumnos otros métodos diferentes para resolver el problema. Es decir, no hay una reflexión sobre los posibles procesos de solución.

Debido a que un gran número de profesores de matemáticas enfatizan el trabajo sobre procesos algebraicos, le restan importancia a los procesos visuales o el uso de otras representaciones. Las evaluaciones de los alumnos se hacen mediante exámenes que miden la capacidad para llevar a cabo procesos algebraicos, y dejan poca libertad para su reflexión.

Por ejemplo, supóngase el caso de la solución de la ecuación $2x^4 + x^3 - 17x^2 - x + 15 = 0$. La única forma en que muchos profesores y estudiantes resuelven esta ecuación es algebraicamente, factorizando la expresión y aplicando las leyes algebraicas. ¿Cuánto tiempo transcurre en todo este proceso? ¿Qué es lo importante en este sentido, resolver la ecuación, mostrando buen manejo de procedimientos de factorización o comprender el significado de las soluciones?

Después de que el estudiante resuelve, correctamente, la ecuación y encuentre las soluciones es posible que no tenga idea de lo que éstas significan o que existen otras formas de resolver la ecuación.

Muchos estudiantes ignoran que resolver la ecuación $2x^4 + x^3 - 17x^2 - x + 15 = 0$, en realidad es encontrar el (los) punto(s) donde la gráfica de la función $f(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - x + 15$, corta al *eje x*.

Primer acercamiento			Segundo acercamiento	
x	f(x)		x	f(x)
-5	720		2	-15
-4	195		2,1	-13,9
-3	0		2,2	-12,0
-2	-27		2,3	-9,1
-1	0		2,4	-5,1
0	15		2,5	0
1	0		2,6	6,5
2	-15		2,7	14,3
3	48		2,8	23,8
4	315		2,9	35,0
5	960		3	48

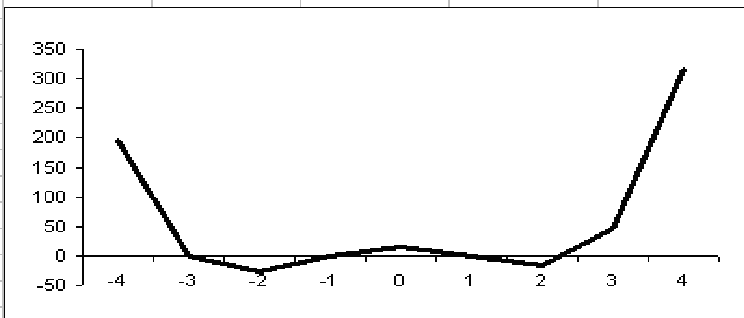

Figura 1: Proceso discreto para hallar las raíces de *f(x)* en *Excel.*

Por medio de un proceso discreto, utilizando *Excel* (*Figura 1*), el estudiante podría identificar las raíces directamente o los intervalos donde se encuentran éstas, observando los signos de las imágenes. Ello conlleva, en primera instancia, un proceso de “ensayo y error” para determinar sobre cuáles intervalos se debe trabajar y luego realizar aproximaciones más “refinadas”.

En una primera aproximación, el estudiante podría observar tres raíces de la ecuación, que corresponden a *3*, *-1* y *1*. También, podría identificar que entre *2* y *3* hay otra raíz, por lo que realizando una nueva aproximación sobre este intervalo, se podría obtener la otra solución de la ecuación, que es *2,5*.

Sin hacer un estudio detallado de la expresión algebraica, el estudiante, con base en algunos datos, podría tener una aproximación a la gráfica de la función.

Una representación gráfica de la función, con ayuda de la calculadora TI 92. (*Figura 2*) o de algún *software* dinámico, permite explorar preguntas como: ¿Qué significan los puntos de intersección de la gráfica con el *eje x*? ¿Qué relación tienen estos con resolver la ecuación $2x^4 + x^3 - 17x^2 - x + 15 = 0$? ¿Por qué? ¿Cuáles son los intervalos de monotonía de la función? ¿Dónde la función es positiva o negativa? ¿Dónde se pueden identificar el valor máximo y mínimo de la función, si lo hay?

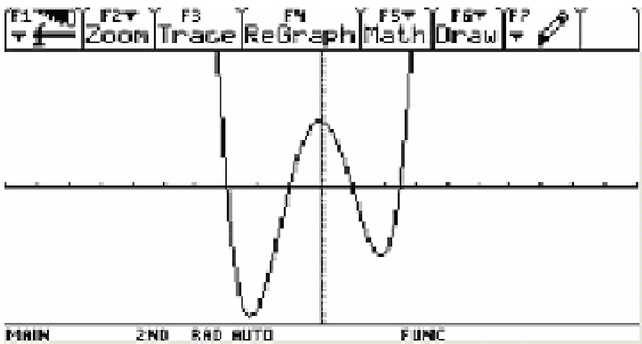

Figura 2: Gráfica de *f(x)* en la calculadora TI 92.

Este proceso permitiría no sólo resolver la ecuación, sino tratar otros conceptos relacionados que necesitarían una inversión considerable de tiempo para su desarrollo.

Con el *software* dinámico, también, se podría generar una tabla de valores que refuercen lo que se observa en la representación gráfica (*Figura 3*). Así, los estudiantes no se quedarían sólo con el procedimiento algebraico como la única forma de resolver el problema, sino que explorarían otras formas de representación del mismo concepto, como las gráficas y tablas.

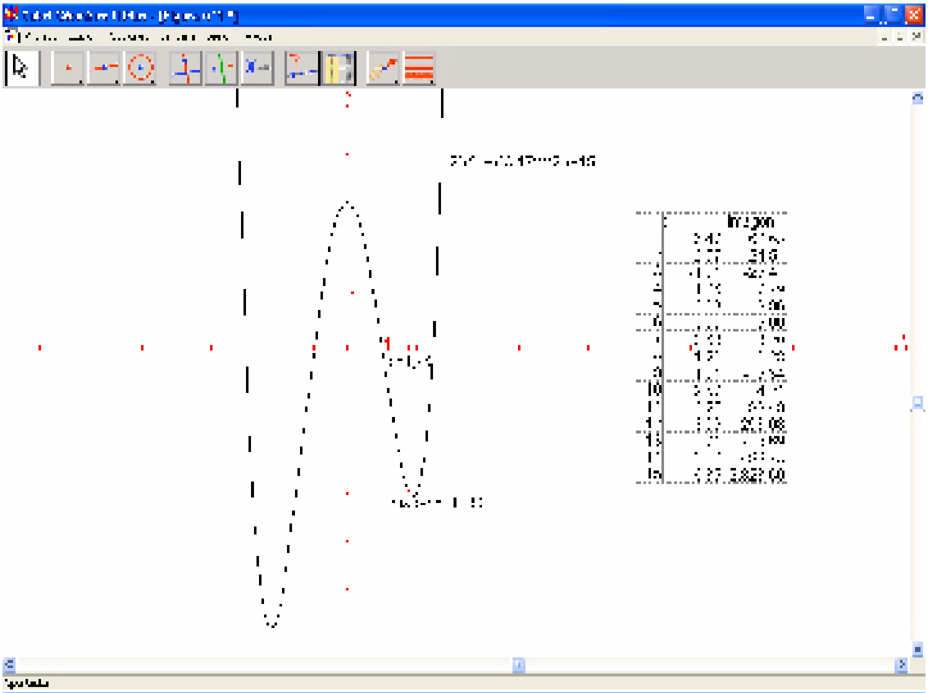

Figura 3: Gráfica de *f(x)* en el *software Cabri Géomètre*.

