

## TIPOS DE PRUEBAS PUESTOS EN JUEGO POR UN BINOMIO DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO DE MATEMÁTICA AL CARACTERIZAR FAMILIAS DE POLIEDROS.

Mantica, Ana María; Cruz, María Florencia  
Facultad de Humanidades y Ciencias. Universidad Nacional del Litoral.  
[ma.florenciacruz@gmail.com](mailto:ma.florenciacruz@gmail.com), [ana.mantica@gmail.com](mailto:ana.mantica@gmail.com)

### Resumen

Se presenta el estudio de un caso, en el que se propone una tarea a dos binomios de estudiantes de Profesorado de Matemáticas para caracterizar familias de poliedros de un universo dado. Se implementa una entrevista en la que los alumnos debaten para arribar a una conclusión, se registran las interacciones a través de audio, video y artefactos escritos. Se analiza el modo de validar de uno de los binomios, clasificando las afirmaciones que realizan durante la implementación de la tarea entre pruebas pragmáticas e intelectuales. En general, el binomio que estudiamos en el presente trabajo utiliza pruebas intelectuales, recurriendo a definiciones y propiedades conocidas.

**Palabras claves:** Tipos de pruebas, Poliedros, Futuros profesores

### Abstract

This research presents a case of study, in which we proposed to two binomials of student teachers of mathematics a task to characterize families of polyhedra of a given universe. We implement an interview in which the students have to debate to arrive a conclusion, registering those interactions through audio, video and written artifacts. We analyze how one of the binomials valid, classifying the statements made during the implementation of the task between pragmatic and intellectual proofs. In general, the binomial we studied in this paper uses intellectual proofs, resorting to definitions and known properties.

**Key words:** Kinds of proof – Polyhedral - Future professors -

### 1. Introducción

En este estudio se pretende identificar procesos de validación puestos en juego por dos binomios de estudiantes de profesorado de matemática, en interacción, al caracterizar familias dadas de poliedros sobre un universo determinado. En este trabajo se presenta el análisis de los tipos de prueba utilizados por uno de los binomios. Estos alumnos (entre 20 y 25 años) se encuentran en el tercer año de su carrera universitaria, en la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral, han cursado dos geometrías euclídeas, plana y espacial (GEP y GEE respetivamente). Al momento de implementar la propuesta se encuentran cursando la cátedra taller de geometría, en el que se recuperan y profundizan los contenidos trabajados en GEE y GEP.

### 2. Marco de referencia.

Balacheff (2000) que tomamos como referencia principal para el análisis realiza clasificaciones referidas a tipos de pruebas con estudiantes de entre 11 y 15 años reunidos en binomios. Realiza una distinción entre los términos explicación, prueba, demostración y razonamiento. La explicación no es necesariamente una cadena deductiva, se asienta en los conocimientos de quien lo expone y en sus propias reglas de

decisión de la verdad. La prueba es una explicación reconocida y aceptada por una comunidad, hace referencia a un proceso social pues el discurso que asegura la validez de la proposición deja de ser solo posición del individuo que lo afirma; destaca que la posición no es definitiva puede evolucionar con el avance de los saberes en los que se sostiene, una prueba puede ser aceptada por una comunidad y rechazada por otra. La demostración es un tipo de prueba constituida por una serie de enunciados que se organizan siguiendo un conjunto determinado de reglas definidas en el seno de la comunidad matemática. El razonamiento es una actividad intelectual que tiene por objetivo producir una nueva información a partir de la dada o adquirida. Se considera proceso de validación cuando tenga como fin asegurar la validez de una proposición.

Balacheff (2000) sostiene que los tipos de pruebas que producen los estudiantes son diversos. Considera por un lado pruebas pragmáticas que son prácticas y recurren a la acción real o a la ostensión y por otro lado pruebas intelectuales que son teóricas y la justificación de la actividad se apoya en la formulación de propiedades.

Balacheff (2000) diferencia dos tipos de pruebas pragmáticas:

- empiricismo ingenuo, en el cual se verifica una proposición para cierto número de casos y se establece la conjetura.
- experiencia crucial, se utiliza este término cuando el estudiante verifica una proposición para un caso que considera tan poco particular como le es posible, es decir, reconoce explícitamente el problema de la generalización. Considera también como una acepción de este tipo de prueba lo que propone Bacon, quien sostiene que es una experiencia que permite optar entre dos hipótesis, siendo sólo una verdadera.

Un caso especial es el tipo que llama ejemplo genérico, puede considerarse en la categoría de las pruebas pragmáticas cuando el alumno hace explícitas las razones de verdad de una conjetura mediante operaciones o transformaciones de un ejemplo particular que considera representante de su clase y puede considerarse en la categoría de las pruebas intelectuales cuando el estudiante utiliza un ejemplo como un medio para lograr expresar su prueba.

