

## EL GEOGEBRA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA

Elizabeth Milagro Advíncula Clemente – Augusta Rosa Osorio Gonzales  
[eadvincula@pucp.edu.pe](mailto:eadvincula@pucp.edu.pe) – [arosorio@pucp.edu.pe](mailto:arosorio@pucp.edu.pe)  
Pontificia Universidad Católica del Perú - Perú

Núcleo temático: Recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Modalidad: CB

Nivel educativo: Universitario

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, Geometría, *GeoGebra*

### Resumo

*En este trabajo presentaremos una experiencia que es resultado de nuestro interés por acercar a los estudiantes a la exploración de los objetos geométricos y sus propiedades, de manera intuitiva y dinámica. Mostraremos como incorporamos el GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en el curso Matemática para Educación Primaria, con estudiantes universitarios que cursaban el tercer ciclo. Presentaremos algunas situaciones relacionadas con triángulos y cuadriláteros. Entre los resultados podemos mencionar que los estudiantes lograron reconocer propiedades propias de cada objeto geométrico, observaron invariantes geométricos al manipular figuras que fueron construidas respetando sus propiedades geométricas, y verificaron conjeturas que les permitieron resolver las situaciones propuestas. Finalmente, podemos decir que el uso del GeoGebra promueve el pensamiento geométrico en cuanto los estudiantes logran apropiarse de este como herramienta dentro de un proceso de génesis instrumental.*

### Introducción

En el presente artículo compartiremos una experiencia con estudiantes universitarios que siguen la carrera de Educación Primaria en la Pontificia Universidad Católica del Perú. En nuestras clases del curso Matemática para Educación Primaria observamos que nuestros estudiantes presentan muchas dificultades para resolver problemas relacionados con contenidos matemáticos, en particular con contenidos geométricos. Entre las dificultades identificadas se encuentran: dificultades para reconocer las propiedades propias de cada objeto geométrico, dificultades para usar las fórmulas adecuadas y dificultades para realizar construcciones geométricas usando instrumentos de dibujo como regla y compás.

Ante la problemática mencionada y conscientes de que nuestros estudiantes requieren desarrollar competencias matemáticas y didácticas que les permita tener una práctica docente

exitosa al trabajar con diferentes contenidos matemáticos, nos propusimos acercarlos a estos contenidos de manera dinámica y flexible. Para ello decidimos incorporar el *GeoGebra* en el desarrollo de nuestras actividades, ya que consideramos que el potencial de arrastre que ofrece este *software* permite modificar las figuras construidas de manera casi inmediata y esto facilita el descubrimiento de las propiedades que caracterizan a cada objeto geométrico, la generalización de propiedades, así como la elaboración de conjeturas que pueden ser verificadas o refutadas con ayuda de las herramientas del *software*, logrando de esta manera la comprensión de los conceptos y propiedades geométricos involucrados.

### **Enfoque teórico**

El marco en el que nos basamos para diseñar nuestras actividades es el enfoque instrumental de Rabardel (1995). Consideramos este enfoque porque nos permite analizar la relación que se establece entre un sujeto (estudiante) y un objeto (objeto geométrico) mediado por el uso de un artefacto (*GeoGebra*), que al convertirse en un instrumento para el sujeto en un proceso de génesis instrumental, este logra resolver la tarea propuesta.

Para Rabardel (1995), un instrumento está formado por un artefacto y por esquemas de utilización que resultan de la interacción del sujeto con dicho artefacto. En esta interacción el sujeto construye esquemas mentales asimilando esquemas ya existentes o elaborando nuevos esquemas para llevar a cabo acciones que le permitan resolver la tarea propuesta. La génesis instrumental donde ocurre la transformación de un artefacto en un instrumento, tiene dos componentes: la instrumentalización y la instrumentación. En la instrumentalización, el sujeto aprende a usar de manera eficaz el artefacto y puede asignarle nuevas funciones; es decir, se apropia de las propiedades que necesita del artefacto para resolver el problema propuesto. En la instrumentación, el sujeto crea esquemas de utilización que le permita resolver las tareas propuestas. Para el autor, en la combinación de estos dos procesos se reorganizan los esquemas de uso y el sujeto se apropia del instrumento y lo usa de manera eficiente para dar solución a las tareas propuestas.

