LA MODELIZACION COMO EXPERIENCIA AULICA

Eduardo Daniel Mónaco
Escuela Nueva Pompeya, Mar del Plata.
edmonaco@gmail.com

Resumen

En este trabajo se presenta una Secuencia Didáctica, que consta de tres actividades, con sus tres momentos respectivos: de apertura, de desarrollo y de cierre. Además muestra cómo fue su implementación en el aula, cuáles fueron algunas de las resoluciones que hicieron los alumnos, cuáles las intervenciones docentes y cómo se realizó el cierre de la clase. Luego se presenta el instrumento de seguimiento y evaluación, donde se priorizan las heurísticas que los alumnos aplicaron y posteriormente cómo se calificó a los estudiantes conforme esta lista.

Palabras clave: Secuencia didáctica, Resoluciones, Instrumento de seguimiento, Intervenciones, Evaluación.

1. Introducción

El presente trabajo forma parte de la planificación anual de 5º año, secuencia didáctica correspondiente a Función Exponencial y Logaritmo, clase desarrollada por alumnos de de la Escuela Nueva Pompeya de Mar del Plata en el mes mayo del año 2015.
Los logaritmos y las funciones exponenciales, aparentemente, no son de uso cotidiano para las personas y, generalmente, se piensa que no son de utilidad dentro de la vida cotidiana. Las actividades propuestas tratan de representar situaciones en las cuales los alumnos recortarán ciertas variables y representarán a través de gráficos y ecuaciones que modelizan lo que esta describiendo el problema para luego poder predecir lo que ocurrirá.
La forma de abordar habitualmente el análisis de funciones y sus aplicaciones, es un tema que se enseña año tras año y se va profundizando a través de la elaboración de tablas de valores para luego realizar su gráfica aproximada, y finalmente el análisis de la misma. Este proceso demanda mucho tiempo, dejando poco espacio para las aplicaciones y reflexiones. El uso de la tecnología se torna necesario para complementar el proceso de enseñanza -aprendizaje, ya que los software instalados en los dispositivos permiten realizar el gráfico rápidamente, dejando tiempo para "probar", "conjeturar", "analizar" y "aprender colaborativamente" siendo estas competencias, hoy indispensables. Es por ello que, después de una serie de actividades diseñadas especialmente para que adquieran los conceptos básicos y utilicen adecuadamente GeoGebra, se propone el trabajo colaborativo y la elaboración de conjeturas en forma grupal, donde puedan mostrar las ideas o conceptos investigados.
Esta experiencia puede resultar significativa y de interés para otros docentes ya que se presentan situaciones que permiten modelizar, y donde el concepto nuevo aparece como necesidad cuando todo lo conocido hasta el momento no ofrece la mejor solución posible.
A partir de la experiencia narrada, se puede concluir que el aprendizaje se constituye como significativo y más efectivo cuando la apropiación del mismo surge de la necesidad individual y colectiva, generando la oportunidad de transferir los aprendizajes a nuevas situaciones.

2. Desarrollo

El propósito de esta propuesta es presentar a los estudiantes diversas experiencias que les genere la necesidad de utilizar diferentes estrategias e instrumentos para que modelicen.
Al finalizar la secuencia aparece un problema donde los conocimientos que se tienen hasta ese momento resultan insuficientes para resolverlo. Aquí el uso de la calculadora es fundamental, sin ella resultaría tedioso poder siquiera aproximarse a una solución. A partir de la resolución de este problema el concepto de logaritmo aparece como necesidad, y no como una imposición disociada de cualquier realidad impuesta por el docente sin ninguna relación aparente con la realidad.
Los alumnos están en conocimiento de cuáles son las distintas funciones, ya trabajaron con la función lineal y la cuadrática. La clase comienza con la propuesta de conformar grupos de 3 o 4 personas y que abran el material en sus computadoras que tienen en la plataforma que utilizamos (edmodo). La consigna de trabajo es que resuelvan el problema presentado a partir del intercambio con sus pares. Intentarán resolver el problema con los conocimientos que tienen disponibles. Se trata que puedan resolver cada pregunta a partir de la respuesta anterior. También deberán presentar, a partir de cualquier recurso a su elección, las producciones que lleven a cabo, acertadas o no, con sus justificaciones.
Para responder la primer consigna, como saben que se comienza con 120 g, una hora después habrá un 25 % más, es decir $120 \cdot 0{,}25 + 120 = 150$ gramos. En el caso de la segunda parten de los 150 gramos, $150 \cdot 0{,}25 + 150 = 182{,}5$ gramos. De la misma manera responden para tres horas.
Durante la actividad se observó que algunos alumnos calcularon los porcentajes utilizando la "regla de tres" y a continuación lo suman a la masa anterior. Aquí se encontraron con la primera dificultad: si las primeras preguntas las contestaron a partir de la anterior, ¿Cómo se podrá calcular cuál será la masa de bacterias luego de t horas? En este momento es en donde se gestiona una puesta en común en la cual los diferentes grupos exponen las distintas estrategias utilizadas para responder a las primeras preguntas. Puede analizarse la equivalencia entre la proporcionalidad directa, la multiplicación por 0,25 y la multiplicación por 1,25 en lugar de hacer dos pasos. Para esta última idea la siguiente tabla ilustra los distintos pasos y las operaciones involucradas y no los resultados.

