

## ENSEÑANZA POR INVESTIGACIÓN EN LA FORMACION DE PROFESORES: IMPLEMENTACION DE UN REI CO- DISCIPLINAR EN MATEMATICA Y FISICA

Viviana Carolina Llanos; María Rita Otero; María Paz Gazzola; Marcelo Arlego

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN).

Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

[vcllanos@exa.unicen.edu.ar](mailto:vcllanos@exa.unicen.edu.ar), [rotero@exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@exa.unicen.edu.ar), [mpgazzola@exa.unicen.edu.ar](mailto:mpgazzola@exa.unicen.edu.ar),  
[marlego@exa.unicen.edu.ar](mailto:marlego@exa.unicen.edu.ar)

### Resumen

El trabajo sintetiza los resultados de realizar Enseñanza por Investigación en la formación de profesores en la Universidad. Se propone un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) co-disciplinar cuya pregunta generatriz requiere estudiar física y matemática juntas. Se presentan algunos resultados de las implementaciones del REI y se consideran algunos problemas con relación al uso de los modelos y de la modelización funcional que realizan los estudiantes del Profesorado en Matemática. Se formulan algunas conclusiones sobre la importancia de introducir los REI en la formación de los profesores de matemática.

**Palabras clave:** Enseñanza por Investigación, Formación de Profesores, Enseñanza de la Matemática, Universidad.

### Abstract

This work synthesizes the results of realizing inquiry based teaching in the teachers training course in the University. A Research and Study Course (RSC) co-disciplinary whose generative question requires study physics and mathematics together is proposed. Presentamos algunos resultados de la RSC desarrollado y se consideran algunos problemas relacionados con el uso de los modelos y modelado funcional de los alumnos dentro del profesor de matemáticas. Some conclusions concerning on the importance of introducing the RSC in the university teachers training are performed.

**Key words:** Inquiry based teaching, Teachers Training, Mathematics Teaching, University.

### 1. Introducción

Este trabajo presenta algunos de los resultados de realizar enseñanza por investigación en la formación de profesores de matemática en la Universidad. Se introduce un Recorrido de Estudio y de Investigación (REI) genuinamente co-disciplinar a la Matemática y a la Física con estudiantes del profesorado en matemática (EPM). El REI comienza con la pregunta  $Q_0$ : ¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil? Inicialmente fue realizado y diseñado por el grupo de investigadores (Otero, Gazzola, Llanos, Arlego, 2015). Podría decirse que se trata de un REI genuino, porque no hay una disciplina que le presta a la otra cuestiones en las que no se estudia ni se profundiza, sino que la pregunta no tiene una respuesta relativamente completa y pre-construida ni en la física ni en la matemática.

Se implementa el REI en la Universidad con el objetivo de introducir a los EPM en el conocimiento de una enseñanza por investigación, de modo que en sus prácticas como profesores puedan intentar alcanzar gestos de esta enseñanza en la escuela secundaria.

Se describen en este trabajo los resultados de las dos implementaciones del REI, y se analizan los principales problemas identificados en los EPM, sobre todo con relación a una concepción epistemológica inadecuada de la Matemática.

## 2. Los REI co-disciplinarios

Los REI parten de una pregunta  $Q$ , denominada *generatriz*, de la que derivan otras preguntas derivadas  $Q_i$ . En el caso de los REI co-disciplinarios, se involucra en el estudio a más de una disciplina, en este caso Matemática y Física. El estudio de  $Q$  debe ser realizado por un equipo de estudiantes  $X$ , los EPM del último año del Profesorado de la UNCPBA; dirigido por un equipo de profesores  $Y$ , cuatro investigadores: uno con formación en física y matemática, dos sólo en matemática; y un físico; generando un *sistema didáctico*  $S(X;Y;Q)$  (Chevallard, 2007). El estudio de  $Q$  lleva a la elaboración de una respuesta  $R^\heartsuit$  para lo que se requiere de la “construcción” de un *medio didáctico*  $M$  apropiado.