Asimismo, Artigue (2002) señala que los ambientes tecnológicos utilizados estratégicamente son de gran utilidad ya que permite que los estudiantes comprueben sus resultados, refuercen conceptos, y elaboren conjeturas e inferencias sobre las propiedades de los objetos matemáticos construidos.

### **Actividades y hallazgos**

Las actividades diseñadas fueron aplicadas con un grupo de 12 estudiantes de la carrera de Educación Primaria que cursaban el tercer ciclo, con edades entre 18 y 20 años. Estos estudiantes manifestaron que resolver problemas relacionados con contenidos geométricos era algo difícil y complicado para ellos.

En esta parte mostramos dos situaciones problema, una relacionada con el circuncentro de un triángulo y otra con el rombo. También presentamos las respuestas dadas por dos estudiantes, ya que esto nos permitirá describir las acciones que realizan estos estudiantes cuando resuelven problemas relacionados con las nociones geométricas: circuncentro y rombo, utilizando el *GeoGebra*.

A continuación presentamos la situación problema 1.

### **Situación 1**

En la localidad de Raúl recientemente se han construido tres edificios, ubicados como se muestra en la siguiente figura. Como parte de las nuevas obras de la localidad, el próximo mes se iniciará la construcción de un supermercado con la condición que quede ubicado a la misma distancia de los tres edificios recién construidos.



Figura 1. Ubicación de los edificios.

Responda lo siguiente:

- ¿Es posible construir un supermercado que cumpla con la condición dada? Si es posible, diga dónde se tendría que ubicar dicho supermercado. Justifique su respuesta.
- ¿La ubicación del supermercado es única? Si la ubicación no es única, indique todas las alternativas posibles.

A continuación mostramos las respuestas dadas por dos estudiantes al resolver la situación 1.

### Respuesta del estudiante 1

El estudiante 1 ha realizado la siguiente construcción en *GeoGebra*.

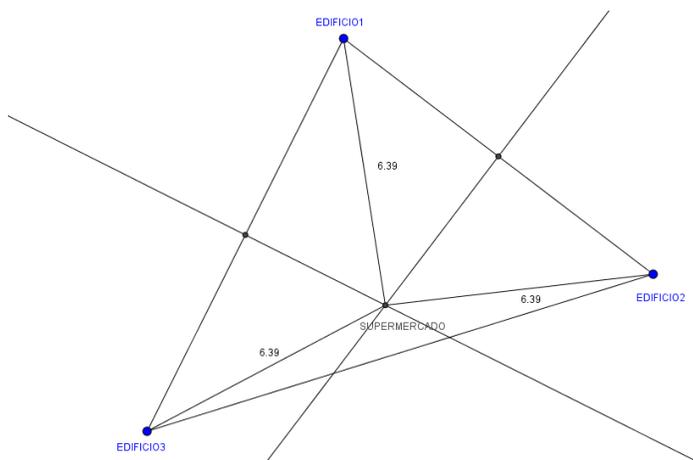


Figura 2. Respuesta del estudiante 1 a la situación 1.

Las respuestas de este estudiante a las dos preguntas propuestas fueron las siguientes:

- El supermercado se debe construir en el circuncentro del triángulo que se forma con los tres edificios porque la distancia es la misma.*
- Hay una sola ubicación para el supermercado porque el triángulo formado solo tiene un circuncentro.*

Observamos que el estudiante 1 movilizó sus esquemas preexistentes sobre la mediatriz de un segmento y el circuncentro de un triángulo pues decidió trazar solo dos mediatrices y determinar el punto de intersección entre dichas rectas. Podemos decir que este estudiante estaba instrumentado en relación a la noción de mediatriz de un segmento y circuncentro de un triángulo pues movilizó la propiedad de equidistancia que presenta el circuncentro respecto de los vértices de un triángulo usando de manera óptima las herramientas del *GeoGebra*.

