# ACTIVIDAD DE ESTUDIO E INVESTIGACIÓN GENERADA A PARTIR DE LA PREGUNTA ¿CÓMO SE CONSTRUYE UN FRACTAL TEÓRICO?

Martin Nadia Belén
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. Facultad de Ciencias Exactas.
mnadiab@gmail.com

**Resumen**

Este trabajo describe el diseño de una posible Actividad de Estudio e Investigación (AEI) para el estudio de fractales en el último año de la escuela secundaria. Se presenta el esquema de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) cuya pregunta generatriz es $Q_0$: *¿Cómo se puede construir un fractal?* La AEI se genera a partir de la pregunta *¿Cómo se construye un fractal teórico?* Y fue implementada durante seis sesiones de clase de Matemática en un curso del último año del nivel secundario con orientación Economía y Gestión, El curso estaba compuesto por 13 estudiantes cuyas edades oscilaban entre 17 y 19 años. Se utiliza como referente teórico la teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999, 2004, 2013). Se presentan conclusiones que describen brevemente algunos resultados de la implementación.

**Palabras claves:** Fractales teóricos, Modelo Praxeológico de Referencia, Actividad de Estudio e Investigación, Escuela Secundaria.

**Abstract**

This work describes the design of a possible Study and Research Activity (SRA) on the study of fractals in the final year of secondary school. A scheme of a Praxeological Reference Model (PRM) whose question is $Q_0$: *how is a fractal made?* is presented. The SRA is generated from the question *how is a theoretical fractal made?* and it was implemented during six Mathematics classes in a group of students attending the final year at a secondary school with an Economics and Management orientation. The group comprised 13 students aged between 17 and 19. The Anthropological Theory of the Didactic (ATD) (Chevallard, 1999, 2004, 2013) was used as a theoretical referent. The conclusions which briefly described some of the results of the implementation are also presented in this work.

## 1. Introducción

La teoría antropológica de lo didáctico (TAD) (Chevallard, 1999) sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. En este marco, se propone enseñar Matemática, y otras disciplinas, dentro de una pedagogía diferente a la tradicional, denominada (Chevallard, 2004) Pedagogía de la Investigación y del Cuestionamiento del Mundo (PICM). Aquí, el modelo tradicional de enseñanza no tiene lugar ya que se propone el estudio de la matemática a partir de preguntas. Preguntas que no se respondan con la simple búsqueda de información sino que sea necesario el estudio de una praxeología o de un conjunto de ellas.
Dentro de este modelo Chevallard (2005) propone dos tipos de dispositivos didácticos como posibles puertas de acceso al estudio funcional de la matemática: las Actividades de Estudio e Investigación (AEI) y los Recorridos de Estudio e Investigación (REI). A

partir de estos dispositivos se propone recuperar el sentido y razón de ser del estudio de la matemática, la cual se ha reducido a estudiar un conjunto de obras muertas, fenómeno que Chevallard (2004) ha denominado monumentalización de saberes.

## 2. Marco teórico: las actividades de estudio e investigación

Un REI se genera a partir de una pregunta generatriz Q cuya respuesta no es conocida de antemano por el sistema didáctico y por lo tanto, debe construirse a medida que se construye y fabrica el medio de estudio de Q. En una AEI, en cambio, las respuestas a construir se conocen previamente por parte del profesor. Esto no implica un detrimento en el estudio de una matemática funcional. Una AEI permite reorganizar el medio de estudio de una pregunta en función de las necesidades de respuestas. Según Chevallard (2007), una AEI o una sucesión de AEI asumen una reorganización del modelo funcional de los momentos del estudio. Chevallard (2013) propone que en la práctica, para cada saber matemático que se ha de enseñar, conviene crear una o varias actividades de estudio e investigación (AEI) que "fuercen" ese saber, en el sentido de que, dada la cultura, el savoir-faire y los recursos matemático-didácticos de los alumnos considerados, el abordaje del problema generados de la AEI conduzca a la clase a encontrar, con una gran probabilidad, los elementos del saber deseado (Chevallard, 2013, p.113). Además, cuestiona sobre los alcances de una o de una seguidilla de AEI y propone considerar la incorporación de un REI como una sucesión orgánica de AEI.

