CB-1404

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL ÁLGEBRA ESCOLAR, EL CÁLCULO DIFERENCIAL Y EL CASO DEL LÍMITE

Gloria Inés Neira|Sanabria
gneira@udistrital.edu.co; nicolauval@yahoo.es
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Autónoma de Colombia
Bogotá, Colombia

Núcleo Temático: Formación del Profesorado
Modalidad: CB
Nivel: 5
Palabras Clave: álgebra, cálculo, límite, función

Resumen:

Al iniciar los cursos de cálculo, se debe concebir la función como un objeto, como una entidad sujeta a las operaciones que otros procedimientos efectúen sobre ella, cuando lo que se concebía en cursos de álgebra, por ejemplo, era una noción de función presentada como un procedimiento aplicado a ciertos objetos llamados números; ahora ese mismo concepto, deviene en objeto al ser operado bajo otros procesos como el límite, la continuidad, la diferenciación…, es decir, se convierte en el objeto sobre el cual se predica; no en vano se considera concepto fundamental de la llamada matemática moderna. Cuando el pensamiento numérico estático se combina con el pensamiento variacional, los términos aún reflejan los procesos de cálculo aritmético y no se han objetivado como transformaciones de un sistema analítico. Abordaremos en este escrito si el álgebra de octavo y noveno grados es solo aritmética genérica o generalizada sin pretensiones adicionales, o si las tiene, qué es lo que pretende.

Introducción:

El análisis del comportamiento de las funciones es uno de los rasgos que caracterizan al pensamiento variacional. Para que los alumnos logren un acercamiento a esta forma de pensamiento es necesario que enriquezcan la idea algebraica de función como correspondencia entre dos valores, y que comiencen a visualizar una situación dinámica. Según Cantoral y Farfán (2000), sabiendo que el significado y el sentido acerca de la variación se establecen a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios son los referidos a fenómenos de variación y cambio, se propicia el desarrollo de acercamientos

ISBN 978-84-945722-3-4

didácticos que favorezcan la construcción de significados, tanto de los conceptos como de los procesos, basados siempre en ideas variacionales.

La propuesta básica que plantean es, para el nivel que corresponda, el desarrollo de los contenidos del currículo relacionados con las variables, las funciones y el cálculo desde un enfoque variacional, considerando el estudio de la variación como una especie de eje rector del que se desprenda el contenido temático. A través de experiencias con profesores en servicio en la educación media y superior y con sus estudiantes, Cantoral, Farfán y sus co-investigadores han constatado que, en caso de que se logren incorporar elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, los estudiantes suele manejar la función no sólo como objeto, lo que ya es un gran logro, sino que además pueden transitar entre los contextos algebraico, geométrico, numérico, icónico y verbal con cierta versatilidad; en otras palabras, en caso de tener un dominio del contexto geométrico/visual tanto en la algoritmia, la intuición, así como en la argumentación, se hará más posible entonces el tránsito entre las diversas representaciones

Desarrollo:

Para la transformación sintáctica de expresiones a lápiz es más sencilla y rápida la notación del álgebra escolar con variables uniliterales y omisión de los símbolos de multiplicación y elevación a potencias. ¿Cuándo y para qué se empieza a utilizar la transformación sintáctica de expresiones algebraicas? Ahí es muy clara la importancia de pensar en la conversión y en el tratamiento según Raymond Duval (1992): primero se hace la conversión del registro verbal natural al registro algebraico escolar, y luego, un tratamiento de la representación semiótica algebraica internamente en el registro algebraico escolar. En el tratamiento de una representación algebraica no se necesita pensar en lo que representa, sino pensar en las reglas y en sus restricciones para no equivocarse. Solo al final se vuelve a hacer una conversión al lenguaje natural.

Se consideran el álgebra y el cálculo como dos sistemas conceptuales diferentes, con registros semióticos para diferentes sistemas: diferente semántica, sintaxis casi igual. Como se señaló arriba, una diferencia en la sintaxis del cálculo (pero no del álgebra) es el uso del redondelito de la función compuesta. Una diferencia en la semántica es la interpretación de la x como

ISBN 978-84-945722-3-4

función idéntica, que ciertamente no es del álgebra, dominio simbólico escolar que sirve para representar regularidades que se repiten en patrones y que se asocia con el pensamiento variacional, categorizado para sistemas algebraicos y analíticos. En el cálculo los tópicos más importantes que se suelen estudiar son el de razón o tasa de cambio, los límites, las derivadas, la continuidad, las integrales, nociones que giran alrededor del concepto de límite.