### Respuesta del estudiante 2

El estudiante 2 ha realizado la siguiente construcción en *GeoGebra*.

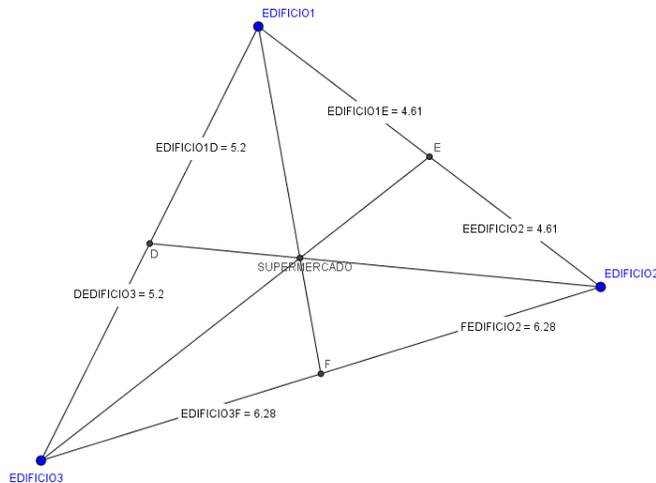


Figura 3. Respuesta del estudiante 2 a la situación 1.

Las respuestas de este estudiante a las dos preguntas propuestas fueron las siguientes:

a) *El supermercado se debe construir en el baricentro del triángulo formado con los tres edificios porque es el centro de la figura.*

b) *Hay una sola posibilidad que cumple porque hay un solo centro.*

Observamos que el estudiante 2 usa las herramientas del *GeoGebra* sin ninguna dificultad, pero para realizar una construcción incorrecta pues construye el baricentro del triángulo formado. Podemos decir que este estudiante tiene dificultades con las nociones relacionadas con los puntos notables de un triángulo pues confunde las propiedades del baricentro con las del circuncentro. Además, podemos señalar que este estudiante no se apropia de las herramientas del *GeoGebra* para verificar su conjetura sobre el baricentro como respuesta a la situación propuesta, ya que no comprueba si el punto hallado equidista de los vértices del triángulo.

En general, sobre las respuestas dadas a esta situación por los estudiantes del grupo con el que trabajamos, podemos decir que 6 de ellos dieron respuestas similares a la del estudiante 1 y el resto, similares a la del estudiante 2. En términos de Rabardel (1995), podemos señalar que la mitad de estudiantes no desarrolla esquemas mentales relacionados con la noción circuncentro que le permitan resolver la tarea propuesta pues confunde las propiedades del circuncentro con las del baricentro.

A continuación presentamos la situación problema 2.

## Situación 2

José tiene un jardín muy grande en su casa y ha decidido convertirlo en un huerto. Por el momento tiene un árbol de plátano y un árbol de manzana, ubicados a 4 m de distancia uno del otro. José desea sembrar un árbol de lúcuma y colocar un caño de agua en una de las paredes, la cual se indica en la siguiente figura, de modo que los tres árboles y el caño formen un rombo.

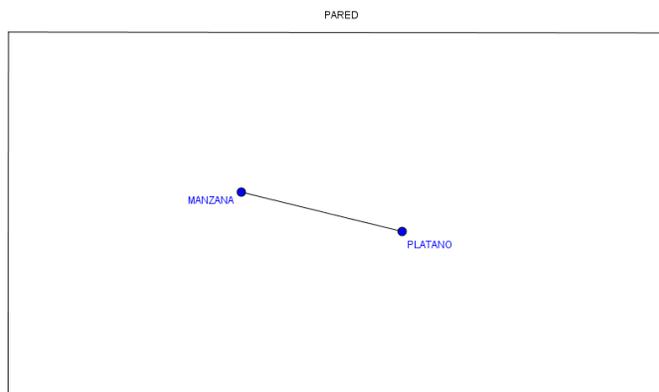


Figura 4. Ubicación de los árboles en el jardín.