El *medio*  $M$ , está constituido por las respuestas pre-construidas vinculadas a  $Q$ , las  $R^\diamond$ . Estas pueden encontrarse en los libros de Física, Matemática, textos históricos de la ciudad de Tandil, en la web, sitios de Física, apuntes del equipo de investigación, etc. Por otro lado, las preguntas derivadas y engendradas en  $Q$ , denominadas  $Q_j$  como por ejemplo ¿Qué conjeturas hay sobre la caída de la Piedra y cuál es la más científicamente tratable? ¿Cómo era la morfología de la piedra? ¿Qué modelo físico permitiría explicar la caída? ¿Cuál es el modelo matemático subyacente? Por último, las otras obras  $O_j$ ; las obras físicas (OF) de oscilaciones, sólidos rígidos; y las obras matemáticas (OM) de ecuaciones diferenciales, sólidos regulares, por mencionar algunas. El *medio* queda así constituido por  $M = \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond; Q_{n+1}, \dots, Q_m; O_{m+1}, \dots, O_p\}$ ; elementos esenciales al estudio de  $Q$ , y a la elaboración de la respuesta  $R^\heartsuit$ . Los REI se formalizarían a partir del *esquema herbartiano desarrollado*:  $[S(X;Y;Q) \rightsquigarrow \{R_1^\diamond, R_2^\diamond, \dots, R_n^\diamond; Q_{n+1}, \dots, Q_m; O_{m+1}, \dots, O_p\}] \rightsquigarrow R^\heartsuit$  (Chevallard, 2007).

## 3. Metodología de la investigación

La implementación se realizó en una cátedra del área de Didáctica de la Matemática, de cuarto año de la carrera Profesorado en Matemática de la UNCPBA. El curso dura cuatro meses y hay dos encuentros semanales de siete horas en total. Se realizaron dos implementaciones, en las que participaron  $N=25$  estudiantes. La formación universitaria de los EPM se corresponde con las características de la enseñanza monumental. Al momento de la implementación, cursan el último año de la carrera, y ya han aprobado todo el tramo de formación en matemática pura y gran parte de la formación pedagógica.

Las clases se desarrollaron en la Biblioteca de la Universidad para garantizar el acceso a la información, donde están a disposición todos los libros de Física y Matemática necesarios para el estudio de  $Q$ . El edificio cuenta con conexión a internet y espacios para estudiar. En todas las sesiones se realizó observación participante, se registró un audio general de cada encuentro, además de las notas de campo antes y durante la implementación de cada sesión. También se recogieron todas las producciones escritas de los estudiantes, y archivos Excel y otros resultados de los graficadores utilizados. A partir de la base de datos obtenida, se analizan los alcances del REI y las principales dificultades en cada implementación.

## 4. El REI

Se propone la pregunta  $Q_0$ : ¿Por qué se cayó la Piedra Movediza de Tandil? Se trataba de una enorme roca basáltica de 248 toneladas, en equilibrio en la cima de un cerro a 300 metros de altura, que experimentaba oscilaciones discontinuas cuando se la perturbaba en un lugar no arbitrario, según se muestra en la Figura 1. Así, cuando se toma contacto con las informaciones disponibles, la cuestión generatriz deriva hacia  $Q'$ : ¿Qué conjeturas existen sobre la caída de la Piedra Movediza y cuál es la más científicamente tratable? Asumiendo que la caída se debe al fenómeno de Resonancia Mecánica, aparecen numerosas preguntas vinculadas a los conocimientos físicos y matemáticos pertinentes para comprender y responder  $Q_0$ . Se trata de elaborar modelos físicos y matemáticos que expliquen el movimiento del sistema real y permitan cuantificar un conjunto de parámetros compatibles con la resonancia del sistema, causada por un torque externo realizado por dos o más personas, en un rango de frecuencias propias adecuadas (Figura 2).

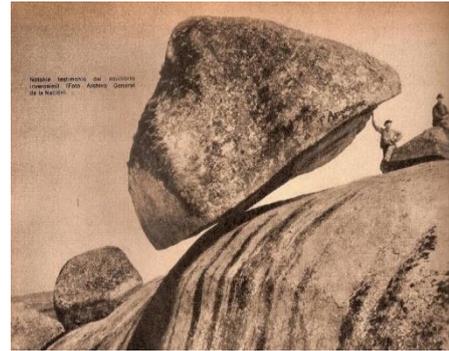


Figura 1: Fotografía de la Piedra Movediza, tomada del Archivo General de la Nación<sup>1</sup>

