

LA MATEMÁTICA EN LAS CIENCIAS ECONÓMICAS: EL ANÁLISIS MARGINAL

Sandra Noemí Franco; María Rosa Rodríguez; Gustavo Ariel Sota
Facultad Ciencias Económicas. Universidad Nacional de Tucumán.
mrodriguez@face.unt.edu.ar, sandranfranco@hotmail.com

Resumen

En las Ciencias Económicas es imprescindible definir claramente las relaciones entre las variables involucradas en un fenómeno. Los modelos matemáticos explican con precisión la realidad de diversas situaciones económicas. El análisis marginal, teoría basada en modelos matemáticos, es una herramienta útil para tomar decisiones vinculadas con la formación de costos y precios, conceptos fundamentales para optimizar el beneficio de una empresa. El objetivo de este trabajo es mostrar la importancia del análisis marginal cuando cambian los costos o las contribuciones marginales. Con esta ponencia se procura dar sentido y contextualizar los conceptos económicos, a través de modelos matemáticos con formulaciones que relacionan las variables más relevantes. Esto aporta valiosa información y promueve importantes decisiones, de manera rápida y precisa.

Palabras Claves: Modelos matemáticos, Optimizaciones, Variaciones, Análisis marginal

Abstract

In economics it is essential to clearly define the relationship between the variables involved in a phenomenon. Mathematical models accurately explain the reality of diverse economic situations.

The marginal analysis theory based on mathematical models, it is useful to make decisions related to the formation of costs and prices, fundamental concepts to optimize the benefit of a business tool.

The aim of this paper is to show the importance of marginal analysis when they change the costs or marginal contributions. This paper seeks to give meaning and contextualize the economic concepts, through mathematical models with formulations that relate the most relevant variables. This provides valuable information and promotes accurate and important decisions quickly.

Keywords: mathematical modeling, optimization, variations, marginal analysis

1.- Introducción

La Matemática en las Ciencias Económicas es una herramienta fundamental para adquirir y consolidar el conocimiento. En primer lugar, obliga a definir claramente las variables involucradas en cada problema, a establecer las hipótesis sobre su comportamiento y a definir las relaciones entre ellas. En segundo lugar, el lenguaje matemático permite importar a las Ciencias Económicas modelos de relación entre variables ofreciendo nuevas posibilidades de explicación de sus fenómenos y enriqueciendo el conjunto de modelos disponibles para investigar la realidad. Los modelos matemáticos permiten que los conocimientos adquiridos puedan transmitirse con precisión.

En Economía, las decisiones que toman los empresarios son fundamentales para optimizar el beneficio de una empresa. La mejor herramienta para tomar decisiones sobre costos y precios es el Análisis Marginal. Constituye la técnica actual más eficaz para la adopción de decisiones vinculadas con la formación de los costos y la política de precios. Para su aplicación se usan modelos matemáticos que precisan los diferentes niveles de producción a fin de lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido.

El objetivo de este trabajo es mostrar el uso y la importancia del Análisis Marginal en la toma de decisiones, cuando existen cambios en el comportamiento de los costos o en las contribuciones marginales. Es el análisis de la relación óptima entre costos y beneficios frente a sucesivas modificaciones en los valores de los parámetros intervinientes.

La contribución marginal unitaria muestra la contribución de los precios de los productos o servicios para cubrir los costos fijos y generar utilidad.

Con este trabajo se procura dar sentido y contextualizar los conceptos a través de modelos con formulaciones algebraicas, que aportan valiosa información y conducen de manera rápida y precisa a importantes decisiones e interpretaciones económicas.

2.- Relaciones Costo – Beneficio

Según el comportamiento de los costos ante cambios en el nivel de actividad existen:

1. Costos Fijos, Constantes o Estructurales: son aquellos costos totales que se mantienen más o menos constantes ante cambios en el nivel de actividad. No depende del nivel de producción y/o ventas de la empresa. Es una cantidad determinada, independiente del volumen del negocio.

2. Costos Variables: son aquellos que aumentan o disminuyen frente a cambios en el nivel de actividad. Dependen del volumen de producción y/o ventas de la compañía. Si la producción fuera nula, estos costos serían prácticamente cero.

Toda empresa tendrá una serie de costos fijos y de costos variables. Incluso algunos costos que son fijos para una empresa, pueden ser variables para otra y viceversa. En el corto plazo, los costos fijos están en función del tiempo y los variables en función de la cantidad producida y/o vendida. Esta clasificación de los costos no es absoluta. Algunos se mantienen constantes, mientras que otros experimentan modificaciones al pasar de un nivel de producción a otro.

El costo total es la suma del costo fijo total más el costo variable total:

$CT = CF + cv * Q$ donde el costo variable total es el costo variable unitario (cv) por la cantidad producida (Q).