Responda lo siguiente:

- ¿Es posible ubicar un árbol de lúcuma y un caño de agua de modo que cumplan la condición dada? Si es posible, indique dónde deben ubicarse estos elementos. Justifique su respuesta.
- ¿Cuántas alternativas tenemos para ubicar un árbol de lúcuma y un caño de agua con la condición dada? Indique todas las alternativas posibles.

A continuación mostramos las respuestas dadas por dos estudiantes al resolver la situación 2.

### Respuesta del estudiante 1

El estudiante 1 ha realizado la siguiente construcción en *GeoGebra*.

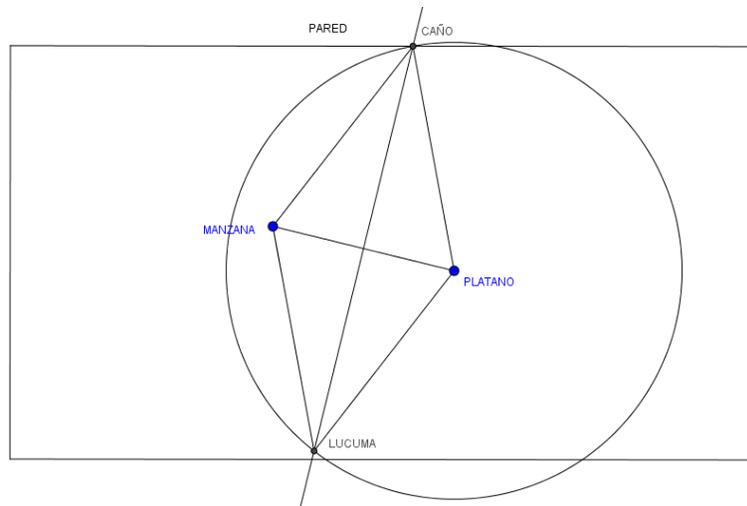


Figura 5. Respuesta del estudiante 1 a la situación 2.

Las respuestas de este estudiante a las dos preguntas propuestas fueron las siguientes:

a) *Si es posible. El caño se ubicaría sobre la pared y la lúcuma a 4 metros de la manzana y el plátano.*

b) *Solo una alternativa.*

Observamos que el estudiante 1 movilizó la noción de mediatriz relativa a un segmento al trazar la mediatriz relativa al segmento que une el árbol de manzana con el de plátano. También, observamos que movilizó esquemas mentales relacionados con las nociones de rombo e intersección de rectas, ya que consideró a la mediatriz trazada inicialmente como la recta que contiene a una de las diagonales del rombo que se desea formar y determinó la ubicación del caño en la intersección de esta mediatriz con la recta que representa a la pared donde debería ubicarse el caño. Asimismo, observamos que el estudiante movilizó nuevamente la noción de rombo al trazar una circunferencia con centro en el punto que representa al árbol de plátano y que pasa por el punto donde se ubicó el caño, y luego determinar el punto de intersección entre dicha circunferencia y la mediatriz trazada inicialmente; obteniendo de esta manera la ubicación del árbol de lúcuma.

Finalmente, podemos decir que el estudiante 1 logró convertir el artefacto *GeoGebra* en un instrumento que le permitió determinar una alternativa para la ubicación de los vértices del rombo que se deseaba formar, usando de manera óptima las herramientas necesarias de este *software* y los esquemas mentales elaborados en relación a la noción de circuncentro. Cabe resaltar que a pesar de evidenciar una instrumentalización en relación a la noción de rombo

usando el *GeoGebra*, este estudiante solo logró dar una solución para el problema propuesto en el que consideró que al segmento que une el árbol de manzana con el árbol de plátano como una de las diagonales del rombo.

### Respuesta del estudiante 2

El estudiante 2 ha realizado la siguiente construcción en *GeoGebra*.