La calculadora también se convertiría en una importante herramienta para facilitar los cálculos algebraicos y permitiría corroborar argumentos que se hubiesen formulado al trabajar con otras formas de representación (*Figura 4*).

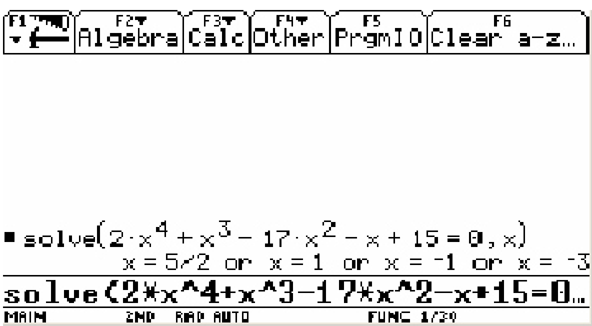

Figura 4: Solución de la ecuación con el uso de la calculadora TI 92.

USO DE LA TECNOLOGÍA EN LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS

El impacto que ha tenido la computadora en la sociedad ha llevado a una reflexión en torno a su uso en el salón de clase.

El surgimiento de diferentes s*oftware* para la enseñanza de las matemáticas y su incorporación en el salón de clases, exige que sea el propio profesor de matemáticas quien introduzca conceptos de las matemáticas apoyándose en el uso de la computadora. "La existencia de la computadora plantea a los educadores matemáticos el reto de diseñar actividades que tomen ventaja de aquellas características con potencial para apoyar nuevos caminos de aprendizaje" (Arcavi & Hadas, 2000, p. 41).

Martin (2000) señala que la tecnología debe ser utilizada en la educación matemática, y que ésta puede ser usada para enfatizar el uso del conocimiento matemático, yendo más allá de los procedimientos rutinarios que han estado tan prevalecientes en los cursos de matemáticas. Los cambios recientes en el currículo de matemáticas reconocen la importancia del uso de las calculadoras y computadoras en el aprendizaje de los estudiantes.

Aunque se le ha dado un gran impulso a las nuevas tecnologías, aún muchos profesores rechazan el uso de calculadoras y computadoras porque creen que su uso inhibirá otras habilidades. Hitt (1998) señala que el profesor de matemáticas sentirá la necesidad del cambio cuando se le presenten materiales y estudios que muestren la efectividad de la tecnología en el aula, en donde se presente un concepto inmerso en una situación problema y donde se busque el adecuado sistema de representación para visualizarlo.

La clave está en trabajar las situaciones cotidianas y los problemas presentes en los libros de texto desde un nuevo enfoque, apoyadas en las herramientas tecnológicas disponibles.

Alfaro, Alpízar, Arroyo, Gamboa e Hidalgo (2004) señalan que algunos *software* como *The Geometer's Sketchpad* y *Cabri Géomètre* pueden ayudar a la enseñanza de la geometría en aspectos, tales como: construcciones, visualización de algunos conceptos y propiedades. Otros, como *Mathematica*, *Maple* y *Derive* pueden proporcionar ayuda a los alumnos en el cálculo de expresiones aritméticas, algebraicas, logarítmicas, trigonométricas, así como el cálculo de las soluciones reales de ecuaciones y de sistemas de ecuaciones. También el *Mathcad*, Funciones y Gráficas son programas informáticos creados para el estudio e interpretación, gráfica y numérica, de funciones reales. Además, otros, como el *Excel,* pueden ser de gran ayuda en la enseñanza de estadística y en el tema de funciones.

Las posibilidades que ofrecen estas herramientas tecnológicas, en la enseñaza de las matemáticas, van desde el cálculo de expresiones aritméticas, soluciones reales de ecuaciones o sistemas de ecuaciones, gráficas estadísticas, gráficas de las funciones reales, hasta otras más avanzadas que incluyen *software* de geometría y de cálculo simbólico, que permiten trabajar con expresiones algebraicas.

Uno de los objetivos fundamentales del docente en el salón de clase debe ser que el alumno analice, critique y extraiga conclusiones a partir de la información que se le pueda suministrar; así mismo, el uso de herramientas tecnológicas se transforma en un medio ideal para que el educando optimice sus esquemas a través de sistemas de representación de los contenidos (Alfaro *et al*., 2004).

En este contexto, es importante que el estudiante encuentre la solución de un problema y también que, siempre que sea posible, busque varias formas de solución e investigue otras conexiones o extensiones del problema (Camacho & Santos, 2004).

La función del educador es ofrecer, a través del diseño de una situación, un encuentro entre el sujeto y el medio para que surja el conocimiento. En este sentido, el empleo de herramientas tecnológicas debe ir orientado a apoyar y contribuir para que el sujeto construya, adecuadamente, diferentes representaciones con el fin de modificar los antiguos sistemas de percepción y, con ello, el surgimiento de su conocimiento.

Es evidente que la evolución del aprendizaje del estudiante depende en gran medida de la confrontación con el medio al que sea sometido (Alfaro *et al*., 2004). Por esto, la presencia de la tecnología en el salón de clase se convierte en una herramienta capaz de aportar a las lecciones de matemáticas distintas representaciones que puedan ser utilizadas para la ayuda, visualización y experimentación de conceptos importantes que le posibiliten a los educandos algunas estrategias de solución para algunos problemas. Para ello, es menester conocer y saber cómo aplicar algunas herramientas tecnológicas.

¿Qué actividades deben plantearse en el salón de clase para que los estudiantes reconozcan las ventajas que proporcionan el uso de herramientas tecnológicas?

Camacho & Santos (2004) proponen tomar ejercicios típicos de libros y relacionarlos con distintos fenómenos de variación y cambio. Trabajar estos problemas, haciendo uso de alguna herramienta tecnológica, puede propiciar procesos de resolución que resalten el uso de distintas representaciones y sugieran análisis que complementen el desarrollo algebraico.

Hacer uso de recursos tales como tablas y gráficas le permite al estudiante observar el comportamiento del fenómeno en particular y lograr la comprensión de éste.

Las actividades de "lápiz y papel" se han enriquecido con los ambientes computacionales. A través de la modelación de fenómenos, por ejemplo, en el estudio de procesos de variación (Camacho & Santos, 2004) o en el llenado de botellas con un líquido (Hitt, 1996), se presentan conceptos en forma ágil y atractiva a los alumnos. Permite la posibilidad de ir construyendo un puente entre ideas intuitivas, y en algunos casos abstractas, y los conceptos formales. Además, con el uso de la computadora es posible profundizar en el estudio de un concepto, cuya comprensión fue superficial o al cual el docente no pudo dedicarle mucho tiempo.

El NCTM (2000) señala que la tecnología puede ayudar a los estudiantes a aprender matemáticas; no debería utilizarse como sustituto de operaciones básicas, sino que convendría usarse para fortalecerlas.