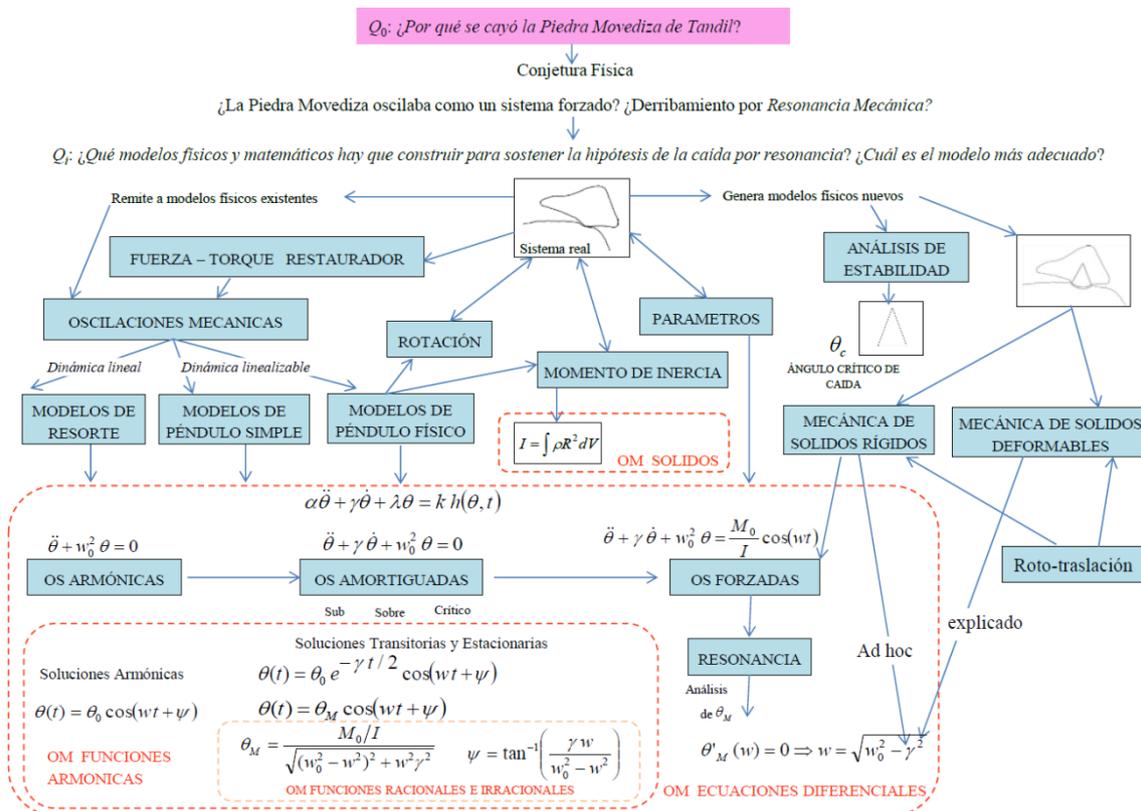


Figura 2. Modelo Praxeológico de Referencia.

### 5. Algunos resultados de las dos implementaciones

Los EPM consideran diferentes hipótesis, y optan por la llamada conjetura de Holmberg “la piedra se cae por acumulación de impulsos”, que atribuye la caída por efecto de la resonancia mecánica. Se generan así otras preguntas: ¿Cuáles es la morfología de la Piedra? ¿Qué tipo de movimiento tenía la piedra? ¿Estaba en equilibrio? ¿Qué tipo de equilibrio tenía la Piedra? ¿Qué fuerza era necesaria para sacar de equilibrio a la piedra? ¿Qué es una oscilación y qué tipos hay? ¿Qué ecuaciones describen el movimiento?

¿Cuáles son las soluciones? ¿Qué modelo físico conocido es compatible con la Piedra Movediza? ¿Cuál es el modelo matemático subyacente?