El costo-beneficio es una lógica basada en el principio de obtener los mejores resultados al menor esfuerzo invertido. Si los beneficios superan el costo son exitosos, caso contrario fracasan. Su análisis es una técnica importante dentro de la teoría de la decisión. Determina la ventaja de un proyecto de inversión mediante la valoración de sus costos y beneficios, con el fin de evaluar su rentabilidad. Un proyecto puede consistir en el desarrollo de nuevos productos, adquisición de nuevas maquinarias o cambios en los niveles de producción.

La primera consideración en el costo – beneficio es que un aumento en los costos fijos o en las contribuciones marginales unitarias no deriva en un cambio conveniente de estructura. La decisión de aumentar la capacidad de una actividad dependerá de que el nuevo nivel de producción brinde mayor beneficio que el que se obtiene ocupando la capacidad actual.

El beneficio o utilidad es $B = I - CT$ donde el ingreso I es la cantidad que recibe una empresa por venta de productos o servicios.

Entonces $B = (pv - cv) * Q - CF$ siendo pv precio de venta unitario

Se denomina contribución marginal unitaria de un producto a la expresión $cm = pv - cv$ que muestra la contribución de los precios de los productos o servicios para cubrir los costos fijos y generar utilidad.

El producto de la contribución marginal unitaria por el número de unidades producidas o vendidas da la contribución marginal total (CM) del producto.

Entonces $B = cm * Q - CF = CM - CF$ y se pueden dar las siguientes alternativas:

1. Si la contribución marginal total contribuye a absorber el costo fijo, deja un "margen" para la utilidad o beneficio. $CM > CF$ entonces $B > 0$

2. Cuando la contribución marginal total es igual al costo fijo, no deja ganancia y la empresa está en su punto de equilibrio. No gana ni pierde y su beneficio es nulo.

$$CM = CF \quad \text{entonces} \quad B = 0$$

3. Cuando la contribución marginal total no alcanza para cubrir los costos fijos, la empresa puede seguir trabajando en el corto plazo ya que esta contribución marginal absorbe parte de los costos fijos. En este caso la actividad da resultado negativo.

$$CM < CF \quad \text{entonces} \quad \text{hay pérdida.}$$

4. La situación más crítica se da cuando la contribución marginal unitaria es negativa. En este caso, se decide no continuar con la elaboración de un producto o servicio.

$$cm < 0 \quad \text{o sea} \quad pv < cv$$

El concepto de contribución marginal es muy importante en las decisiones de mantener, retirar o incorporar nuevos productos de una empresa, por la incidencia que tienen en la absorción de los costos fijos y la capacidad de generar utilidades. Se desarrollan dos situaciones comerciales que requieren decidir sobre el aumento de producción de una actividad, cuando se presentan modificaciones en los costos fijos y cuando existe disminución en la contribución marginal unitaria.

3.- Sucesivos Aumentos de la Producción

Como parte de la investigación, se realizó una consulta entre varias empresas de Tucumán, interesadas en realizar cambios en la estructura de sus productos y se seleccionó una fábrica de parquet que procura modificar su estructura debido al gran incremento en la demanda de pisos y estima que la adquisición de nuevos equipos le permitirá incrementar su producción, generando consecuentemente un aumento en los ingresos.

Estas decisiones llevarían inevitablemente a un aumento en los costos de estructura, los cuales deberán analizarse para evaluar la conveniencia de la ampliación. La inversión quedará plenamente justificada si el nuevo nivel de producción permite superar el beneficio derivado de la producción actual.

Con la situación inicial se formula el problema y se determina el punto de resultado indiferente. Este punto representa el nivel de actividad que arroja un beneficio igual al que se consigue usando al máximo la capacidad de la estructura anterior.

Luego, se realizan sucesivos aumentos de la estructura que deben superar este punto en cada tramo. En consecuencia, convendrá realizar la inversión, sólo si aumenta el beneficio esperado, que se logra cuando se supera la producción determinada por el punto de resultado indiferente.

Según los datos aportados por la fábrica de parquet, en la situación actual, la empresa produce $Q_1 = 1000$ unidades, mientras que la compra del nuevo equipamiento le permitiría duplicar sus niveles de producción a $Q_2 = 2000$.

Los Costos Fijos actuales son de $CF_1 = \$150.000$ y se calcula que los Costos Fijos con la nueva estructura alcanzan a $CF_2 = \$250.000$. El Precio de venta unitario es pv de $\$250/\text{unidad}$, el Costo variable unitario cv de $\$50/\text{unidad}$. Por lo tanto, la contribución marginal unitaria cm es de $\$200/\text{unidad}$.