La potencia gráfica de los instrumentos tecnológicos permite el acceso a modelos visuales que son poderosos, pero que muchos estudiantes son incapaces de generar independientemente o no están dispuestos a hacerlo. La capacidad de cálculo de los recursos tecnológicos amplía la serie de problemas apropiados para los alumnos, y los capacita para ejecutar procedimientos rutinarios con rapidez y seguridad, permitiéndoles así disponer de más tiempo para desarrollar conceptos y para modelar (NCTM, 2000, p. 25).

Sin embargo, "la tecnología no sustituye la labor del docente" (NCTM, 2000, p. 26), ya que a él le corresponde tomar la decisión sobre cuándo y cómo aplicar la tecnología; examinar los procesos seguidos de los alumnos; prestarles ayuda cuando el camino de solución no es el correcto o cuando la observación que realizan no es del todo adecuada. Él es un guía del proceso y quien propone las actividades de resolución de problemas.

Además, las computadoras "liberan" a los estudiantes de la actividad aritmética, lo que les permite centrarse en los aspectos algebraicos y la estructura del problema (Balacheff & Kaput, 1996).

De acuerdo con Williamson & Kaput (1999), una consecuencia importante de la introducción de la tecnología para la educación matemática es que hace posible pensar la educación matemática en una forma más inductiva. Ello sugiere que los estudiantes puedan percibir las matemáticas en una forma experimental (al interactuar con la tecnología) que conduce a la necesidad y el deseo de ser más formal en las justificaciones. Ellos pueden encontrar ideas matemáticas, manipulando el fenómeno y así descubrir posibles relaciones matemáticas fundamentales.

Cuando se trabaja con varias herramientas tecnológicas es necesario aprender algunas características básicas de dichas herramientas, para que los estudiantes conozcan que es posible hacer con cada una de ellas, y tener cierta habilidad en el manejo de éstas (Fuglestad, 2004). Ello le permite a los alumnos juzgar cuáles de ellas usar para resolver un problema.

Fuglestad (2004) ha diseñado tres etapas de desarrollo para describir el proceso donde los estudiantes interactúan con las herramientas tecnológicas:

- conocimiento básico de los comandos o funcionalidades del *software.* Los estudiantes pueden utilizar las diferentes funciones del *software* para resolver tareas simples preparadas para interactuar con éste. Por ejemplo, utilizar la hoja de cálculo para hacer fórmulas cuando se presenta el "esbozo principal" de una tarea o realizar una gráfica para representar una función, cuando la fórmula está dada;
- desarrollo de modelos simples. Los alumnos pueden hacer un esquema textual, numérico o plantear fórmulas para planear un modelo en una hoja de cálculo. En un *software* graficador ellos podrían juzgar qué funciones graficar, usar diferentes escalas en los ejes o ajustar la pantalla. Pueden usar geometría dinámica para hacer construcciones que puedan resistir el arrastre y que no se "rompan" cuando son movidas;
- juzgar el uso de las herramientas para dar solución a un problema dado. Los estudiantes deben ser capaces de pensar en distintas formas y recursos para resolver un problema, y juzgar cuáles de las herramientas tecnológicas disponibles en más apropiada usar para resolver el problema o cuándo otros métodos son mejores.

El desarrollo de habilidades matemáticas está presente en todas estas etapas. Al preparar una fórmula en la hoja de cálculo los estudiantes ganan experiencia en expresar relaciones matemáticas y, además, experimentan la necesidad de usar variables o parámetros. Para desarrollar modelos o construcciones geométricas "resistentes", ellos tienen que analizar la situación y construir el modelo acorde con reglas matemáticas. El uso de herramientas computacionales da acceso a los estudiantes a varias formas de expresar sus ideas matemáticas y experimentar con ellas (Fuglestad, 2004).

Fuglestad (2004) sugiere que para desarrollar habilidad respecto a la escogencia de la herramienta tecnológica más apropiada para resolver un problema, algunos puntos deberían ser enfatizados:

Motivación

Las tareas que se propongan deben despertar el interés del estudiante. Aquellas que presenten cierto grado de desafío atraen más respecto a las que son rutinarias o de fácil solución. Por lo general, los alumnos se sienten animados al trabajar con la computadora, pero esto solamente es duradero si las actividades así lo permiten.

Característica básicas y paso por paso

Es necesario conocer las características básicas del *software* para utilizar todos sus comandos o funciones. Resulta más beneficioso construir el conocimiento paso por paso, que saltar a soluciones sofisticadas sin que los estudiantes hubiesen comprendido el concepto en estudio.

Mismo problema, diferentes herramientas y métodos

Diferentes herramientas tecnológicas pueden ser usadas para resolver un problema y diferentes métodos, usando la misma herramienta, dan la oportunidad de juzgar y discutir cuál sería la mejor solución. Esto representa una forma para que los estudiantes aprendan la conveniencia del uso de diferentes herramientas y reconsideren la posibilidad de usar sólo "papel y lápiz".

Tareas y temas abiertos

Se debe trabajar con tareas que permitan ser interpretadas y resueltas de diferentes formas con distintas herramientas, lo que le brinda al estudiante la ocasión de escoger.

Reflexión y discusión

La reflexión y discusión son necesarias para consolidar y estar seguros de la comprensión del estudiante. Los alumnos deberían escribir sus propias hipótesis antes de trabajar con las herramientas. Una vez que han explorado y encontrado patrones y conexiones, deberían escribir un reporte final y compararlo con las hipótesis planteadas.

Intervención del profesor

El profesor debe ayudar a sus estudiantes para desarrollar habilidades sobre el empleo del *software* y diseñar tareas que requieran el uso de herramientas tecnológicas. Una introducción y motivación con ejemplos animan al inicio de una clase, mientras que un resumen y una reflexión al final, son necesarios.

USO DE DISTINTAS REPRESENTACIONES EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

De acuerdo con Lupiánez & Moreno (2001) representaciones, en el ámbito de las matemáticas, se entienden por notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina, así como sus características y propiedades más importantes. Duval (1998) clasifica estas representaciones en registros de representación. Por ejemplo, el concepto de función se puede representar mediante diferentes registros como el gráfico, algebraico y tabular.

Duval (1998) señala que una figura geométrica, un enunciado en lengua natural, una fórmula algebraica, una gráfica, son representaciones semióticas que pertenecen a registros de representación diferentes.

En el interior de cada uno de los registros se pueden llevar a cabo procedimientos, que pueden entenderse como transformaciones de las representaciones en el mismo registro que fueron creadas (Duval, 1998). Además, entre los diferentes registros se pueden realizar conversiones, que son transformaciones de una representación hecha dentro de un registro, en otra representación dentro de otro registro (Lupiánez & Moreno, 2001; Duval, 1998). Por ejemplo, en el caso del concepto de función, en el registro algebraico, pueden llevarse a cabo procedimientos para reducir la expresión algebraica a una forma más “simple”; una operación de conversión sería "traducir " dicha expresión algebraica en una gráfica.

En el proceso de aprender matemáticas se reconoce la importancia de que el estudiante se plantee interrogantes, formule conjeturas, utilice distintas representaciones, desarrolle varias estrategias y un lenguaje que le permita expresar y comunicar sus resultados (Camacho & Santos, 2004).