Desde nuestro punto de vista, el caso del área y del perímetro del círculo en los primeros grados de básica secundaria son ya casos del límite como proceso, aunque no estén aún axiomatizados o formalizados a la manera de Weierstrass. El obstáculo es la formalización: ¿por qué se pone valor absoluto y no se dice explícitamente que "x es distinto de x_o y que está en una vecindad de longitud dos delta (2δ) alrededor de x_o"? Puede ser mucho más claro decir esto que decirle al estudiante algo así como "cero es menor que equis menos equis-sub-cero valor absoluto es menor que delta" y escribir:

"$0 < |x - x_o| < \delta$".

Se está poniendo el obstáculo en donde no es: en tratar de resumir dos desigualdades en una sola, suponiendo que el estudiante sí es consciente de que x_o puede ser cualquier número positivo o negativo, pero fijo, y que x es ahora variable, pero dentro de esa "vecindad perforada". ¿Podemos suponerlo?

Desde este marco conceptual, así como la longitud de la circunferencia, el área del círculo y otros problemas de cuadratura involucran ya el concepto de límite en el sentido que se quisiera lo manejara el estudiante de cálculo. Lo mismo puede decirse respecto a los decimales infinitos: ¿será que 0,9 periódico es igual a 1 o diferente de 1? Ahí está presente el concepto de límite como nosotros lo vamos a entender : sin absolutamente ninguna preparación sobre sucesiones, series, límites y desigualdades, sin construcción de los números reales ni conciencia de su completitud, etc.

Para caracterizar lo que llamamos *"el caso del límite"*, es necesario citar la aproximación geométrica que tradicionalmente se presenta. *"La tangente es el límite de la secante (o de las secantes)"*, se dice en el tratamiento tradicional. Hay que plantear el límite de la secante como la tangente, pues eso se hace en los cursos: se traslada el problema al terreno geométrico, pero ese es otro tipo de límite, que no tiene ε ni δ; es bueno para mostrar que el profesor está usando una noción de límite que no es la que se define con ε ni δ, y también

ISBN 978-84-945722-3-4

para llamar la atención sobre otro punto poco explicitado: el profesor utiliza la palabra *tangente* en dos sentidos: uno, con el significado del final de décimo grado, cuando se habla de las funciones trigonométricas, y otro, en el sentido de la primera parte del décimo grado, cuando se habla de la tangente a las gráficas; luego, ahí el que está poniendo un obstáculo didáctico es el profesor. Está tendiendo una trampa que distingue dos usos que el enunciador sabe que son diferentes, pero el estudiante no. El profesor debería decir: *"la tangente del ángulo que forma la recta tangente con el eje horizontal"*. El concepto de pendiente como inclinación puede medirse por el ángulo, por el seno del ángulo o por la tangente del ángulo, y esto es más coherente que tratar de definirla como razón de dos variaciones $\Delta y/\Delta x$. ¿Dónde está la tangente?

En las expresiones simbólicas que involucran el símbolo de infinito, como Lim $x = \infty$; $x \to \infty$, suele haber una inconsciencia en los estudiantes, pero también en el profesor, quien usa igual sintaxis y vocabulario cuando dice que *"la x que tiende a infinito es una variable y la otra x es una función"*. Precisamente ahí hay un ejemplo de ese paso del álgebra al cálculo: en el álgebra, la *x* representa variables en el sentido de incógnitas para averiguar o de números genéricos, pero en el cálculo representa la función idéntica.

En Euclides ya se habla de límite y hay una diferencia entre segmento finito, semirrecta y recta indefinidamente larga. Para los profesores de educación media y de universidad, "cálculo" es lo que aparece en los textos sobre cálculo. La conceptualización básica involucra el estudio de los límites, las derivadas, las integrales… y el caso del límite lo conforman todas aquellas situaciones que requieren aproximaciones y vecindades; el mismo profesor en su lenguaje utiliza expresiones como *"acercarse más y más"*, *"acercarse tanto como se quiera"*, *"tender hacia"*, *"infinitamente cercanas"*, que involucran entidades como lo infinito y lo infinitesimal. Esquematizando, tenemos:

Álgebra	**Cálculo**	**Geometría Analítica**	**Análisis**
Como tratamientos en un registro simbólico para la	Como tratamientos en un registro	Como conversiones entre dos registros simbólicos de	Como sistema conceptual cuyos elementos son las

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

aritmética generalizada	simbólico para el análisis	ecuaciones y gráficas	funciones reales de valor real

Hay tres operadores sobre funciones que son los que caracterizan el trabajo analítico que se suele hacer en el cálculo: el límite (L), la derivada (D) y la integral (∫).

El siguiente cuadro muestra en la primera columna cada operador analítico por sí solo y el mismo aplicado a su argumento, (que es una función reificada como objeto, como aparece en la segunda columna); en la tercera columna, el valor de esa función cuando se aplica a su propio argumento genérico (que es un número real); luego el argumento aparte (que es un número real todavía no determinado) y un caso particular de un número real.