La inversión quedará plenamente justificada si el nuevo nivel de producción permite superar el beneficio derivado de la producción actual.

De $B = cm * Q - CF$ el beneficio considerando la máxima producción actual es
 $B_1 = 1.000 * 200 - 150.000 = 50.000$

Frente a un cambio en el nivel de producción, la cantidad mínima que justifique una inversión es $Q = \frac{B + CF}{cm}$.

Entonces, el nivel mínimo que justifique una inversión que incremente el nivel de producción actual, de 1000 unidades, es $Q_{n_1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm}$ donde

Q_{n_1} = Cantidad mínima que debe ser superada con la nueva estructura,

B_1 = Beneficio usando al máximo la capacidad actual de 1000 unidades,

CF_2 = Costo Fijo con la nueva estructura y cm = Contribución marginal unitaria

En este caso: $Q_{n_1} = \frac{B_1 + CF_2}{cm} = (50.0000 + 250.000) / 200 = 1.500$

La nueva estructura debe superar la cantidad de 1.500 unidades y el beneficio que aporta esa producción es $B_{n_1} = 1.500 * 200 - 250.000 = 50.000$ igual beneficio que se alcanza usando al máximo la estructura actual. La compra de nuevo equipamiento se realizará, sólo si aumenta el beneficio esperado ($\$50.000$) que se logrará cuando se produzcan y vendan más de 1500 unidades.

El resultado obtenido de producir 1500 unidades se denomina Punto de Resultado Indiferente, que representa el nivel de actividad que arroja un beneficio igual al que se consigue usando al máximo la capacidad de la estructura anterior.

Para sucesivos aumentos de la estructura, al pasar a mayores niveles de actividad, se considerarán las variaciones en los costos e ingresos.

El Nivel de Producción máxima con un 2do aumento de la estructura $Q_3 = 3000$ unidades, un Costo fijo de la nueva estructura CF_3 de $\$300.000$ y sin cambios en la cm se calcula su beneficio.

Por lo tanto, para que sea conveniente abordar el segundo tramo, debe ser superado el Punto de Resultado Indiferente $Q_{n_1} = 1500$

Con el primer aumento de la estructura, el beneficio usando la máxima cantidad (2000 unidades) es: $B_2 = Q_2 * cm - CF_2 = 2000 * 200 - 250.000 = 150.000$.

El Punto de Resultado Indiferente con el segundo aumento es $Q_{n_2} = \frac{B_2 + CF_3}{cm}$
 $= \frac{150.000 + 300.000}{200} = 2250$

Y el beneficio que aporta esa producción es: $B_{n_2} = 2250 * 200 - 300.000 = 150.000$

El nuevo aumento de estructura debe superar la cantidad de **2250** unidades y este beneficio es el mismo cuando se usa al máximo el primer aumento de la estructura. Convendrá realizar cualquier inversión, sólo si aumenta el beneficio esperado de $\$150.000$, que se logra cuando se fabrican y venden más de 2250 unidades. En este

Punto de Resultado Indiferente el beneficio es igual al que se obtiene usando al máximo la capacidad del tramo anterior.

En el último tramo, el beneficio obtenido usando al máximo la nueva estructura, de 3000 unidades es $B_3 = Q_3 * cm - CF_3 = 3000 * 200 - 300.000 = 300.000$

Estos cálculos permiten visualizar el comportamiento de los distintos parámetros cuando se producen nuevas y mayores ampliaciones de la estructura.

4.- Contribuciones Marginales Decrecientes

Una fábrica de cosméticos de la provincia de Tucumán nos consultó sobre decisiones de producción en el caso del aumento de los costos variables unitarios, manteniéndose fijo el precio de venta. Sus dueños pensaron en realizar en sus operarios incrementos en el incentivo a la producción, originando una disminución en la contribución marginal unitaria.

Este caso analiza la toma de decisiones sobre la producción de una máscara de pestañas cuando varía el costo variable unitario debido a diversos incentivos a sus operarios, manteniéndose fijo el precio de venta. En este caso las contribuciones marginales decrecen.

El concepto que prima es el de los puntos de equilibrio para cada tramo, que ocurren cuando los ingresos son iguales a los costos.

Según la información aportada por sus directivos, los costos fijos son de \$70.000 mensuales y el precio de venta de su producción es de \$250 cada unidad. El costo variable unitario se compone de \$100 de materia prima más un incentivo a la producción cuyo valor por unidad producida aumenta de a \$20 cada vez que son superadas las 400, 700 y las 1000 unidades.

Como el **pv** no experimenta cambios y los **cv** aumentan, entonces las **cm** decrecen.