El uso de varios sistemas de representación y de la tecnología permiten dar significado concreto a los conocimientos matemáticos. De esta forma, la construcción de un concepto se dará a través de la coordinación, libre de contradicciones y utilizando diferentes representaciones relacionadas con el mismo concepto.

La coordinación de varios registros de representación semiótica aparece así como fundamental para una aprehensión conceptual de los objetos: es necesario que el objeto no sea confundido con sus representaciones y que se le reconozca en cada una de sus posibles representaciones. (Duval, 1998, p. 176)

Williamson & Kaput (1999) señalan que las computadoras amplían el rango disponible de diferentes acercamientos para generar, recolectar, procesar e interpretar la información. Uno podría resolver un problema que involucre una relación lineal, usando álgebra, una hoja y un lápiz; o encontrar la solución, usando una calculadora graficadora, realizando estimaciones en una hoja de cálculo, construyendo una representación geométrica en un ambiente de geometría dinámica, usando la noción de modelación o mediante el uso de un *software* de manipulación simbólica.

Las características de las representaciones construidas por los estudiantes, cuando resuelven problemas e investigan ideas matemáticas, juegan un papel importante, lo que les ayuda a entender y resolver los problemas. Las representaciones pueden ayudar a los estudiantes a organizar su pensamiento, hacer sus ideas más concretas y disponibles para la reflexión (NCTM, 2000).

Los profesores pueden obtener valiosa información sobre la forma en que los estudiantes interpretan y piensan sobre las matemáticas, mirando sus representaciones. Pueden construir un puente entre las representaciones personales de los estudiantes y unas más convencionales (NCTM, 2000).

Un punto importante es que para resolver un problema, no hay que estar "casados" con una técnica de solución, sino que se debe ser flexible y estar abiertos a otros métodos. Utilizando varios métodos, evitaremos el uso a "ciegas" de uno de ellos (Flores, 1997).

El diseño de tareas que ayuden al estudiante a explorar relaciones matemáticas usando diversas representaciones ha sido uno de los objetivos de la instrucción matemática.

Las representaciones deberían ser tratadas como un elemento esencial para apoyar la comprensión del estudiante sobre los conceptos y relaciones matemáticas, comunicar acercamientos matemáticos, argumentos y conocimientos de sí mimo y de otros; reconociendo las conexiones entre los conceptos matemáticos y aplicar las matemáticas a situaciones problema reales a través de la modelación (NCTM, 2000, p. 67).

Así, las tareas que involucran el uso de varias formas de representación para visualizar la información y relaciones matemáticas, pueden proporcionar un desafío para los estudiantes.

Las calculadoras graficadoras (como la TI 89 y TI 92) y los *softwares* dinámicos, proporcionan una amplia gama de representaciones de objetos y relaciones matemáticas en diferentes registros; lo más importante es que permiten que los estudiantes puedan pasar de unos registros o otros (Lupiánez & Moreno, 2001).

El avance tecnológico que ha prevalecido en los últimos años, nos ha proporcionado herramientas que han cambiado notablemente la forma en que se aprenden las matemáticas. El uso de esta tecnología en forma reflexiva puede ser de gran ayuda para resolver problemas.

El uso de la tecnología nos puede proporcionar ayuda para ser más eficientes y lograr mayor precisión al resolver un problema. Sin embargo, se debe tener en cuenta que se pueden cometer errores en el uso y aplicación de estas herramientas, por lo que es importante crear mecanismos para "comprobar" los resultados, ya sea con el uso de la tecnología o por otros métodos.

Un ejemplo de un problema puede aparecer en algún libro de texto es el siguiente:

Se necesita ubicar un punto *P* sobre una recta *AD*, de modo la longitud total *L* de los cables que enlazan a *P* con los puntos *A*, *B* y *C* (*Figura 5*) sea mínima. ¿A qué altura debe ubicarse el punto P?

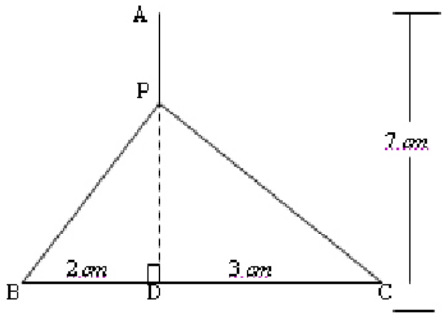

Figura 5: Descripción de la situación planteada en el problema.

Elementos importantes para la comprensión del problema

¿Cuál es la situación planteada? ¿Cuáles son los datos? ¿Qué es lo que se tiene que averiguar? ¿Qué condiciones se tienen que cumplir? ¿Cómo se podría resolver? ¿Qué conocimientos se podrían aplicar y por qué? ¿Es necesario introducir una notación adecuada? ¿Cuál?

Un elemento importante en la solución del problema es que los estudiantes realicen una representación adecuada de la situación planteada, con el propósito de observar relaciones entre los diferentes elementos.

En la *Figura 6* se puede identificar las longitudes de los segmentos *AP, BP* y *CP,* que pueden ser solución para la situación planteada. La representación del problema permite identificar los elementos de éste sobre los cuales se debe centrar la atención. El problema, en este caso, se centra en encontrar para qué ubicación del punto *P* (distancia *PD*), la suma de las longitudes de los segmentos *AP, BP* y *CP* es mínima.

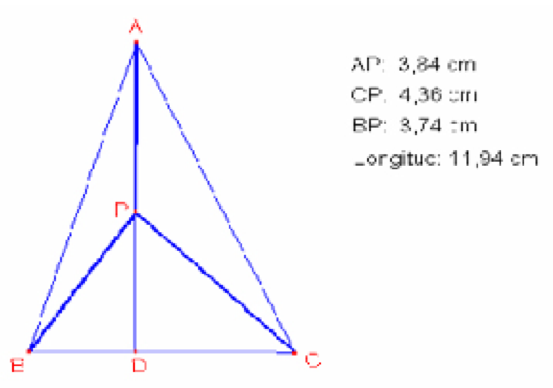

Figura 6: Representación del problema en un contexto geométrico.

Proceso discreto a la solución

A través de un modelo discreto en donde se perciba la “variación” de la longitud L cuando P se desplaza a través de la altura AD, el alumno puede comprobar la existencia de ese punto en el cual la distancia es mínima (*Figura 7*).

Una de las ventajas del uso de la hoja de cálculo, por ejemplo, es que permite identificar el fenómeno descrito, observar la existencia de una solución “óptima”, realizar una primera aproximación a ésta e ir mejorando su exactitud tanto como se desee. Al usar la hoja de cálculo para resolver problemas, el estudiante está involucrado en el proceso de construir el modelo algebraico; es decir, tiene que introducir las expresiones algebraicas necesarias para resolver el problema planteado.