Una enseñanza a partir de una AEI requiere que la organización didáctica posea un cierto número de condiciones relativas a las funciones didácticas, llamadas mesogénesis –construcción del medio M, construido por la clase a partir de las producciones diversas-, topogénesis- el lugar que ocupa el docente y el estudiante- y cronogénesis- referido a la gestión del tiempo-. En este trabajo se propone describir una AEI para abordar el estudio de la organización matemática (OM) Fractales, el cual es un contenido muy nuevo, recientemente introducido en el año 2011 en el diseño curricular de sexto año de Matemática, Ciclo Superior de la Provincia de Buenos Aires.

## 3- Fractales en los programas de estudio. Algunos antecedentes.

Actualmente, se reconocen numerosos campos de aplicación de la geometría fractal, por ejemplo, en física, medicina, geografía, economía, arte, hasta la generación de imágenes cinematográficas, etc. El estudio de fractales permite modelizar diversas estructuras, entre ellas, estructuras de la naturaleza. Las formas que se encuentran en el mundo real poseen una riqueza de detalles, complejidad e irregularidad que no pueden describirse con la Geometría clásica, la Geometría de Euclides.

La enseñanza de los fractales viene preocupando a los investigadores (Comas Roqueta y Herrera Pons, 2010; Moreno-Marín, 2002a, 2002b, 2003) desde cerca de una quincena de años. Los trabajos se enmarcan en propuestas didácticas específicas para la construcción de fractales desde una pedagogía tradicional. La incorporación del estudio de fractales en el diseño curricular del último año de la educación secundaria argentina, situándolos en contextos que muestren su necesidad y justifiquen su uso, permitirían no sólo recuperar un sentido de su estudio, sino también recuperar y relacionar otros saberes a estudiar propuestos en los programas de estudio, no sólo de la Matemática sino también de otras disciplinas. La enseñanza de los fractales posibilitaría mostrar la relación intrínseca entre los avances de la tecnología y los del conocimiento científico: el conocimiento actual de fractales se hizo posible gracias a la aparición de sistemas de procesamiento masivo de información. Un abordaje que genere vínculos entre diferentes nociones del programa, partiendo de la modelización de una estructura real, permitiría objetar la visión de una ciencia matemática acabada y de una enseñanza descontextualizada.

## 4. Metodología

El trabajo que aquí presentamos es parte de una tesis más amplia cuya ingeniería comportó las siguientes fases.
(a) Diseño de un Modelo Praxeológico de Referencia (MPR) a partir de la pregunta ¿Cómo se puede construir un fractal? (b) Diseño de la AEI. Se diseñaron las actividades considerando la institución y el curso seleccionado para llevar a cabo la implementación.
(c) Implementación de la AEI y recolección de datos. Durante la implementación de la AEI en el aula participaron dos investigadoras. Una de las investigadoras fue la profesora que implementó la AEI en carácter de observador participante, mientras que la otra investigadora tomó el rol de observador no participante, realizando registros de clase. Se registró en audio general las seis sesiones de clase que duró la AEI. (d) Descripción del proceso de estudio.

La implementación se realizó en un curso de Matemática del último año del nivel secundario de la orientación Economía y Gestión de una escuela pública que se encuentra en una zona rural, en uno de los mayores cordones de producción frutihortícola de la provincia de Buenos Aires (Argentina). La comunidad tiene un alto índice de analfabetismo, y tanto padres como estudiantes trabajan en las plantaciones. El curso se compone de trece estudiantes (17- 19 años). Los estudiantes se organizaron en grupos de a lo sumo, tres integrantes. Esta AEI se implementó a continuación de otra AEI diseñada a partir de la pregunta *¿Cómo se puede medir un fractal?* e implementada por otra profesora (Farías, 2015).

## 5. Modelo Praxeológico de Referencia (MPR)

El MPR se construyó a partir de la pregunta $Q_0$: ¿Cómo se puede construir un fractal? Dado que esta pregunta no se puede contestar directa ni inmediatamente, se requiere la formulación de otras preguntas derivadas que necesitan responderse a través de la construcción o reconstrucción de diferentes organizaciones matemáticas. Por ejemplo, $Q_0$ puede derivar en las preguntas $Q_{0.1}$: ¿Cómo se puede medir un fractal? o $Q_{0.2}$: ¿Cómo se genera un fractal teórico?, dando lugar al diseño de dos AEI. En particular en este trabajo se describe brevemente la AEI generada a partir de la pregunta ¿Cómo se genera un fractal teórico?