Tiempo desde que comenzó la experiencia (horas)	0	1	2	t
Masa de bacterias (gramos)	120	120+120.0,25	120.1,25.1,25= $120.1{,}25^2$	$120.1{,}25^t$

Tabla 1: Representación tabular de la primera actividad.

A continuación se les pregunta a los alumnos: ¿Esta fórmula corresponde a alguna de las funciones conocidas hasta el momento (lineal, cuadrática, polinómica)?
Como al realizar el gráfico, según la escala utilizada, la variación es poca, algunos alumnos responden que se trata de una recta, es decir la representación de una función lineal. En la puesta en común, ante la pregunta de cómo sabemos que es lineal sin mirar el gráfico se obtienen dos argumentos para la posibilidad de que sea lineal:

- la variación debe ser constante y aquí no se verifica,
- la fórmula de una función lineal es de la forma $y = m x + b$, lo cual no ocurre.

Quedó escrito en el pizarrón: *"Se define entonces, una nueva función: la función exponencial cuya fórmula tiene la forma* $y = k.a^x$ *"*

"Podemos identificar a la función exponencial como aquella que por cada unidad de la variable independiente aumenta o disminuye un porcentaje constante en la variable dependiente."

Luego se les presentó otros problemas similares pero en los que se apunta a analizar la incidencia de los parámetros en la gráfica. Para ello se modificó el porcentaje de crecimiento y la cantidad de bacterias con las que comienza la observación.

A su vez les plantee el contexto del dinero en plazos fijos que produce situaciones parecidas a las de las bacterias. En la resolución de los distintos problemas los alumnos podrán reinvertir lo que utilizaron en el primer problema. También podrán analizar los diferentes gráficos. Luego de una puesta en común se llega a las siguientes conclusiones que quedaron escritas en el pizarrón:

- *El gráfico corta al eje y en el valor inicial de la observación.*
- *El valor de "a" se obtiene haciendo (100 + el porcentaje):100 > 1.*
- *La función es creciente.*
- *Cuanto mayor es el valor de a, el crecimiento es mayor.*

En la clase siguiente se les indicó que se organicen en grupo, nuevamente abrieron la actividad correspondiente al día de la fecha y comenzaron a trabajar.

Este problema plantea una situación similar pero donde se trabaja con sustancias radiactivas que pierden un porcentaje fijo de masa cada unidad de tiempo. En la puesta en común se exponen las distintas resoluciones de los problemas y se analizan similitudes y diferencias entre las distintas fórmulas y sus gráficos.

Los alumnos identificaron en este momento que las primeras actividades presentaban un porcentaje de aumento y esta última el porcentaje es de decrecimiento con lo cual la función presenta las siguientes características:

- *La función es decreciente.*
- *El valor de a se calcula haciendo (100 – el porcentaje) : 100 < 1*

La siguiente clase trabajan con el graficador, cada alumno lo hizo individualmente pero cotejando y comparando sus resultados con el de los compañeros más cercanos. Algunos alumnos se aventuraron a utilizar valores negativos lo que permite el análisis de las condiciones necesarias para la definición de la función exponencial adentrándonos en el dominio y a las propiedades de la potencia.