PD	AP	PB	PC	AP+PB+PC
7	0	7,28	7,62	14,8959
6,5	0,5	6,80	7,16	14,4596
6	1	6,32	6,71	14,0328
5,5	1,5	5,85	6,26	13,6173
5	2	5,39	5,83	13,2161
4,5	2,5	4,92	5,41	12,8328
4	3	4,47	5,00	12,4721
3,5	3,5	4,03	4,61	12,1409
3	4	3,61	4,24	11,8482
2,5	4,5	3,20	3,91	11,6067
2	5	2,83	3,61	11,4340
1,5	**5,5**	**2,50**	**3,35**	**11,3541**
1	6	2,24	3,16	11,3983
0,5	6,5	2,06	3,04	11,6029
0	7	2,00	3,00	12,0000

Figura 7: Primer proceso discreto para hallar la solución del problema planteado.

Esta primera aproximación permite observar una posible solución, para variaciones de la longitud de *PD* de 0.5 *cm*. En este caso, la longitud *PD* se varió 0.5 unidades; *AP* se obtuvo al realizar 7-*PD; PB* y *PC* se obtuvieron al introducir en *Excel* las expresiones correspondientes a la aplicación del teorema de Pitágoras para hallar ambas medidas; la longitud *L* se obtuvo al sumar *AP*, *PB* y *PC*.

Una vez identificado el intervalo en el cual se encuentra la solución, digamos , se pueden realizar nuevas aproximaciones para variaciones cada vez menores (*Figura 8*).

PD	AP	PB	PC	AP+PB+PC
1,5	5,5	2,50	3,35	11,35410
1,48	5,52	2,49	3,35	11,35326
1,47	5,53	2,48	3,34	11,35291
1,46	5,54	2,48	3,34	11,35261
1,45	5,55	2,47	3,33	11,35237
1,44	5,56	2,46	3,33	11,35217
1,43	5,57	2,46	3,32	11,35202
1,42	5,58	2,45	3,32	11,35193
1,41	**5,59**	**2,45**	**3,31**	**11,35189**
1,4	5,6	2,44	3,31	11,35190
1,39	5,61	2,44	3,31	11,35196
1,38	5,62	2,43	3,30	11,35208
1,37	5,63	2,42	3,30	11,35225
1,36	5,64	2,42	3,29	11,35247
1,35	5,65	2,41	3,29	11,35274

Figura 8: Segundo proceso discreto para hallar la solución del problema planteado.

A partir de esta información, se podría decir que la distancia de la longitud *L* será mínima cuando *PD* mide, aproximadamente, 1.41 *cm*. Esta aproximación de la solución se podría continuar mejorando tanto como se requiera.

Representación visual

Una vez generados los datos de la tabla, es posible realizar una representación gráfica de estos (*Figura 9*). Los estudiantes podrían observar que para una distancia *PD* aproximada a 1.4 *cm* la longitud *L* es mínima.

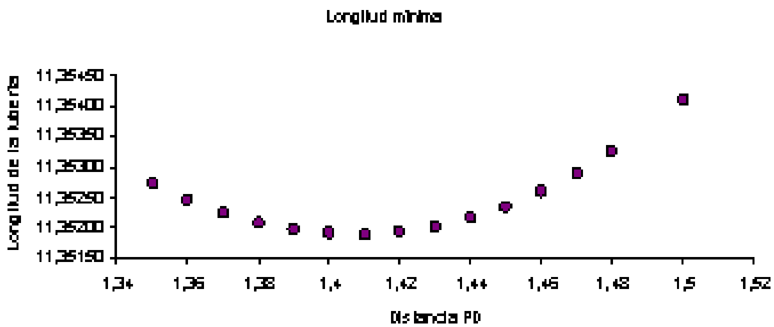

Figura 9: Representación visual de los datos generados en la tabla.

Proceso dinámico

Santos (2001) argumenta que en la representación de una situación o problema matemático por medio de la computadora, los estudiantes tienen que acceder y utilizar una serie de recursos y propiedades matemáticas que les permiten seleccionar comandos y distintas maneras de lograr la representación. Por ejemplo, para este caso el estudiante debe conocer y aplicar la propiedad de perpendicularidad de la altura en un triángulo para poder construir la representación del problema.

Con el empleo de algún *software* dinámico como, por ejemplo, *Cabri Geómètre*, se puede realizar una representación del problema y visualizar directamente la variación de la longitud L cuando P se mueve sobre el segmento AD.

Con el comando *número* del *software* dinámico, se introducen las longitudes establecidas por el problema (BD, AD y BC).

Se toma el punto B, y se traza una semirrecta con origen en dicho punto. Sobre esta semirrecta se construye el segmento BC que posee una medida de

5 *cm*. De igual forma, a partir de *B,* se construye el segmento *BD.*

Se traza una recta perpendicular al segmento *BC* que pase por el punto *D.* Sobre dicha recta se construye el segmento *AD* con longitud 7 *cm*. Sobre éste se toma el punto *P*, que se desplaza sobre todo el segmento.

Se construye el triángulo *ABC*; se trazan y se miden los segmentos *AP, BP, CP* y *DP*, y se calcula la suma de las longitudes de los tres primeros, que se señala como Longitud.

Con estos datos se construye una tabla. Auxiliados con el plano cartesiano, se construye sobre el *eje x* el segmento *OS*, cuya longitud es igual a la del segmento *DP.* De igual forma, sobre el *eje y* se construye el segmento *OT*, cuya medida corresponde a la magnitud de la suma indicada.

Se trazan rectas perpendiculares al *eje x* y al *eje y*, que pasen por los puntos *S* y *T* respectivamente. Dichas rectas se intersecan en un punto *R.* Luego se construye el lugar geométrico que describe el punto *R* cuando *P* se desplaza sobre el segmento *AP.*

La representación realizada se puede observar en la *Figura 10.*

En dicha figura se puede observar diferentes valores obtenidos al realizar la animación del punto *P* bajo un contexto dinámico. Con ayuda del *software* se puede determinar, directamente, las medidas de los segmentos deseados y estudiar su comportamiento.

Las coordenadas *x* y *y* de *R* corresponden a la medida del segmento *DP* y la magnitud de *L,* respectivamente. En la representación de este lugar, se puede observar que cuando *DP* toma un valor aproximado a 1.39 *cm* se obtiene la solución al problema. Mientras tanto, con base en los datos de la tabla, se puede asegurar que la solución será 1.43 *cm*.

El alumno debe ser capaz de valorar cuándo estas diferencias son realmente significativas y cuándo no. Además, debe estar consciente que el uso de este tipo de herramienta proporciona solamente aproximaciones a la solución.