En el Esquema 1 se presenta la pregunta generatriz, sus derivadas y las organizaciones matemáticas puntuales (OMP) que son necesarias para construir la respuesta a las preguntas. Se presenta sólo el esquema del MPR pues la descripción de la construcción de todo el MPR resulta demasiado extensa para este trabajo.

## 6. Diseño e implementación de la AEI

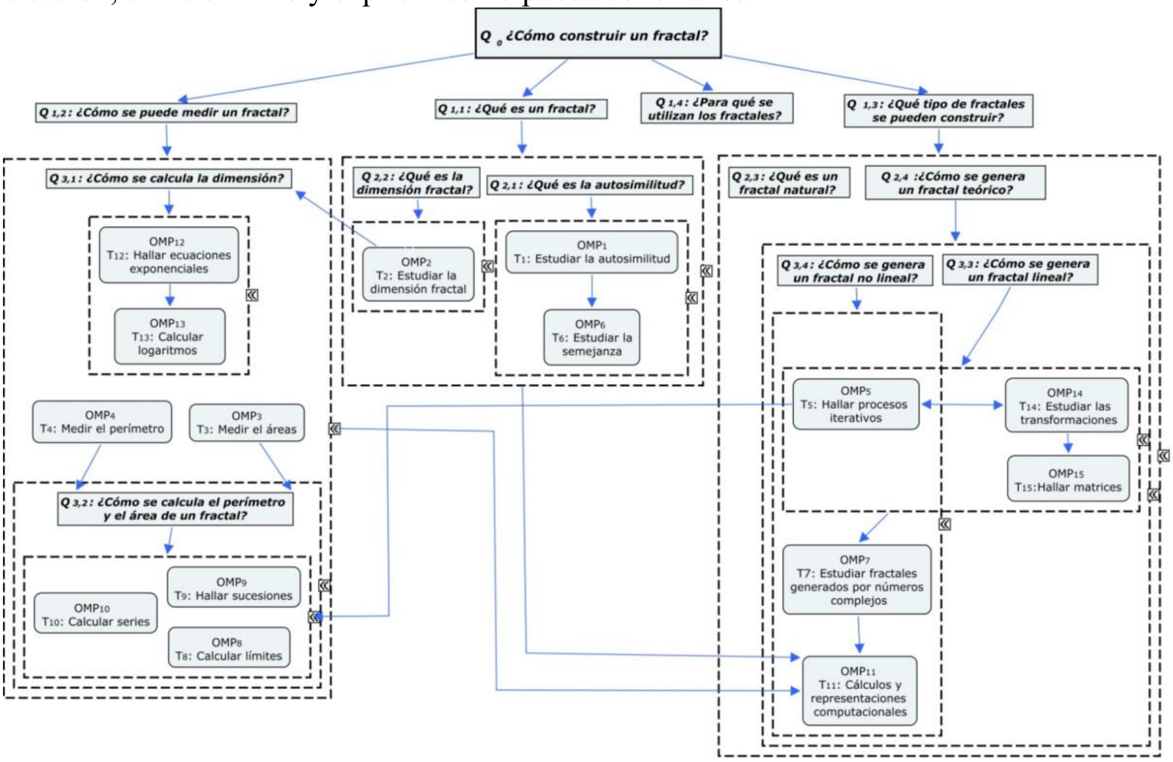
La búsqueda de respuestas a la pregunta $Q_{0.2}$ ¿Cómo se genera un fractal teórico? requiere estudiar diversos tipos de tareas. Por ejemplo, resulta vital estudiar los procesos iterativos, ya que la generación de un fractal teórico, matemático, se define como la repetición constante de un cálculo simple (iteración). De aquí se deriva la pregunta ¿cómo hallar una función iterativa? Y esto conduce a estudiar las técnicas para determinar y/o reconstruir una función iterativa (T2). Este tipo de tareas involucra técnicas y tecnologías que se relacionan con otro tipo de tareas, el de hallar una sucesión (T9). De aquí surgen otros dos tipos de tareas: construir una ecuación exponencial (T12) y estudiar las transformaciones (T14). Estas últimas, pueden incluso plantearse mediante matrices (T15). Este modelo de repetición, permite realizar una aproximación a la gráfica de un fractal, que solo es realizable a través del uso de un software que ejecuta iteraciones de procesos algebraicos que resultan imposibles de llevar a cabo con las herramientas tradicionales, debido a la complejidad, al número de cálculos y el tiempo que requiere esta tarea. Se establece así la relación con cálculos y representaciones computacionales (T11). El software Explorador FF 5.1 es una posibilidad para la construcción del concepto de fractal.

