

UN CASO DE ANÁLISIS DE ESPACIO DE TRABAJO MATEMÁTICO DE REFERENCIA

Andrea Pizarro Canales y Gonzalo Soto Cárdenas
andrea.pizarro@ucv.cl, gonzalo.soto.cadenas.@gmail.com
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Modalidad CB

Básico-Preparatorio

Investigación en educación Matemática

Espacio de Trabajo Matemático, circulación, génesis, geometría.

Este trabajo nos muestra parte de los resultados del estudio del Espacio de Trabajo matemático (ETM) de referencia de Chile, para quinto básico en torno a los triángulos. En nuestro país, a partir del año 2012, existe un nuevo Marco Curricular, decreto que informa los objetivos de aprendizajes (OA) que se deben abordar en cada curso. A partir de ellos se elaboran los programas de estudio.

Este trabajo se centra en el análisis de uno de los OA y una de las actividades sugeridas para su tratamiento. Se ha utilizado el marco teórico de ETM para comparar los potenciales componentes, génesis y planos movilizados por el OA y la actividad.

Los resultados indican que el OA presenta una circulación que moviliza todos los componentes teóricos y cognitivos del modelo, y que la actividad despliega una secuencia de cuatro circulaciones. Estos análisis nos muestran por un lado, los distintos paradigmas de las propuestas y por otro lado se evidencian que existen distintos enfoques para la elaboración del ETM de referencia.

A partir de la década de los noventa en Chile se inicia una reforma educacional que focaliza y declara como eje central el desarrollo de habilidades, conocimientos y actitudes, evidenciándose en la formulación de Objetivos de Aprendizaje (OA)

Son objetivos que definen los aprendizajes terminales esperables para una asignatura determinada para cada año escolar. Los Objetivos de Aprendizaje se refieren a habilidades, actitudes y conocimientos que buscan favorecer el desarrollo integral de los estudiantes... se busca contribuir a la formación integral del estudiante desde cada una de las áreas de aprendizaje involucradas. (Mineduc, p.22, 2012)

Este trabajo analiza comparativamente un OA específico (18) correspondiente al Marco Curricular, con actividades genéricas sugeridas del Programa de Estudio para el desarrollo del OA seleccionado en el nivel de quinto de preparatoria. Se consideran los elementos anteriores ya que se constituyen como los lineamientos básicos mínimos para la acción docente en la enseñanza de la matemática, y que son las bases para el trabajo que cada profesor desempeña en el aula.

Marco de Referencia

Esta investigación considera como enfoque teórico el Espacio de Trabajo Matemático (ETM) desarrollado por Kuzniak (2011) que amplía la noción del Espacio de Trabajo Geométrico (ETG) creado por Houdement y Kuzniak, (1999,2006).

El ETM se define como un ambiente organizado para permitir el trabajo de las personas que resuelven tareas matemáticas. Corresponde a un proceso complejo y progresivo en el que se articulan todos los elementos matemáticos para el desarrollo del pensamiento. Es decir, son todos los elementos que, desde el punto de vista didáctico, se movilizan con el fin de facilitar el trabajo del individuo en la resolución de situaciones problemáticas. Existen tres tipos de ETM: ETM personal, ETM idóneo y ETM de referencia. Este último diseñado por cada institución educativa de cada país, en nuestro caso el Ministerio de Educación.

Para organizar el estudio del concepto de Espacio de Trabajo matemático se reconocen seis componentes (ver figura 1, presentada más adelante) organizados en dos niveles o planos horizontales no jerarquizados: uno de naturaleza epistemológica y otro de naturaleza cognitiva. El primero, tiene relación con los contenidos matemáticos del ámbito estudiado, donde se sitúan el espacio real y local que corresponde a una cualidad material que está en representación de algo. Los artefactos emergen como objetos destinados a dar sustento a la actividad matemática en la ejecución de un cierto tipo de tarea (material o simbólico); y el sistema referencial teórico está constituido por definiciones, propiedades y relaciones.

El segundo plano, de naturaleza cognitiva, se refiere al pensamiento del sujeto quien resuelve tareas matemáticas (Kuzniak y Richard, 2014), donde se ubican el proceso de visualización (Duval, 2004), es decir, la conexión entre lo que se percibe y la imagen construida mentalmente. La construcción como proceso orientado por el uso de herramientas materiales (regla, compás, software...) y/o conceptuales (construir, medir, contar...) (Anastasiadis y

Nikolantonakis, 2016), para elaborar una representación, y la prueba como el proceso donde se generan argumentaciones para la resolución de la tarea. Existen dos tipos de pruebas: las pragmáticas, que requieren de la acción sobre los objetos para justificar afirmaciones y las intelectuales, que recurren a la formulación de propiedades y relaciones entre los objetos en cuestión. (Balacheff, 2000).