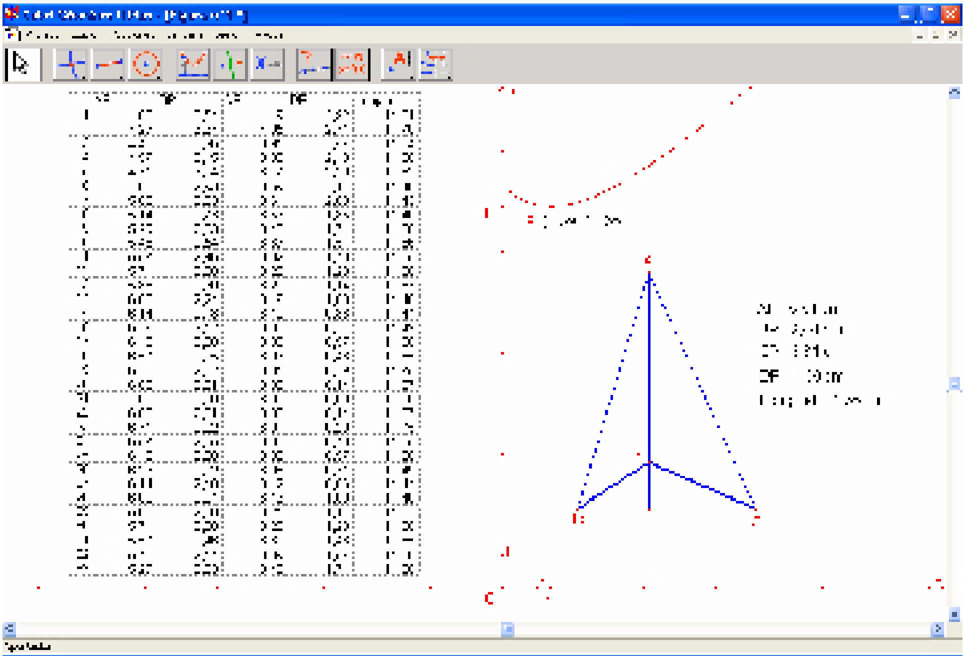

Figura 10: Representación dinámica del problema utilizando *Cabri Geómètre.*

Búsqueda de relaciones matemáticas

Dado que *AD* es altura del , en la *Figura 3.2* es posible observar que el y el son triángulos rectángulos, por lo que los segmentos *BP* y *CP*, representan las hipotenusas de dichos triángulos.

La medida de la altura *AD* está dada en el problema, por lo que es fácil representar la medida del segmento *AP,* asignando a *DP* un valor de *x*, que representa la medida buscada. Luego, la longitud *L,* valor a minimizar, está dada por *AP+BP+CP.*

Proceso algebraico

¿Cómo representar el problema algebraicamente? ¿Qué notación es necesaria utilizar? ¿Cómo se pueden relacionar los diferentes elementos que intervienen en el problema? ¿Cómo representar las longitudes de los segmentos *AP, BP* y *CP*? ¿Cómo expresar la longitud *L*?

A partir de las relaciones matemáticas que el estudiante identifica, es necesario establecer una notación adecuada que exprese la longitud *L* en una sola variable.

En el triángulo *BDP* se tiene qu $BP = \sqrt{x^2 + 4}$

En el triángulo *BDP* se tiene qu $CP = \sqrt{x^2 + 9}$

Ahora, $AP = 7\ x$

donde *x* representa la medida del segmento *DP*.

De esta forma, la longitud *L*, que se denotará como *l(x),* está dada por:

$$l(x) = \sqrt{x^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 9} + 7 \square x$$

Después de haber obtenido la expresión que indica la longitud *L,* con ayuda de la calculadora se puede realizar una interpretación gráfica de ésta y observar su punto mínimo (*Figura 11*).

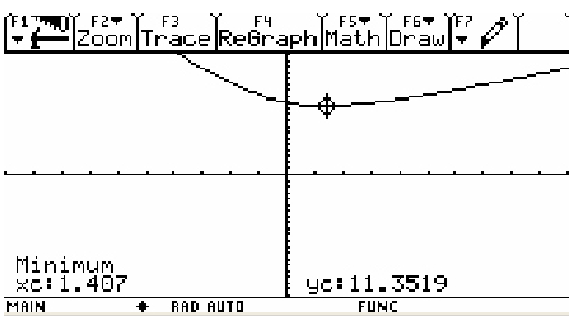

Figura 11: Interpretación gráfica del valor mínimo de *L* sobre la gráfica de la función.

En un contexto de secundaria, resolver este problema se limita sólo a lo realizado anteriormente. El énfasis se debe basar entonces en la observación y elaboración de conjeturas, y no en el procedimiento a emplear.

Sin embargo, otra forma para calcular el valor mínimo de la función

$$l(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}+7\,\square\, x$$

es a través de la aplicación del cálculo diferencial. Es decir, se calcula la derivada de la función y se encuentran los puntos críticos y, posteriormente, con el uso de la segunda derivada, se determina si éstos corresponde a un máximo o a un mínimo. Las *Figuras 12* y *13* ilustran estos procedimientos realizados con la calculadora.

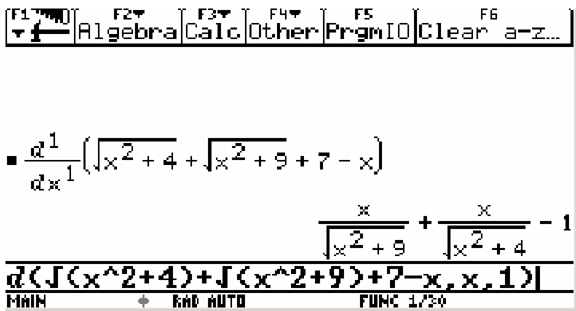

Figura 12: Cálculo de la derivada de la función *l(x)*.

Al encontrar los puntos críticos de dicha expresión se obtiene

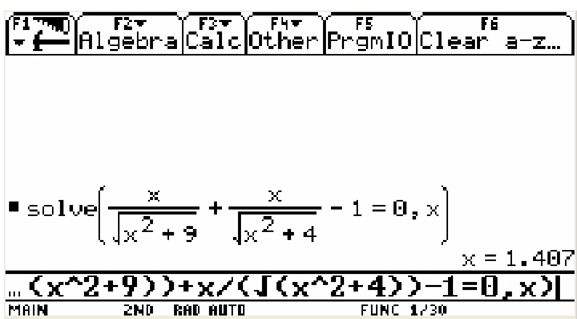

Figura 13: Cálculo de los puntos críticos de la función *l(x)*.

Ahora se puede comprobar, con la ayuda de la calculadora, si este punto es un máximo o mínimo de la función. El procedimiento se muestra en la *Figura 14*.

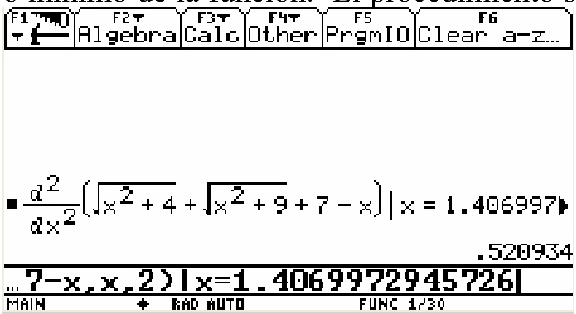

Figura 14: Verificación si el punto obtenido es un máximo o mínimo de la función *l(x)*.

Por lo que la solución al problema está dada cuando el segmento *DP* mide 1.41 *cm* aproximadamente.

Extensiones y conexiones del problema

Este tipo de problemas, donde se hace uso de la tecnología, permite al estudiante explorar otras posibles situaciones que se puedan presentar. Por ejemplo:

- ¿Qué sucede si el punto *D* está ubicado en el punto medio de *BC*?
- Si *P* es un punto medio de *AD*, ¿dónde debo ubicar el punto *D* para que la longitud *L* sea mínima?
- ¿Qué ocurre si la longitud de *AD* cambia (aumenta o disminuye)?