El Conjunto de Mandelbrot (Mandelbrot, 1982) y los Conjuntos de Julia (T5.1) son considerados dos de los fractales matemáticos más conocido. Ambos se generan a partir de una función iterativa sencilla que se genera en el plano bidimensional de los números complejos (T7). A través de la exploración y análisis de la gráfica de estos conjuntos, se desarrolla el estudio de la autosimilitud (T1) y la semejanza (T6), de la dimensión (T2) y el estudio de la longitud del fractal (T4). En el Esquema 2, se presenta la pregunta generatriz de la AEI, los tipos de tareas antes mencionas y las OM correspondientes. A partir de este esquema, se diseñaron las cinco actividades que componen la AEI. No se presenta aquí el detalle de cada una de ellas, pero sí su descripcion general incluyendo los objetivos de cada una ellas.

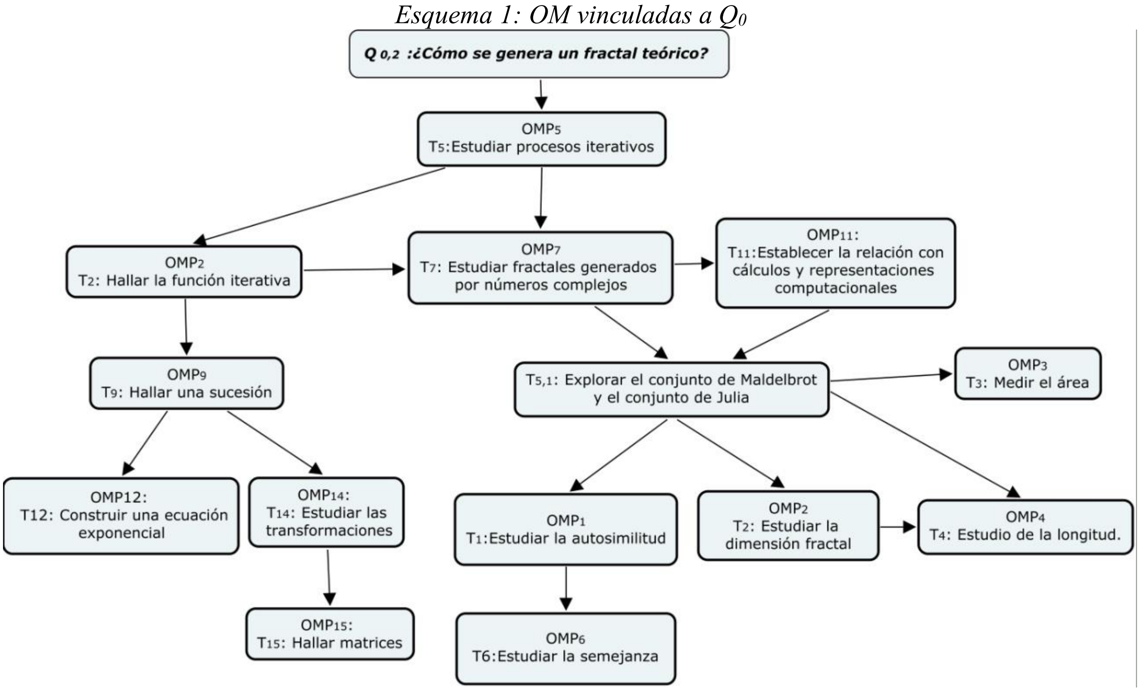
La primera actividad diseñada tiene por objetivo recuperar el estudio del fractal Triángulo de Sierpinski, específicamente, el cálculo de su dimensión. Se propone introducir a los estudiantes en la noción de funciones iterativas a través del proceso de construcción geométrico de un fractal. Esta actividad permitió generar preguntas tales como *¿Qué tipo de fractal es el triángulo de Sierpinski? ¿Qué tipos de fractales existen? ¿Qué tipo de fractales matemáticos existen? ¿El fractal de Lyapunov?* Etc. Estas preguntas permitieron recuperar el estudio de la curva de Koch, su perímetro y área. Se incorporó el uso de una computadora y la búsqueda de información en Internet. Esta búsqueda resultó en los fractales lineales y no lineales, en su representación, generación y la identificación de algunos ejemplos de cada tipo.