El autor distingue dos tipos de pruebas intelectuales:

- experiencia mental, en la que se interioriza la acción y se separa de un ejemplo particular, aparece como un medio para fundamentar la solución planteada;
- cálculo sobre enunciados, aparecen cuando el estudiante realiza un cálculo inferencial sobre enunciados, estas prueban no pueden reconocerse verdaderamente como demostraciones.

Balacheff (2000) considera que utilizar situaciones de interacción social tiene como propósito que los alumnos compartan el significado del problema; una situación de interacción y de comunicación permite un acceso eficaz a las concepciones de los estudiantes y los procedimientos que ellos utilizan. El autor sostiene que proponer problemas y copilar las condiciones que se consideran más favorables no es suficiente para que los alumnos lleven a cabo procesos de validación y que ellos dispongan como herramienta de prueba a la demostración no es suficiente para garantizar que la utilicen.

Sadovsky (2005) sostiene que en los momentos que los estudiantes realizan actividad matemática en interacción con pares es necesaria la reflexión de cada una de las resoluciones propuestas por los estudiantes, que puedan producir reflexiones a partir de ellas, que puedan volver hacia atrás, revisar y modificar cuestiones elaboradas, que tomen conciencia de la provisoriedad de sus afirmaciones. Sostiene que si bien es importante el aporte de cada individuo, las decisiones se van conformando a través del

juego de interacciones que se promueven y de las actividades que se priorizan. En estas interacciones cada estudiante expone su posición respecto a la tarea solicitada, los conocimientos puestos en juego, pero también las dudas e incertidumbres. Las interacciones personales de los estudiantes con el problema y con las propuestas de los pares llevan al planteo de nuevas cuestiones y de nuevas formas de validarlo.

### 3. Metodología y diseño de tareas.

En la presente investigación se realiza un estudio de casos, según Stake (2007) es el estudio de la particularidad y de la complejidad de un caso único

La muestra utilizada no es representativa, pues no pretendemos llegar al establecimiento de leyes generales ni ampliar el conocimiento teórico. A partir de los datos obtenidos realizamos el análisis detallado de las actuaciones de los estudiantes. (Cohen y Manion, 1990).

Se implementan entrevistas que se realizan en forma personal, promoviendo una interacción directa entre dos estudiantes y entrevistador. Se trata en las mismas de no presentar preguntas que se respondan con sí o no, dado que se busca conseguir la descripción de un episodio; una explicación. Las entrevistas se ensayan previamente con cuatro estudiantes que aprobaron la materia GEE, siguiendo la metodología propuesta por Stake (2007).

Registramos la información obtenida a través de artefactos escritos y de grabaciones en audio y video, de modo que los audios e imágenes constituyan un insumo de análisis y permitan estimar la fiabilidad del estudio (Cohen y Manion, 1990).

Las entrevistas que presentamos en este trabajo se realizan con cuatro alumnos mientras cursan la cátedra Taller de Geometría, reunidos en binomios, cada uno de ellos constituido por un alumno que ha acreditado la asignatura GEE y otro que no, pero ha finalizado su cursado. La muestra seleccionada es intencional y se toma teniendo en cuenta que las interacciones, entre alumnos en igualdad de condiciones en relación con su conocimiento, permiten la exteriorización de las concepciones, de los proyectos y de la toma de decisiones (Balacheff, 2000). Durante esta instancia los entrevistados disponen para consultar en todo momento el libro de geometría métrica de Puig Adam (1980) y los apuntes de cátedra escritos por los docentes responsables de las geometrías euclídeas del plan de estudio.

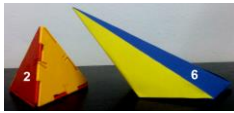
En la implementación de las entrevistas se presentan a los estudiantes cuatro familias de poliedros, cuyo universo son diez poliedros. Para el desarrollo de la propuesta se construyen modelos de dichos poliedros en materiales manipulativos, ocho construidos con Polydron<sup>23</sup>, y dos construidos en cartulina dado que el material utilizado no permite realizar estos poliedros que nos interesa formen parte del universo objeto de clasificación (pirámide y prisma oblicuos).