De esta forma, un problema que en principio parece rutinario se convierte en una actividad en el que el estudiante es capaz de utilizar diferente medios para resolverlo, discutir sus ideas, plantear preguntas, verificar conjeturas y reforzar sus conocimientos.

Utilizando este hecho, se pueden plantear otros problemas como el presentado por Santos (2001): *En un triángulo equilátero dado se selecciona un punto P al azar en el interior del triángulo. Si del punto P se trazan segmentos perpendiculares a cada uno de los lados del triángulo, ¿cómo es la suma de las longitudes de esos tres segmentos?*

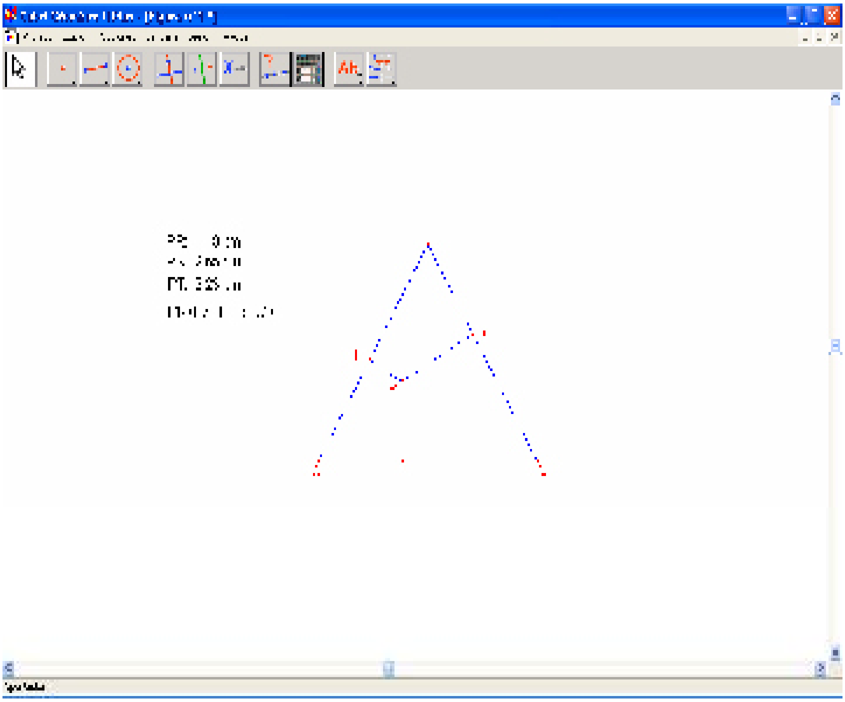

Figura 15: Representación dinámica del problema utilizando *Cabri Geómètre.*

El *software* dinámico permite realizar una exploración de la situación planteada. ¿Qué se observa al mover el punto *P* en el interior del triángulo equilátero *ABC*? ¿Cómo varía la suma de las longitudes de los segmentos descritos?

La *Figura 16* muestra dos ejemplos que ubican al punto *P* en distintos lugares, pero donde la suma de los segmentos *PR, PS* y *PT*, permanece constante sin importar donde se ubique dicho punto.

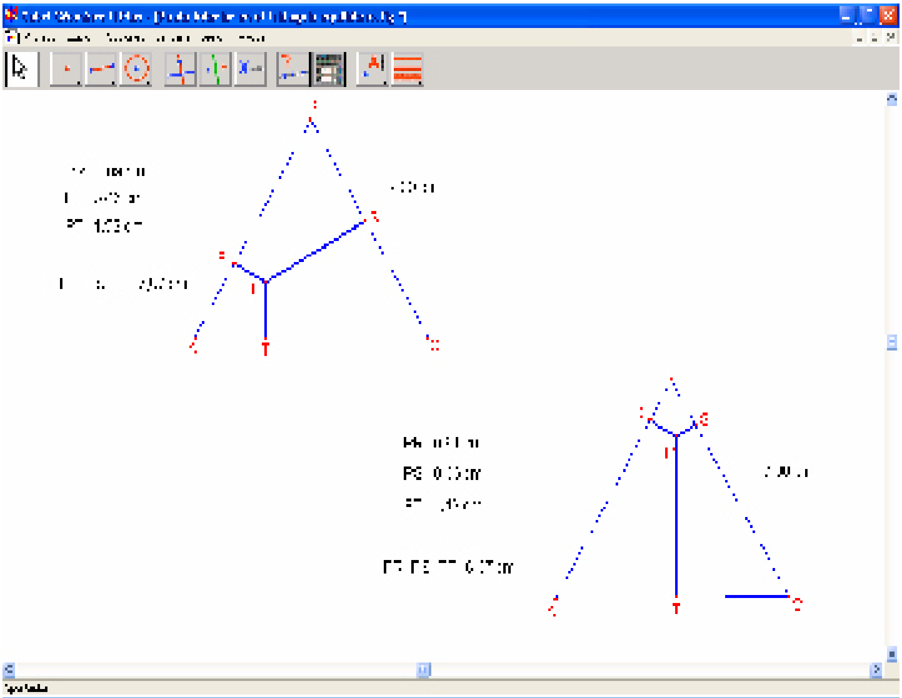

Figura 16: Representación dinámica del problema utilizando *Cabri Geómètre.*

Se puede observar que cuando el punto se acerca a uno de los vértices del triángulo dos segmentos desaparecen, lo que conduciría a reconocer cómo calcular el valor de la suma de dichos segmentos. Esto llevaría a los estudiantes a plantear la siguiente conjetura: "si *P* es un punto en el interior del triángulo equilátero, la suma de los segmentos perpendiculares a cada uno de los lados es igual a la longitud de la altura del triángulo”.

¿Cómo se podría probar dicha conjetura?

Una forma corresponde a dividir el triángulo *ABC* en tres triángulos y comparar las áreas de estos con la del triángulo original (*Figura 17*).

Supóngase que la medida del lado del triángulo *ABC* es x. P es un punto interior del triángulo y a partir de él se pueden formar los triángulos *APB, BPC* y *CPA*.

Se sabe que la medida de la altura de todo triángulo equilátero de lado x es $\frac{x}{2}\sqrt{3}$.

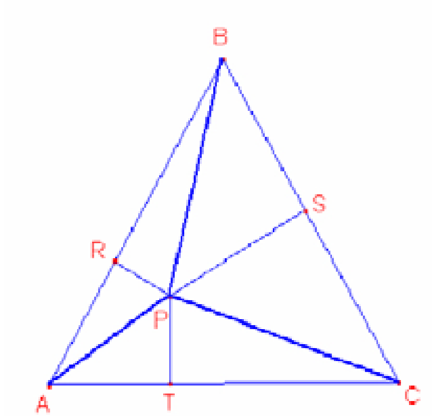

Figura 17: Triángulos que se forma a partir del punto *P* en el interior del triángulo *ABC*.