En la primera implementación, el análisis pone en evidencia que un obstáculo para el desarrollo del REI reside en el uso y el papel que los EPM asignan a los modelos y a la modelización. Los EPM no encuentran diferencias entre los modelos relativos al péndulo simple, al resorte y al péndulo físico, como ejemplos de sistemas oscilantes, porque el modelo matemático es el mismo, aunque los significados físicos en cada caso sean diferentes, por eso incurren en interpretaciones físicas inadecuadas, como se evidencia en el protocolo del estudiante E7. En lugar de analizar las ecuaciones para el caso del resorte, el péndulo simple y el péndulo físico; sólo lo hacen para el resorte como si el movimiento de la piedra correspondiera a ese modelo. El estudiante se enfoca en ¿qué oscilaciones se adecuan más al momento de la caída?, en lugar de analizar cada modelo.

oscilaciones	Amortiguada	Forzadas	arbitraria	Resonancia	Libre
Ecuación	$y'' + 2\beta y' + \omega_0^2 y = 0$	$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \lambda \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega_p \cdot t)$			
¿Tenía oscila... Natural la Piedra? ¿Cuál?	NO	NO	NO	NO	NO
Solución de la Ecuación	$x = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \alpha)$	$x = A \sin(\omega_p t + \phi)$ $A = \frac{F_0 / \omega_p}{\sqrt{(m\omega_p - k/\omega_p)^2 + \lambda^2}}$			
¿Qué oscilaciones se adecuan al momento de su caída?	Considera la fuerza de <del>resorte</del> rozamiento	mas adecuadas para representar la situación ya que considera una fuerza externa aplicada	No porque la fuerza externa si se le aplica es sólo p/ ocupar la p' se perdió por rozamiento Entonces no superaría la oscilación inicial	caso particular de las forzadas	No considera el rozamiento y nuestra piedra se encontraba al aire libre.

Figura 3: Protocolo del estudiante E7. Implementación 1

En la primera implementación los estudiantes buscaban un modelo físico “listo” entre los disponibles en los libros de física y en la web, sin analizar el ajuste o no al sistema de la Piedra. Por eso, adoptaron el del péndulo físico, cuyo modelo matemático y su solución indica E7 en la tabla. Por otro lado, los estudiantes de la primera implementación no consideraron que el modelo matemático fuera un problema. Ellos creían conocer las ecuaciones diferenciales involucradas, por estar estudiando esta materia al momento de la implementación. Al adoptar al péndulo físico como un modelo apropiado, pasan a considerar otras preguntas como ¿qué es y cuál es el momento de inercia? ¿Cómo calcularlo? ¿Qué sólido regular es una buena aproximación de la Piedra Movediza? Los EPM calcularon el momento de Inercia de varios sólidos regulares, como apropiados a la piedra, que es un sólido irregular. Calcularon la frecuencia propia del sistema, utilizando el momento de inercia, restando determinar el coeficiente de amortiguamiento. El protocolo de la Figura 3, muestra que ellos consideraron que éste se debería al roce con el aire, lo cual es un error

considerable. En esta instancia sólo restaba establecer el torque y resolver la ecuación, que ellos no consideraban un problema, aunque resultó finalmente el principal obstáculo. A pesar de que la solución de la ecuación está en los libros, los profesores decidieron resolverla y tuvieron serias dificultades para arribar a la solución final y para interpretar la solución física del sistema. Los EPM no logran usar el modelo matemático, ni sus parámetros, porque los redujeron a un valor “fijo”, inhibiendo la modelización.

El hecho de que las principales dificultades de los estudiantes sean la matemática y la manera de concebir a los modelos subyacentes fue considerado en las decisiones adoptadas en la siguiente implementación. Por este motivo, en la segunda implementación, se vivieron dos REI intramatemáticos (Chappaz & Michon, 2003; Ruiz, Bosch, Gascón, 2007a) antes del REI co-disciplinar. Los estudiantes desconocían actividades de modelización algebraico-funcional que trascendieran el primer nivel de modelización (Ibíd, 2007b). Ellos desconocían el juego entre variables y parámetros, o la posibilidad de intercambiarlos. Luego de 8 sesiones dedicadas a vivir los REI mencionados, se propuso el REI co-disciplinar de la Piedra Movediza.