A las relaciones bidireccionales entre los componentes de ambos planos horizontales, Kuzniak (2011) señala el surgimiento de las génesis Instrumental [Ins], Semiótica [Sem] y Discursiva [Dis]. Además, plantea el surgimiento de tres planos verticales, [Sem-Ins], [Ins-Dis], [Sem-Dis] según las génesis que los delimitan, como muestra la figura 1 y se especifica en la tabla 1, presentada más adelante.

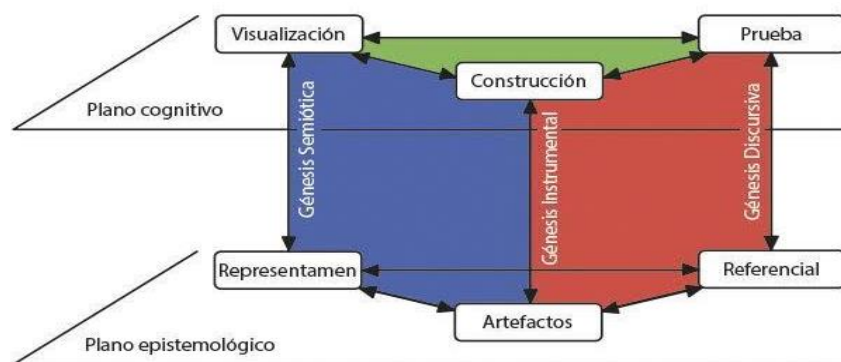


Figura 1: Diagrama General del Espacio de Trabajo Matemático Fuente:(Kuzniak, 2014)

Kuzniak y Nechache (2015) plantean que para que el trabajo geométrico sea considerado completo, debe existir una circulación a través de los tres planos verticales previamente mencionados. Se considera *Circulación* a la movilización interna del ETM en una tarea matemática, es decir, la articulación de los componentes y los procesos. Por lo tanto para llevar a cabo los análisis de la tarea seleccionada, la teoría presenta la siguiente simbología para representar por medio de diagramaciones las circulaciones del ETM.

Símbolo		Significado
Plano [Sem-Ins]		Implica la Circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis Semiótica e Instrumental.

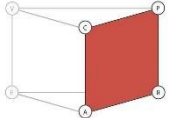
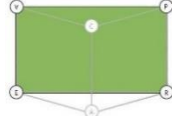
Plano [Ins-Dis]		Implica la Circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis Instrumental y Discursiva.
Plano [Sem-Dis]		Implica la Circulación completa de los elementos y procesos asociados a la génesis Semiótica y Discursiva.

Tabla 1: Simbología diagramación de las circulaciones en el ETM Kuzniak y Nechache (2015)

Cabe señalar entonces, que dada las características del modelo ETM, se utilizarán estos mismos elementos teóricos, como unidades de análisis para la caracterización del ETM_g para el OA 18 y la actividad vinculada a este OA.

Análisis del Espacio de Trabajo Matemático del OA 18 de quinto de preparatoria.

Se ha seleccionado el OA 18 que corresponde al primer objetivo de aprendizaje que trabaja el concepto de triángulo de manera formal para el área de geometría, el cual declara: “Demostrar que comprenden el concepto de congruencia, usando la traslación, la reflexión y la rotación en cuadrículas y mediante software geométrico” (Mineduc, 2013, p.91).

A continuación, se presentan algunos extractos del OA 18 para ejemplificar los planos encontrados:

1) Está presente el plano [ins-dis], ya que, “Demostrar que comprenden el concepto de congruencia...”, implica la existencia del proceso de argumentación a partir del verbo “demostrar” que para este caso corresponde a constatar, estando presente por lo tanto, la génesis discursiva. Por otro lado, el uso de “... la reflexión, traslación y rotación...” dan cuenta de la construcción en cuadrículas y software geométrico, es decir, el uso de estos artefactos constituyen la génesis instrumental.

2) “Demostrar que comprenden...” permite dar cuenta del plano [sem-dis], ya que esto implica que los estudiantes deben argumentar, lo cual permite identificar la génesis discursiva; y las congruencias de triángulos constituyen la génesis semiótica.

3) El plano [sem-ins], se evidencia por medio de “...la traslación, la reflexión y la rotación en cuadrículas y mediante software geométrico”, de lo que se desprende que tendrá que construir las transformaciones isométricas.