Las familias que se presentan son las siguientes:

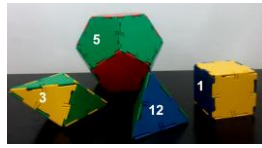
---

<sup>23</sup> Polydron consiste en un conjunto de polígonos realizado en plástico que poseen bisagras para unirse y formar poliedros. Los tipos de polígonos que lo forman son: triángulos equiláteros (dos tamaños), triángulos isósceles acutángulos, triángulos isósceles rectángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos regulares, hexágonos regulares y octógonos regulares

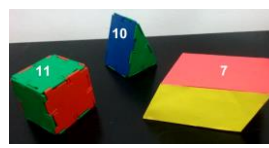
Familia 1



Familia 2



Familia 3



Familia 4



Figura 1: Familias presentadas para la resolución de la tarea

Descripción de los modelos de poliedros que se entregan para resolver la tarea: 1 y 11, cubo; 2 y 12 tetraedro regular; 3 octaedro o antiprisma con caras triángulos isósceles iguales; 4 antiprisma de base pentágono regular y sus caras laterales triángulos equiláteros; 5 dodecaedro regular; 6 pirámide oblicua de base pentágono regular y sus caras laterales son triángulos; 7 prisma oblicuo base trapezoide; 8 tetraedro regular truncado, con caras hexágonos regulares y triángulos equiláteros y en cada vértice concurren dos hexágonos y un triángulo; 9 octaedro regular truncado con caras cuadrados y hexágonos regulares y concurren dos hexágonos y un cuadrado por vértice y 10 prisma recto con base triángulo isósceles y caras laterales dos rectángulos congruentes y un cuadrado.

#### 4. Análisis de lo realizado por el binomio B-V.

Considerando la extensión permitida para el presente trabajo, presentamos un cuadro en el que se sintetiza los tipos de pruebas utilizados por uno de los binomios de estudiantes durante la implementación de la entrevista y el análisis de lo realizado por los mismos, sólo en la familia 1.

Los estudiantes comienzan determinando que la familia está constituida por pirámides, pero consideramos que lo realizan a través de una prueba de tipo empirismo ingenuo, dado que el alumno **B**, afirma que la característica puede atribuirse porque los poliedros *tienen un vértice*<sup>24</sup>, observa un único elemento de la misma, creemos que refiere al vértice no contenido en el plano que contiene la base del poliedro, no observa globalmente el modelo de poliedro. También se destaca que la alumna **V** para determinar la característica considera el poliedro 6 (pirámide oblicua base pentágono regular) en una posición particular (apoyada sobre su base) que le permite identificarlo como pirámide.

*B: Esto es pirámide porque tienen un vértice. No queda otra. Es pirámide regular o irregular. El problema es que acá tenemos otra pirámide (se refiere al tetraedro de la familia 2).*

*V: Si... esto es una pirámide pero oblicua, si lo pones así (pone en posición estereotipada) es una pirámide oblicua.*

Continúan haciendo referencia a la definición de pirámide y sus elementos, recurren al material bibliográfico de la cátedra GEE para determinarlo. Los alumnos en este caso se separan de los modelos de poliedros basándose en un análisis de la definición, de los elementos y de las propiedades, por tanto consideramos que utilizan una prueba de tipo experiencia mental, logrando afirmar que los poliedros que forman esta familia son pirámides, una recta y la otra oblicua.

*B: La altura no es perpendicular a la cara de la base.*

*V: La altura no coincide con el eje, creo que era... de la pirámide*

*B: ¿El eje de simetría?... (Busca los apuntes).*

*V: Buscá pirámide*

<sup>24</sup> De aquí en adelante, se escriben en cursiva las respuestas textuales de los alumnos.

*B: La sección producida en un ánguloide de vértice  $V$  por un plano ( $\alpha$ ) que corta a todas sus aristas sin contener  $V$ , es un polígono que es convexo si el ánguloide lo es.*

No obstante al continuar la discusión los alumnos se apegan al modelo que tienen disponible, utilizando una prueba de tipo ejemplo genérico en la categoría de las pruebas intelectuales, dado que el alumno **B** considera en este momento el modelo de poliedro como un medio para expresar su afirmación, sin tomarlo como un caso particular.

*B: Acá el eje de simetría es este (tetraedro regular), pero si vos haces el eje de simetría en este (pirámide oblicua) esta cara no se transforma en esta... ¿cuál sería el eje de simetría acá?...no tiene...*

Posteriormente retoman el tipo de prueba de experiencia mental, separándose de modelos particulares, validan sus conjeturas a partir de propiedades de poliedros.

*B: Podríamos decir que la altura no pasa por el punto medio de la base...*

*V: Por el centro de la base.*

*B: Por eso no es recto.*

*V: Claro, era recto si el pie de la perpendicular coincide con el centro de la base.*