Luego de observar que todos han finalizado escribimos las conclusiones en el pizarrón:

• *El dominio de la función exponencial es el intervalo abierto: (− ∞, ∞)*
• *Siempre es creciente si a > 1 y siempre es decreciente si 0 < a< 1.*
• *La función crece más rápido si la base es cada vez mayor y decrece más rápido si la base es cada vez menor.*
• *Si k<0 y a>1 la función es decreciente.*
• *Si k<0 y 0<a<1 la función es creciente.*
• *Es continua.*
• *Si el valor de la base es uno, a se convierte en la función constante f (x) =1, representada por una recta paralela al eje x, a una unidad de distancia.*

En la cuarta clase aparece un nuevo recurso a partir de una necesidad.

Nuevamente los alumnos se disponen en grupos. Para responder al primer problema se plantea $2^t = 1024$, los alumnos probaron hasta hallar la solución pero ellos mismos reclaman alguna herramienta que les permita resolver este tipo de ecuación de manera más eficaz.

En el segundo problema se plantea $1,3^t = 1024$ aquí ya se resisten totalmente a probar con lo cual surgen los logaritmos como una necesidad para resolver este tipo de cuestiones.
Surgió el siguiente diálogo:

Alumno: "En el primer caso, después de probar algunas veces con la calculadora, cuando t=10 obtenemos la solución, pero en el segundo cuando t=26 nos da 917.73, y si t=27 da 1192,5, entonces no tiene solución".

Profesor: "Lo que no tiene es solución entera, ¿por qué no prueban con números decimales?"
Alumno: "Fuimos probando, primero con 26.5, nos pasamos, y con 26.4 nos quedamos cortos, entonces tampoco tiene solución decimal"

Profesor: "Recuerden que entre dos números decimales existen infinitos números"

Alumno:"Seguimos probando hasta con cinco decimales, nos vamos acercando cada vez más, pero no llegamos al resultados, estamos cada vez más cerca, esto no se termina nunca"
Luego de llegar entre todos a la conclusión que, para resolver este tipo de situaciones, las herramientas que tienen disponibles no alcanzan para resolver el problema de la manera más precisa posible, definimos una nueva operación que nos facilita el cálculo de algunas ecuaciones:

*"El **logaritmo** de un número, en una base de logaritmo determinada, es el exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número*".
En la clase siguiente, los alumnos recibieron en la plataforma los criterios y resultados obtenidos durante las clases previas.

3. Evaluación de la secuencia

El instrumento de evaluación fue una lista de cotejo donde se enuncian las competencias heurísticas como los contenidos conceptuales y procedimentales trabajados.
Este dispositivo se constituye al mismo tiempo en un instrumento de autoevaluación para el docente, ya que le permite analizar y revisar las diferentes etapas del proceso enseñanza y aprendizaje:

a- Construcción y elaboración.
b- Ejercitación.
c- Aplicación.

Tabla 2: Rúbrica que indica los criterios a evaluar.

ELEMENTOS	E1	E2	E3	E4

Interpreta el problema				
Modeliza				
Realiza las construcciones				
Realiza un tabla				
Interpretar la relación				
Responde correctamente al problema				
Plantea la situación de diversas formas				
Busca regularidades				
Cuestiona sus producciones				
Explica los procedimientos utilizados				
Maneja distintos lenguajes				
Utiliza variados procedimientos				
Argumenta				
Uso de herramientas y recursos				
Incorpora nuevos conocimientos				
Generaliza- deduce				

Finalmente, se construyó un dispositivo similar que permitió clasificar a los estudiantes en función de los procesos y logros adquiridos.

Tabla 3: Rúbrica que indica el resultado de la evaluación.