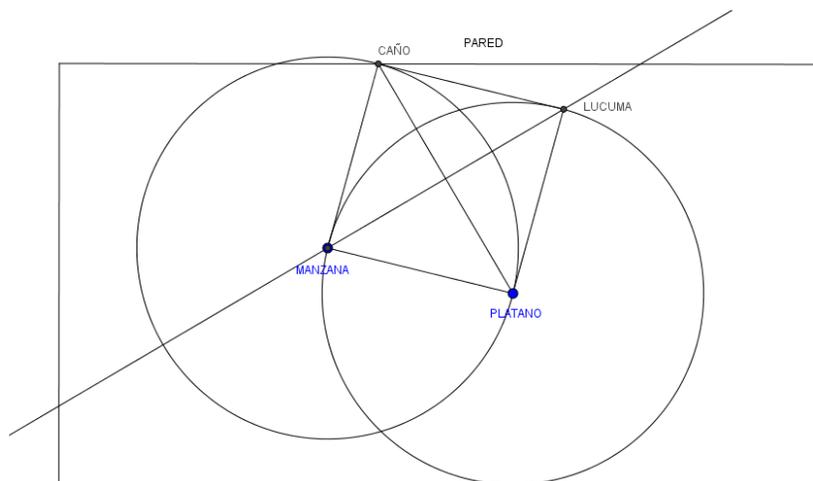


Figura 6. Respuesta del estudiante 2 a la situación 2.

Las respuestas de este estudiante a las dos preguntas propuestas fueron las siguientes:

- Sí, deben ubicarse en las esquinas de los vértices que faltan para formar un rombo.*
- 2 alternativas.*

Observamos que el estudiante 2 movilizó la noción de rombo al trazar una circunferencia con centro en la ubicación del árbol de manzana y radio el segmento que une el árbol de manzana con el de plátano, considerando de esta manera a este segmento como uno de los lados del rombo. Este estudiante, también, movilizó la noción de rombo al intersectar la circunferencia trazada anteriormente con la recta que representa a la pared donde se debe ubicar el caño y determinar de esta manera la posición de dicho caño. Además, movilizó esquemas relacionados con la noción de mediatriz de un segmento al trazar la mediatriz relativa a la diagonal cuyos extremos son el árbol de manzana y el árbol de plátano. Asimismo, movilizó la noción de rombo para determinar la ubicación del árbol de lúcuma en la intersección de la circunferencia con centro en el árbol de plátano y radio el segmento que une el árbol de plátano con el árbol de manzana.

Finalmente, podemos decir que el estudiante 2 logró convertir el artefacto *GeoGebra* en un instrumento que le permitió encontrar una alternativa para la ubicación de los vértices del rombo que se deseaba formar, usando de manera óptima las herramientas del *GeoGebra* y los esquemas mentales elaborados en relación a la noción de rombo, mediatriz de un segmento e intersección de rectas con circunferencias. Sin embargo, a pesar de evidenciar una instrumentalización en relación a la noción de rombo usando el *GeoGebra*, este estudiante solo logró dar una solución para el problema propuesto en la que consideró al segmento que une el árbol de manzana con el árbol de platano como uno de los lados del rombo.

En general, sobre las respuestas dadas por los estudiantes del grupo con el que trabajamos, podemos decir que la mitad de estudiantes solo presentó una de las soluciones mostradas anteriormente para el problema propuesto, algunos estudiantes no lograron resolver la tarea propuesta y ningún estudiante logró dar las tres soluciones posibles.

### **Conclusiones**

Durante el desarrollo de las actividades observamos cómo los estudiantes hacen uso de las herramientas del *GeoGebra* y los integran a sus esquemas de uso preexistentes o elaboran nuevos esquemas relacionados con las nociones de mediatriz, circuncentro, rombo, intersección de rectas e intersección entre rectas y circunferencias, para resolver las situaciones propuestas. Por ello, podemos decir que el enfoque instrumental de Rabardel (1995) permite describir y analizar la evolución de la relación entre el estudiante y el artefacto *GeoGebra*, hasta que este último se convierte en un instrumento para el estudiante y le permite realizar las tareas propuestas.

Finalmente, podemos afirmar que las herramientas del *GeoGebra* facilitaron la realización de las construcciones geométricas involucradas y esto permitió promover el desarrollo del pensamiento geométrico en los estudiantes.

### **Referencias bibliográficas**

- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. (Trad. por M. Acosta). Colombia: Universidad Industrial de Santander.
- Artigue, M. (2002). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6(8), 13-33. .