De lo anterior se evidencia que existe una potencial circulación completa del objetivo de aprendizaje 18. Ya que identificamos los siguientes planos: a) semiótico-instrumental [sem-ins], b) instrumental discursivo [ins-dis] y c) semiótico discursivo [sem-dis] y por lo tanto los planos cognitivo y epistemológico están presentes. Esto se expresa en el siguiente diagrama 1:

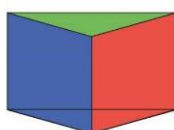
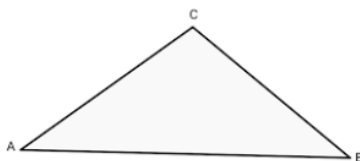


Diagrama 1

Análisis de la actividad de triángulos propuesta para el OA 18

Este objetivo tiene sólo una actividad vinculada al tratamiento de los triángulos, la cual está dividida en tres tareas declaradas, sin embargo, son cuatro las tareas que hay que realizar. A continuación, se muestra la actividad 1: (Mineduc, p. 97,2013)

Actividad 1: Comprueban congruencia de lados en triángulos trasladados. Por ejemplo, en el triángulo de vértices A, B y C dibujado en una cuadrícula



Trasladan el triángulo 4 unidades a la derecha y dos unidades hacia arriba

- a) Llaman A', B' y C' a los vértices trasladados
- b) Completan en los triángulos ABC y A'B'C':

- 1) La medida de los lados AB y A'B' es
- 2) La medida de los lados BC y B'C' es
- 3) La medida de los lados AC y A'C' es

Contestan la siguiente pregunta:

- c) ¿Qué concluye respecto de la longitud de los lados de los triángulos ABC y A'B'C'?

Esta actividad presenta cuatro circulaciones distintas. La primera se extrae de la consigna, la cual solicita trasladar el triángulo ABC y donde se identifican los siguientes componentes: el espacio real y local corresponde al registro figural de triángulos en la cuadrícula, visualizándose la traslación del triángulo, el artefacto puede ser la cuadrícula y cualquier herramienta de dibujo, para la construcción del triángulo trasladado, y el referencial es la traslación.

Como se describe previamente, el trabajo de las traslaciones se realiza a partir de cuadrículas, por lo que los artefactos funcionan como herramientas para la construcción del triángulo trasladado, presentándose simultáneamente la génesis semiótica y la génesis instrumental.

En el siguiente cuadro se presenta la potencialidad referida a la secuencia de cada tarea y la circulación de la actividad completa:

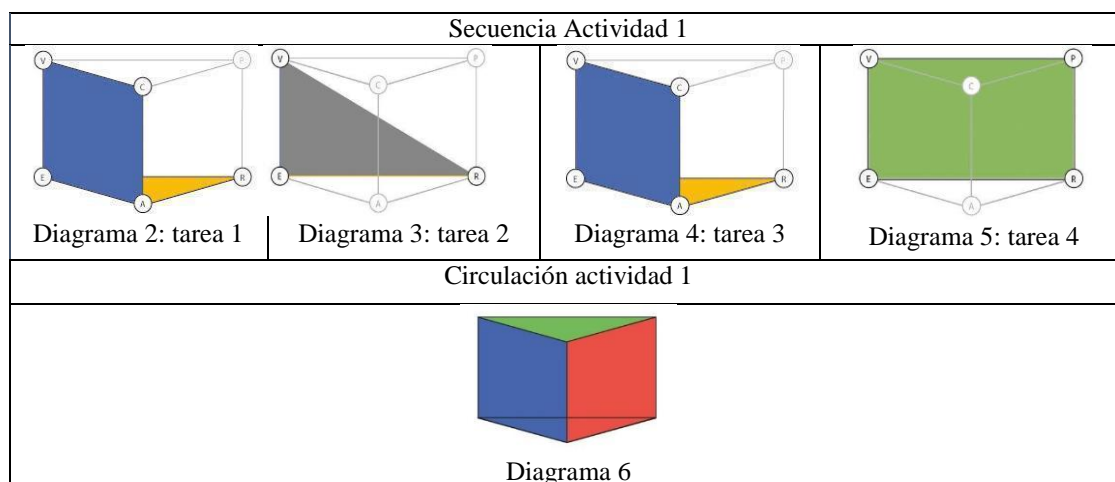


Tabla 2: secuencia de las circulaciones presentes para actividad 1 en el OA 18

Así, la circulación de los componentes (diagrama 2, de la tabla 2) moviliza de manera simultánea el plano epistemológico y el plano [Sem-Ins].