En esta instancia, los EPM analizan sin inconvenientes los modelos de resorte y péndulo simple y físico. Los investigadores proponen un instrumento de comparación entre modelos, que es una tabla como la que se muestra en la Figura 5. Se considera cada modelo, su solución, y el significado de los términos que se agregan a la ecuación diferencial en cada caso; y lo que los parámetros representan. La tabla se completó con las respuestas de los estudiantes. Algunos analizaron el MAS para el péndulo simple, resorte, y el péndulo físico; otros, estudiaron sólo el modelo del resorte en todas las posibilidades. Eso permitió reconstruir todos los modelos, y los EPM advirtieron que el mismo modelo matemático, se inicializaba para representar nueve sistemas físicos diferentes, dedicándose dos encuentros al análisis de las diferencias y las similitudes entre cada modelo físico y matemático y su relación con el sistema real que pretendíamos modelar. Estos resultados se muestran en el protocolo del estudiante E17. Luego los EPM adoptaron el modelo del péndulo físico, y verificaron la solución dada en los libros, pero cuestionaron el hecho de considerar a la piedra como “un péndulo físico invertido” y lo descartaron por inadecuado para describir a la Piedra. Estos resultados y las discusiones con relación al modelo, se sintetizan en las Figuras 6 y 7.

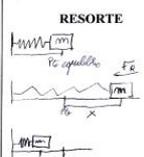
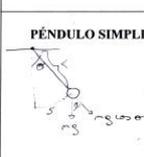
MOVIMIENTO	MAS (Movimiento Armónico Simple)	Movimiento Amortiguado	Movimiento Forzado
	Ecuación	Ecuación	Ecuación
<p>RESORTE</p> 	$m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$ $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$ $\frac{d^2}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$	$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x}$ $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$ $\omega^2 = \frac{k}{m}$	$m \ddot{x} = -kx - b\dot{x} + f(t)$ $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{f(t)}{m}$ $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = \frac{f(t)}{m}$ donde $f(t) = f_0 \cdot \cos(\omega t)$
<p>PÉNDULO SIMPLE</p> 	$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$ $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$	$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = 0$ $\gamma = \frac{b}{m}$ $\omega^2 = \frac{g}{L}$	$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = \frac{F(t)}{mL}$ $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$
<p>PÉNDULO FÍSICO</p> 	$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \omega^2 \theta = 0$ $\omega^2 = \frac{mgd}{I} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}}$	$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = 0$ $\gamma = \frac{b}{I}$	$\frac{d^2 \theta}{dt^2} + \gamma \frac{d\theta}{dt} + \omega^2 \theta = \frac{\tau(t)}{I}$
	Solución: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$	Solución: $x(t) = A \cdot e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	Solución: $x(t) = X_A + A \sin(\omega t + \varphi)$ Análisis de Resonancia
	Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$	Solución: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	Solución: $\theta(t) = \theta_A + \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ Análisis de Resonancia
	Solución: $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi)$	Solución: $\theta(t) = \theta_0 e^{-\frac{b}{2I}t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$	Solución: $\theta(t) = \theta_A + \theta_0 \sin(\omega t + \varphi)$ Análisis de Resonancia

Figura 5: Protocolo del estudiante E17. Implementación 2

La modelación del sistema real, y la búsqueda de un modelo ajustado a la Piedra, no esta en los libros, ni en la web; y fue propuesto por los investigadores. Dicho modelo corresponde al de un sólido rígido en roto-traslación, y remite al mismo modelo matemático analizado antes por los estudiantes.