El área del triángulo equilátero *ABC* y de los triángulos internos es:

$$a\triangle ABC = \frac{x^2}{4}\sqrt{3}$$

$$a\triangle APB = \frac{x \cdot PR}{2}$$

$$a\triangle BPC = \frac{x \cdot PS}{2}$$

$$a\triangle CAP = \frac{x \cdot PT}{2}$$

Ahora, se cumple la relación

$$a\triangle ABC = a\triangle APB + a\triangle BPC + a\triangle CAP$$

De donde,

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{x\cdot PR}{2} + \frac{x\cdot PS}{2} + \frac{x\cdot PT}{2}$$

$$\frac{x^2}{4}\sqrt{3} = \frac{x}{2}\left(PR + PS + PT\right)$$

$$\frac{x}{2}\sqrt{3} = PR + PS + PT$$

Así, se obtiene que la suma de dichos segmentos es igual a la medida de la altura del triángulo *ABC*.

¿Qué ocurre cuándo el triángulo es equilátero? ¿Cuándo la suma será mínima o máxima? ¿Qué ocurre cuando el triángulo es isósceles? Estas son algunas preguntas que el estudiante también podría explorar.

COMENTARIOS FINALES

El uso de la tecnología en la resolución de problemas, permite a los estudiantes desarrollar conductas como: búsqueda de relaciones entre los elementos de las representaciones, con el propósito de identificar la solución de los problemas; elaboración de conjeturas a partir de los datos observados en las distintas representaciones realizadas en cada una de las herramientas tecnológicas; generalización de los resultados a casos generales, a partir de las soluciones obtenidas al trabajar con las herramientas tecnológicas; elaboración de conexiones entre los resultados obtenidos y otros contenidos matemáticos; y comprobación de los resultados obtenidos en un proceso de resolución, mediante la elaboración de otro diferente.

De igual forma, el proceso de resolución de problemas con el uso de la tecnología se ve enriquecido pues permite a los estudiantes:

i) realizar el análisis de casos particulares de los problemas a trabajar. Basados en estos casos particulares, los alumnos pueden conjeturar sobre la solución para el caso general;

ii) facilitar la observación de los fenómenos presentes en cada uno de los problemas., lo que requiere de todo un análisis donde el uso de la tecnología juega un importante papel;

iii) generar una serie de valores y representaciones, en los cuales se basa el análisis para hallar la solución del problema.

La posibilidad de variar una representación dinámica, generar una serie de valores en *Excel* y de cambiar los parámetros de una expresión algebraica, para que de manera rápida se obtengan resultados en la calculadora, permite no sólo resolver un problema, sino explorar otras posibles extensiones de éste que faciliten el estudio de otros contenidos matemáticos.

En relación con la investigación sobre el uso de la tecnología en la enseñanza de las matemáticas, queda aún mucho por realizar.

Por ejemplo, sería interesante indagar cómo es la interacción de los estudiantes entre sí cuando resuelven problemas en forma grupal y con ayuda de la tecnología, cómo se comunican y el proceso de discusión que surge al utilizar distintas representaciones.

Sin dejar de lado a los docentes, sería importante estudiar de qué forma impacta, en la labor del docente, conocer el uso de algunas herramientas tecnológicas; cómo las emplea en el salón de clases; cuáles estrategias utiliza y cómo desarrolla los temas del currículo apoyado en la tecnología.

Recomendaciones para el uso de la tecnología en el salón de clases

La implementación de la tecnología en el salón de clases exige al profesor planificar, cuidadosamente, las actividades con las que se va a trabajar y estar preparado para resultados inesperados.

No siempre lo que el profesor pretende que hagan los estudiantes, realmente sucede. Los alumnos podrían "perderse" durante el proceso de solución de un problema y centrarse en aspectos que no le aporten información relevante o provocar que se queden en una observación superficial de los resultados, sin dar una interpretación adecuada o elaborar exploraciones más profundas al problema.

Aunque el uso de la tecnología permite explorar situaciones que en lápiz y papel parecerían imposibles, ésta no debe usarse como un sustituto de las operaciones fundamentales. El estudiante debe ser capaz de cuestionar y refutar un resultado que obtenga al trabajar con la tecnología, basado en sus conocimientos matemáticos.

El profesor y el alumno deben ser conscientes que la tecnología refuerza el trabajo en lápiz y papel y ofrece nuevas posibilidades de exploración de las ideas matemáticas. Un estudiante no puede tomar una calculadora para resolver una ecuación, sin antes conocer el proceso que dicha herramienta está "realizando" y las reglas que se están aplicando en este caso.

La forma en cómo el estudiante interactúa con la tecnología, le aporta al profesor valiosa información para determinar el tipo de actividades que se pueden plantear, cómo se deben dirigir y los posibles alcances a los que se pueden llegar con cada una de ellas.

Que el estudiante logre construir su propio conocimiento con ayuda de la tecnología o que, por el contrario, "atrofie" habilidades ya adquiridas depende del profeso, pues es él quien toma de decisión de utilizarla, dónde, cómo y cuándo.

REFERENCIAS

Alfaro, A.; Alpízar, M; Arroyo, J.; Gamboa, R.; Hidalgo, M. (2004). *Enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica: Elementos para un Diagnóstico*. Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer Mediated Learning: An Example of An Approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 5*, 2545.

Balacheff, N. & Kaput, J. (1996). Computer-based learning environments in mathematics. En A. Bishop; K. Clement; C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education.* Dordrecht: Kluwer Academic Press. pp. 469-501.

Barrera, F. & Santos, M. (2001). Students' use and understanding of different mathematical representations of tasks in problem solving instruction. *Proceedings of the Twenty Three Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 1, pp. 459-466. ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Camacho, M. & Santos, M. (2004). El estudio de fenómenos de variación haciendo uso de herramientas tecnológicas. *Uno Revista de Didáctica de las matemáticas.* Nº 37, pp. 105-122.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II.* pp. 173-201. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, A. (1997). Soluciones geométricas a problemas de máximos y mínimos. *Miscelánea matemática.* Nº 26, pp. 49-57. Sociedad Matemática Mexicana.

Fuglestad, A. (2004). ICT tools and student's competence development. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 2, pp. 439-446.

Hitt, F. (1996). Educación matemática y uso de nuevas tecnologías. En L. M. Santos; E. Sánchez (Eds.), *Perspectivas en Educación Matemática.* Cinvestav, pp 21-44. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Hitt, F. (1998). Visualización matemática, representaciones, nuevas tecnologías y currículo. *Educación matemática.* Vol. 10, Nº 2, pp. 23-45.

Lupiánez, J. & Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez; L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* pp. 291-300. Granada: Editorial Universidad de Granada.

Martin, W. (2000). Lasting effects of the integrated use of graphing technologies in precalculus mathematics. In E. Dubinsky; A. Schoenfeld; J. Kaput (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education.* Mathematical Association of America, Washington, D. C. Vol. 8, pp. 154-187.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Peralta, J. (1994). Problemas de máximos y mínimos y algunas reflexiones sobre el automatismo en su resolución. *Educación matemática.* Vol. 6, Nº 2, pp. 57-71.

Santos, M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Santos, M. (2001). Potencial didáctico del software dinámico en el aprendizaje de las matemáticas. *Avance y perspectiva,* Vol. 20, pp. 247-258.

Williamson, S. & Kaput, J. (1999). Mathematics and virtual culture: an evolutionary perspective on technology and mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 17 (21), pp. 265-281.