La segunda actividad propone abordar la pregunta *¿Qué es el conjunto de Mandelbrot?* Se realizó una búsqueda en Internet de la cual surgieron obras y nociones tales como: números complejos; sucesiones acotadas, divergentes u oscilantes; transformaciones; autosimilitud o autosemejanza y a la definición del conjunto de Mandelbrot a través de la sucesión por recursión en el plano complejo. Se propone una tercera actividad, cuyo objetivo es precisamente que los estudiantes se "encuentren" con la generación de una sucesión por recursión, reemplazando diferentes valores en la función y concluir sobre los diferentes valores que ésta devuelve y su relación con el conjunto de Mandelbrot.

Se propone entonces ampliar la segunda actividad a partir de la exploración de la gráfica del Conjunto de Mandelbrot, concluyendo en la caracterización de una curva "cerrada". Se analiza aquí el cálculo del perímetro y área de una figura cerrada. Surge la pregunta: *¿Cuál es la diferencia entre el conjunto de Mandelbrot y los fractales matemáticos lineales?* Se concluye que el Conjunto de Mandelbrot "es una figura irregular de muchos detalles, con diferentes colores y que es una sola pieza, o sea cerrado o conexo" y que "por ser un conjunto conexo, su perímetro es infinito mientras que su área es finita". Otra propiedad identificada fue la de autosimilitud. El software permitió explorar diferentes gráficas de los Conjuntos de Julia, con la opción aleatoria del programa. Se propuso entonces una cuarta cuyo objetivo es explorar diferentes Conjuntos de Julia introduciendo los diferentes valores de $c$ en el programa. Finalmente, como actividad final, se propuso recuperar la pregunta inicial a partir de una actividad de síntesis que consistía en seleccionar un fractal de los estudiados, justificar su elección, caracterizarlo y explicar cómo puede construirse.




*Esquema 1: OM vinculadas a $Q_0$*




*Esquema 2: OM vinculadas a $Q_{0,2}$*

## 7. Conclusiones

El MPR constituyó la base para el diseño particular de la AEI a partir de una de sus preguntas derivadas ¿Cómo construir un fractal teórico? El diseño de la AEI fue realizada a partir no sólo del MPR sino también, a partir de las necesidades que emergieron del proceso de estudio. El objetivo de la AEI fue hacer encontrar o reencontrar a los estudiantes con conceptos que supone el estudio de fractales teóricos, como la autosimilitud, funciones iterativas complejas o su representación, y las obras asociadas a ellos. Surgió la necesidad de introducir al medio de estudio el uso de software como una herramienta indispensable para representar fractales y para obtener caracterizaciones de casos particulares de ellos.

A pesar de las diferentes restricciones fue posible introducir algunos gestos de la PICM, principalmente con la generación de preguntas para guiar el proceso de estudio. Para continuar esta investigación, se considera importante volver a implementar esta propuesta con mayor tiempo en el calendario escolar, de manera que se puedan profundizar y articular mejor las organizaciones matemáticas.

## 8. Referencias


Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. Journées de didactique comparée 2004, Ecole normale supérieure de Lyon, Lyon, Francia. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2007). Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. En L. Ruiz–Higueras, A. Estepa y F. J. García (Eds.), Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (pp. 705-746). Jaén, España: Universidad de Jaén. Recuperado de http://yves.chevallard.free.fr/

Chevallard, Y. (2013). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. Ciudad Autónoma de Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Comas Roqueta, J. & Herrera Ponz, M. J. (2010). Cálculo de la dimensión fractal del contorno de una ciudad como trabajo de investigación en secundaria. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 65, 23-32.

Farias, R. (2015). Diseño e implementación de una Actividad de Estudio e Investigación a partir de la pregunta ¿Cómo se puede medir un fractal? Tesis de Licenciatura (inédita). UNCPBA, Argentina.

Mandelbrot, B. (1982). La Geometría Fractal de la Naturaleza. Recuperado de: http://www.megaepub.com/autor/benot-mandelbrot.html

Moreno-Marín, J. C. (2002a). Experiencia didáctica en Matemáticas: construir y estudiar fractales. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 40, 91-104.

Moreno-Marín, J. C. (2002b). El juego del caos en la calculadora gráfica: construcción de fractales. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 41, 69-79.

Moreno-Marín, J. C. (2003). Triángulos y tetraedros fractales. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, 44, 13-24.