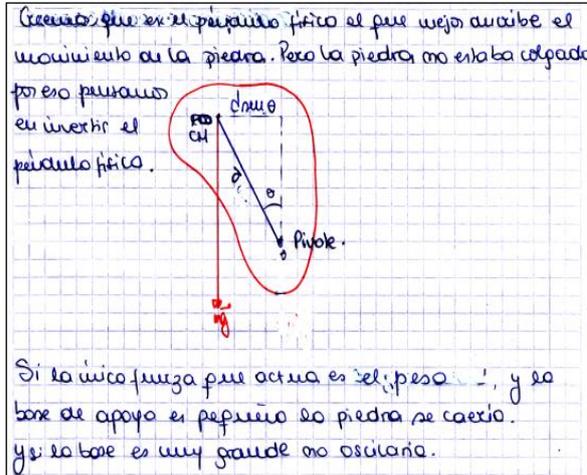


Figura 6. Protocolo correspondiente a EPM21 EPM24

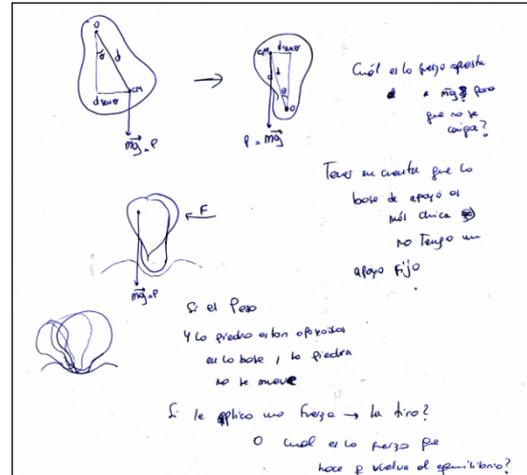


Figura 7. Protocolo correspondiente a EPM24

En esta implementación, se calcularon y estimaron los parámetros de la solución de la ecuación diferencial, estableciendo las unidades de medida para los mismos. El momento de inercia fue tomado del cálculo realizado por ingenieros de la UNCPBA, responsables de realizar la réplica de la Piedra Movediza (Peralta, Ercoli, Godoy, Rivas, Montanaro, Bacchiarello, 2008). Se calculó la amplitud máxima de oscilación, se estimaron valores para el torque externo y se analizan los valores para el amortiguamiento, así como las condiciones de resonancia. Destacamos aquí la utilidad de las planillas de cálculo y del software Geogebra para simular las diferentes posibilidades, y para graficar la familia de funciones con los distintos juegos de parámetros. Este estudio permitió a los EPM establecer una posible respuesta al problema de la caída de la Piedra y justificar la hipótesis inicialmente aceptada.

## 5. Conclusiones

Los resultados muestran la naturaleza de las dificultades de realizar enseñanza por investigación en la formación de profesores de matemática. El principal obstáculo para los EPM es de naturaleza epistémica, y reside en que, de manera implícita, ellos consideran a la matemática como pura. Esta es la visión dominante en la institución que los ha formado, donde la matemática se enseña como incuestionable y transparente, fiel al paradigma monumental. En segundo lugar, y también de naturaleza epistemológica, es la ausencia de la actividad de modelización como propia de la matemática y el hecho de que los EPM, al igual que los estudiantes de la escuela secundaria, no han accedido a un nivel de modelización algebraica funcional que vaya más allá del nivel uno, ya que inicialmente desconocen el juego entre variables y parámetros.

El análisis de los modelos y la modelización funcional alcanzado en la última implementación, justifica la relevancia de tratar de involucrar a los EPM en experiencias que los aproximen al paradigma de investigación en todo su proceso formativo. Esto les permitiría adquirir una concepción epistemológica diferente del saber matemático, y los equiparía mejor para adaptar y gestionar diseños didácticos acordes con la enseñanza por investigación en la escuela secundaria.

## 6. Referencias

- Chappaz, J. & Michon, F. (2003) Il était une fois. La boîte du pâtissier. *Grand N*, 72, 19-32.
- Chevallard, Y. (2007): « Passe et present de la theorie anthropologique du didactique ». Francia. Disponible en : <http://yves.chevallard.free.fr/>. Obtenido el 15 de Febrero de 2016.
- Chevallard, Y. (2013). Analyses praxéologiques: esquisse d'un exemple. IUFM Toulouse, Francia. Disponible en: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Obtenido el 05 de Mayo de 2016.
- Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Llanos, V. C.; Arlego, M. (2016). Co-disciplinary Physics and Mathematics Study and Research Course (SRC) within three study groups: teachers-in-training, secondary school students and researchers. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*. Grece. In press from February 4, 2016.
- Peralta, M. H.; Ercoli, N. L.; Godoy, M. L.; Rivas, I.; Montanaro, M. I.; Bacchiarello, R. (2008). Proyecto estructural de la réplica de la piedra movediza: comportamiento estático y dinámico. *XX Jornadas Argentinas de Ingeniería Estructural*.
- Ruiz, N.; Bosch, M.; Gascón, J. (2007a). La modelización funcional con parámetros en un taller de matemáticas con Wiris. En Ruiz-Higueras, Estepa, García (eds.) *Sociedad, Escuela y Matemáticas. Aportaciones de la TAD*. Universidad de Jaén: Jaén, España.
- Ruiz, N.; Bosch, M.; Gascón, J. (2007b). The functional algebraic modelling at Secondary level. *CERME 5*, pp. 2170-2179.