Primero se calculan los Puntos de Equilibrio para cada tramo, que ocurren cuando los ingresos son iguales a los costos, con el objetivo de determinar si se puede lograr beneficio en cada uno:

$$Q_1 = \frac{70000}{130} = 539 \quad Q_2 = \frac{70000}{110} = 636 \quad Q_3 = \frac{70000}{90} = 778$$

El punto de equilibrio del primer tramo, correspondiente a 539 unidades, no es posible porque la **cm** ya no es de \$130 sino sólo de \$110. En el segundo tramo es de 636 unidades que corresponde a la **cm** de \$110; por lo tanto este punto de equilibrio existe en la realidad de la empresa. En el último tramo, el punto de equilibrio es de 778 unidades y también es un dato real porque la **cm** es realmente de \$90. En consecuencia, existen dos puntos de equilibrio, uno en 636 unidades y el otro en 778 unidades. Por lo tanto, la empresa no puede operar en el primer tramo porque sólo obtendría quebrantos. En el segundo tramo el máximo nivel de actividad es de 700 unidades con una contribución marginal unitaria de \$110 y su beneficio es

$$B_2 = 700 * 110 - 70000 = \$7000$$

Es importante saber si aumenta el beneficio de la empresa en el tercer tramo. Para ello

se recurre a la expresión $Q = \frac{B + CF}{cm}$ donde varía la contribución marginal

unitaria, sin modificarse el costo fijo. En consecuencia: $Q_{n3} = \frac{B_2 + CF}{cm_3}$

$$= \frac{7000 + 70000}{90} = 856$$

Convendrá aumentar la actividad para pasar al tercer tramo si se pueden superar las 856 unidades de máscara de pestañas. En este nivel se recupera el máximo beneficio posible dentro del segundo tramo.

5.- Conclusiones

Con el estudio analítico se visualiza el comportamiento de los distintos parámetros ante modificaciones en el nivel de actividad.

Para el caso de los sucesivos aumentos de la producción de piso de parquet, se observa que el tramo del nivel de actividad entre 1100 y 1200 unidades no es conveniente, ya que el resultado se convierte en quebranto. Es importante el análisis de comparación del nivel de actividad mínimo necesario que justifique la inversión usando al máximo la estructura actual; que conlleva al incremento de la estructura con el nivel de producción máximo. Si el nivel de actividad mínimo que justifica la nueva estructura está muy cerca del nivel máximo que ella permite, puede resultar desaconsejable la inversión, ya que, ante la necesidad de un pequeño aumento en la producción, enfrentaremos la necesidad de volver a aumentar la estructura.

Cuando varía la contribución marginal unitaria en la empresa de cosméticos, se calculan los puntos de equilibrio y el posible beneficio en cada tramo para examinar la conveniencia del aumento de la actividad. En el primer tramo la empresa tiene pérdidas y no le conviene operar; mientras que, en los dos siguientes sí logra beneficios que son considerados para decidir la producción que se necesita para alcanzar el máximo beneficio.

El Análisis Marginal también estudia los casos de modificaciones en la contribución marginal unitaria debido a cambios en los precios de venta. No obstante, es eficiente para los casos en que sufren modificaciones varios parámetros simultáneamente.

El objetivo fundamental de todo empresario es lograr mayor rentabilidad en función del capital invertido. Con ello, se intenta generar en estudiantes y usuarios un nuevo significado operativo, predominando una metodología que explica y predice fenómenos económicos.

Por ser una actividad dentro de un proyecto de investigación, intentamos con este trabajo realizar un aporte en el ámbito empresarial, procurando contextualizar los conceptos económicos a través de modelos matemáticos. Estos aportan información y conducen a importantes decisiones e interpretaciones económicas, de manera rápida y precisa. Además, proporciona a los docentes una modelización accesible que promueve un pensamiento no lineal y una cierta intuición racional.

6.- Referencias

- Arya, J. y Lardner R. (2004). *Matemáticas Aplicadas a la Administración y a la Economía*. 4a Edición. México: Pearson Educación
- Giménez, C. y Colaboradores. (2007). *Sistemas de Costos*. Buenos Aires: La Ley.
- Horngren, C.; Foster, G y Datar, S. (2007). *Contabilidad de Costos, Un Enfoque Gerencial*. Décimo segunda Edición México: Pearson, Prentice Hall.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P. (2006). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Madrid: Pearson Educación.
- Yardín, A.; Rodríguez Jáuregui, H. y Bottaro, O. (2004). *El Comportamiento de los Costos y la Gestión de la Empresa*. Buenos Aires: La Ley
- Yardín, A. (2010). *El Análisis Marginal, la Mejor Herramienta para Tomar Decisiones sobre Costos y Precios*. Buenos Aires: Osmar Buyatti