Para la tarea dos, luego de realizar la traslación, en el punto a) se solicita nombrar los vértices del nuevo triángulo, el cual conforma el espacio real y local junto a la visualización de éste,

en donde el referencial cambia al concepto de traslación. Al solicitar únicamente nombrar los vértices, se identifica el semiplano semiótico-referencial (diagrama 3), dado por la génesis semiótica asociada a la representación de los vértices del triángulo $A'B'C'$.

Nombrados los vértices en la tarea 3, los estudiantes deberían medir las longitudes de los segmentos de cada triángulo. Por lo tanto se repiten los componentes y la circulación para los puntos 1), 2) y 3) (que en este caso corresponde a la tarea tres. Así se observa la presencia de la génesis semiótica, identificando al triángulo ABC y su trasladado $A'B'C'$ en la cuadrícula como el espacio real y local, y la visualización asociada a la medida de los lados de los triángulos. Por otro lado, la génesis instrumental aparece por medio del uso de una herramienta de medición para el proceso de construcción, asociado al referencial correspondiente a la medición de segmentos. De lo anterior, en el diagrama 4 se observan los planos semiótico - instrumental y el plano epistemológico.

Por último, para la tarea cuatro (el punto c) se solicita a los estudiantes que concluyan a partir de la longitud de los lados de ambos triángulos, siendo posible identificar la génesis instrumental, donde los triángulos dibujados en la cuadrícula conforman el espacio real y local, visualizando la congruencia de los lados. Finalmente se observa que la génesis discursiva está dada por el referencial, es decir, congruencia de lados de triángulos y la prueba por medio de la argumentación de la congruencia de los lados de los triángulos.

Dado lo anterior es posible observar (diagrama 5) la presencia del plano semiótico-discursivo, ya que en esta última instancia no se presenta el proceso de construcción. Por lo tanto, en relación al punto b) la tarea cambia de la movilización de la génesis instrumental a la génesis discursiva.

De lo anterior se desprende que, durante la realización de cada uno de los puntos de la actividad 1, se activan los distintos componentes, que al considerarlos en su totalidad logran una circulación completa del ETM_g , presente en el diagrama 6.

Conclusión:

Si relacionamos el OA 18 con la secuencia de tareas, se observa que en ambos casos existe una circulación completa. No obstante, el referencial abordado por el OA 18 (congruencia de triángulos) no es el que se desarrolla en la actividad 1. Primero, porque de las cuatro

circulaciones presentes, solo en el en el punto c) se aborda la congruencia. Y segundo porque se trabaja únicamente el concepto de congruencia de segmentos. Esto se debe principalmente al tipo de pregunta presentada en esta actividad específicamente en el punto c), donde se pide concluir en relación a la medida de las longitudes de los segmentos. Por consiguiente, el trabajo entre lo que declara el OA y lo que se realiza en la actividad apunta al trabajo de congruencia de dos objetos distintos, lo cual podría significar un obstáculo en cuanto a la transposición didáctica y por ende al tratamiento que el docente pueda realizar dentro de las aulas chilenas.

Por otro lado, la naturaleza de la demostración presentada en el OA 18 está restringida a generar argumentaciones basadas en la experiencia del estudiante sobre la acción en el objeto matemático, es decir, una prueba pragmática.

Referencias

- Anastasiadis, M. y Nikolantonakis K. (2016). The mathematical working space in the case of area and perimeter: Concepts' definitions and measurement- calculation processes. Quinto simposio ETM Espacio de Trabajo Matemático. Grecia.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. <https://www.hal.archives-ouvertes.fr/hal-00520133> Consultado 14/08/2015.
- Duval, R. (2005). Les conditions cognitives de l'apprentissage de la géométrie Annales de Didactique et de sciences cognitives. 10, 5-54.

- Houdement, C. y Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 11, 175-193. IREM de Strasbourg.
- Houdement, C. y Kuzniak, A. (1999). Géométrie et paradigmes géométriques. *Petit x*. 51, p. 5-21. IREM de Grenoble.
- Kuzniak, A. y Nechache, A. (2015). *Using the geometric working spaces in order to plan the teaching of geometry*. http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/~kuzniak/publi/ETM_FR/Cerme.pdf Consultado 21/04/2016.
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014) *Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas*. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. Tomo 1. p.5-15
- Kuzniak, A. (2011). L'espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. 16, p. 9-24.
- Ministerio de Educación (2012). *Bases Curriculares Educación Básica*. Santiago. Chile
- Ministerio de Educación (2013). *Matemática: Programa de Estudio Quinto Año Básico*. Santiago. Chile.