EXPERTO	Modeliza. Responde correctamente al problema. Plantea la situación de diversas formas. Generaliza, deduce. (8 alumnos)
INTERMEDIO	Realiza una tabla. Busca regularidades Cuestiona sus producciones. Maneja distintos lenguajes. Interpreta la relación. Explica los procedimientos utilizados. (12 alumnos)
ELEMENTAL	Interpreta el problema. Realiza las construcciones. Uso de herramientas y recursos. Incorpora nuevos conocimientos. (4 alumnos)

4. Conclusiones

Esta forma de presentar el modelo exponencial, permite distinguir propiedades que de otra manera permanecen ocultas. La forma tradicional de comenzar por el gráfico de funciones exponenciales, no pone en jugo las propiedades modelizadoras de las mismas. Además los logaritmos aparecen como una necesidad de cálculo y no como una operación aislada que se utiliza en ciertas ecuaciones también descontextualizadas.
No se trata necesariamente de cambiar los contenidos, sino de renovar las estrategias para abordarlos, acorde a este contexto actual. La sencillez del GeoGebra, los movimientos a que son sujetos los objetos libres y las validaciones que pueden obtenerse a través de ese dinamismo, resultaron altamente valiosos para motivar a los jóvenes ante una actividad de aprendizaje y sostenerla hasta poder expresar las

conclusiones a las que pudieron arribar en forma autónoma; con carácter individual, colaborativo y/o guiado.
Renovar las actividades, permitir el protagonismo, preguntar, jugar, conjeturar, ensayar y validar, cambiar los espacios; fomentar el trabajo colaborativo y creativo ayudan a mantener el interés y mejorar la atención. La "presencia" de las TIC en el aula - y específicamente del GeoGebra en este caso- implica la visión de alumnos "involucrados" en la resolución de situaciones, con una dinámica de trabajo sostenida en el tiempo, lo que implica cambios en las prácticas de enseñanza- aprendizaje, habilitan instancias de producción de conocimientos autónomos y colaborativos, agilizando los tiempos, fomentando aspectos comunicativos y aprendizajes colaborativos.

6. Referencias

Altman, S., Comparatore, C., Kurzrok, L. (2007). *Un abordaje para el modelo exponencial*. Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales- 18-19 de octubre de 2007.
Marino, T., y Rodríguez, M. (2009). *Un estudio exploratorio sobre heurísticas en estudiantes de un curso de matemática de nivel pre-universitario.* Paradigma, XXX (2), 159-178.
Prevero, R. (2013). *Teorema de Pitágoras y último Teorema de Fermat. Secuencia Didáctica.* Enseñar con TIC Matemática II. Especialización docente de nivel superior en educación y TIC. Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación.
Rodríguez, M. (2012). *Educación Matemática. Aportes desde distintos enfoques teóricos. Resolución de Problemas*. Bs As: EDUVIM y Ediciones ENGS. 153- 174.

Anexo

<u>Actividad 1:</u> La masa de una población de bacterias aumenta un 25 % por hora. En un determinado momento se colocan 120 g de bacterias en una cubeta. ¿Cuántos gramos de bacterias habrá al cabo de 1 hora? ¿Y de 2 horas? ¿Y de 3 horas? ¿Y de t horas?
Representen gráficamente la masa total de bacterias en función del tiempo.
<u>Actividad 2:</u> Las sustancias radiactivas tienen la propiedad de desintegrarse al emitir espontáneamente partículas alfa, electrones y rayos gamma, por lo cual pierden masa a medida que pasa el tiempo. En un laboratorio se hace una observación de una sustancia radiactiva que pierde el 2,5% de su masa cada día. En un principio la masa de dicha sustancia es de 3kg. ¿Cuál será la masa de dicha sustancia luego de 1 semana? ¿Y 30 días después? ¿Y de 1 año? Escriban una fórmula que permita calcular la masa de esta sustancia en función del tiempo. Grafiquen la función hallada.
<u>Actividad 3:</u> Utilizando GeoGebra, grafiquen y saquen conclusiones respecto a las modificaciones del gráfico en función de los parámetros involucrados. Es decir qué características presentan las funciones de la forma $f(x) = k.a^x$ cuando cambian los valores de k y a.
<u>Actividad 4:</u> a) Una población de bacterias aumenta el 100% cada hora. Se coloca en este momento1 bacteria en una cubeta. ¿Cuánto tiempo tendrá que pasar para que haya 1024 bacterias?
b) El mismo planteo anterior pero si la población aumenta un 30% cada hora. (Se recomienda el uso de la calculadora)