<i>Familia</i>	<i>Tipo de prueba</i>	<i>Criterios</i>
1	1. Empiricismo Ingenuo	Vértice en el que concurren caras laterales – Posición particular.
	2. Experiencia Mental	Definición de pirámide.
	3. Ejemplo genérico (Intelectual)	Toma el modelo como medio para justificar su afirmación.
	4. Experiencia Mental	Concepto de altura de una pirámide.
2	1. Experiencia crucial	Poliedros regulares – Poliedro 3 no es regular.
	2. Empiricismo Ingenuo	Representaciones físicas de rectas (alabeadas) en la habitación.
	3. Cálculo sobre enunciados	Afirmaciones a partir de teoremas y propiedades, desprendiéndose del modelo, en la búsqueda de probar que el poliedro 3 tiene al menos dos pares de caras contenidas en planos paralelos. <sup>25</sup>
	4. Experiencia Mental	Afirmaciones a partir de propiedades sobre el modelo presentado. <sup>3</sup>
	5. Cálculo sobre enunciados	Afirmaciones a partir de teoremas y propiedades, desprendiéndose del modelo. <sup>3</sup>
3	1. Empiricismo Ingenuo	Observan formas de caras (cuadriláteros) y número de caras que concurren por vértices (tres) de los modelos de poliedros.
	2. Experiencia crucial	B considera que los prismas siempre tienen seis caras, V afirma que el poliedro 10 es un prisma y muestra en el

<sup>25</sup> Las alumnas recurren al material que utilizan en las cátedras de Geometrías intentando realizar una prueba independiente de la experiencia, es decir, tratando de fundamentar sus afirmaciones en definiciones y propiedades conocidas. Consideramos que alternan los tipos de pruebas entre experiencia mental y cálculo sobre enunciados en el intento de probar que el poliedro 3 tiene al menos dos pares de caras contenidas en planos paralelos.

		material bibliográfico imágenes de prismas que no tienen seis caras.
	3.Ejemplo genérico (pragmático)	Determinan que el poliedro 7 es prisma, analizando sobre el modelo en una posición particular que las caras laterales son paralelogramos (el modelo como recurso), según lo establece la definición de prisma.
	4.Experiencia Mental	Analizan la definición de prisma recto, sin hacer referencia a modelos particulares, para determinar que los poliedros 10 y 11 son prismas rectos.
4	1.Empiricismo Ingenuo	Observan las formas de los polígonos que forman las caras del poliedro.
	2.Experiencia mental	Expresan un concepto de poliedros semirregulares <sup>26</sup> (no consideran todas las condiciones que se plantean en las cátedras de geometría), y es acorde la caracterización que determinan. Posteriormente buscan la definición en el material bibliográfico y establecen la característica considerando todas las condiciones que establece la misma.

Tabla uno: Síntesis de los tipos de pruebas utilizadas.

## 5. Algunas reflexiones

Teniendo en cuenta el análisis realizado de lo actuado por el binomio **B-V** al realizar la caracterización de cada una de las cuatro familias presentadas, el cual se sintetiza en el cuadro de la sección anterior, expresamos que logran caracterizar la familia 1 y la familia 3 con el nombre de pirámides y prismas respectivamente, siendo estas familias conocidas por la comunidad matemática y particularmente trabajadas en la cátedra GEE. A la familia 2 no logran caracterizarla, las estudiantes utilizan en momentos pruebas intelectuales, sin embargo se alejan de la problemática original, por no tener en cuenta el objetivo al cual pretenden arribar.

En la caracterización de la familia 4, las estudiantes concluyen que los poliedros son semirregulares, para esto recurren al material bibliográfico haciendo uso de la definición de los mismos.

Una consideración importante, que destacamos es que la interacción permite a los estudiantes avanzar en el tipo de prueba, “el pasaje de lo implícito a lo explícito permite nombrar el conocimiento, hacerlo público y, por ende, modificarlo”. (Chemello y Crippa, 2011, p.75).

Otra consideración a destacar es que a pesar que la demostración matemática es una herramienta que los estudiantes del profesorado de matemática utilizan habitualmente, el binomio analizado no realiza este tipo de demostraciones, si bien emplea pruebas del tipo intelectual.

Pensamos que es interesante, continuar el estudio analizando si en caso que no se pida explícitamente una demostración los futuros profesores de matemática creen necesaria su producción. Si son conscientes que una evidencia basada en una validación empírica y la basada en una demostración no son del mismo orden, dado que la elaboración de demostraciones requiere más que un cierto grado de conocimiento.

## 6. Bibliografía

<sup>26</sup> Se define poliedro semirregular al poliedro convexo que cumple las siguientes condiciones: sus caras son polígonos regulares, de dos o más tipos y sus ángulos poliedros son iguales.

- Balacheff, N. (2000). Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas. Bogotá. Una empresa docente.
- Chemello, G & Crippa, A. (2011). Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En Enseñar matemáticas en la escuela media. (pp. 55-77). Diaz, A. (coord) Editorial Biblos. Buenos Aires
- Cohen, L & Manion, L. (1990). Métodos de investigación educativa. Madrid. La muralla.
- Puig Adam, P. (1980). Curso de Geometría Métrica. Tomo I. Fundamentos. Euler, G. Madrid: Puig Ediciones.
- Sadovsky, P. (2005). Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Stake, R. (2007). Investigación con estudio de casos (Cuarta edición). Madrid: Morata.