Operador		**Argumento del op.**	**Valor**	**Argumento**	**Caso particular**
L	L(f)	f	f(x)	x	*1*
D	D(g)	g	g(y)	y	*2/7*
∫	∫(h)	h	h(z)	z	π

Tres elementos fundamentales: "Procepts, reification, APOS theory")

Tall y Vinner (1981, citados por Vasco, 2009) y Fischbein[3] propusieron dos tipos de nociones intermedias entre las nociones vagas y los conceptos científicos (en inglés los llamaron *"concept image"* y *"procept"*).

"*Concept image"* (*"imagen conceptual"*). Para comparar el concepto con la imagen conceptual, Vasco propone pensar como ejemplo en el concepto de curva en geometría diferencial; el concepto matemático de curva difícilmente puede separarse de la imagen conceptual de una línea curva, aunque dicho concepto se refiere a una función que proyecta un intervalo de R en un espacio de dos o más dimensiones, no a la imagen del intervalo bajo la función, que es la que mantenemos indisociablemente ligada a la curva. La imagen conceptual es un conglomerado de todas las estructuras, imágenes, procedimientos y

[3] Los autores se remiten a una idea de Fischbein, Tirosh y Hess de 1979 sobre las intuiciones del infinito y a una ponencia de Vinner y Hershkowitz de 1980 en el PME IV.

ISBN 978-84-945722-3-4

relaciones asociadas con el concepto, y muchas de sus regiones pueden estar muy alejadas y aun contradecir la definición formal del concepto ya institucionalizada.

La palabra inglesa *"procept"* se podría traducir directamente por "procepto", en el sentido de concepto procedimental, pues se relaciona más con los procesos, procedimientos o algoritmos que con los objetos o las relaciones, pero oscila de uno a otro. Por ejemplo, el estudiante de primaria y secundaria suele rechazar la distinción entre *adición* y *suma*, pues no conceptualiza propiamente la operación binaria de adición, sino que la confunde con la manera como hace las sumas, sin distinguir la operación del resultado, ni éstos del algoritmo que aprendió (por ejemplo el algoritmo usual para sumar varios numerales decimales dispuestos en columna). En símbolos, $a+b$ puede significar sumar a con b, o el resultado de ese proceso.

Otro ejemplo es el del concepto de igualdad. Un estudiante normal, aún "exitoso", puede pasarse todo el bachillerato sin configurar el concepto de igualdad como relación de equivalencia entre expresiones simbólicas que se refieren al mismo objeto y que permite la sustitución de la una por la otra. Le basta el procepto de igualdad, que condensa el proceso de obtener un resultado y la relación estática de igualdad. Este procepto le permite leer el símbolo "=" como "da", aunque se pierda la propiedad simétrica. Va a creer, por ejemplo, que la ecuación "$0 = x^2 - 1$" está "mal escrita". Pero la idea de Tall (1992), es que esa oscilación o confusión entre proceso y concepto no es rechazable, más aún, es una ambigüedad muy conveniente en el pensamiento de orden superior y los expertos también la utilizan sin darse cuenta de que a veces se refieren al proceso y a veces al producto conceptual de ese proceso.

Las palabras *reificación o cosificación*, según Vasco, son dos traducciones del inglés *reification*, que se extendió en la educación matemática con los primeros trabajos de Anna Sfard. En latín, *"res"* significa "cosa", y "hacer de algo –que no es cosa– una cosa", se puede decir *cosificación* o *reificación*.

La noción inicial de cosificación o reificación es la de formar mentalmente un objeto de lo que era un proceso, una acción, una operación o una relación. Por eso se encuentra a veces la palabra *objetivación*. Como toda palabra terminada en "*-ción*", *cosificación*, *reificación* u *objetivación* a veces se refiere a la operación mental y a veces al resultado de esa operación.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Vasco enumera algunas pistas sobre la ocurrencia de la reificación de un nuevo producto mental:

- Separarlo de y contrastarlo con otras cosas, objetos, elementos o componentes.
- Operar sobre el nuevo producto.
- Nombrarlo con un sintagma nominal.
- Atribuirle predicados unarios o monádicos.
- Relacionarlo con otros y atribuirle predicados binarios, ternarios, etc.

La propuesta inicial de Anna Sfard, afirma Vasco, era que el progreso en la conceptualización matemática con frecuencia consistía en cambiar de una manera de concebir un proceso o procedimiento como algo activo, que ocurre en el tiempo, a una consolidación y detención del mismo como un nuevo objeto o cosa sobre la cual se empieza a actuar. Para el caso del análisis, se podría pensar en que el estudiante toma las expresiones del álgebra de bachillerato solo como instrucciones para calcular un resultado; por ejemplo, entendería el término “$x^2 - 1$” como *“eleve el número al cuadrado y quítele uno”*. Es una comprensión limitada, porque no permite pasar a la función respectiva, pero es correcta. Por eso puede tener éxito en aprobar dos años de álgebra sin construir el concepto de función, pues ese concepto requiere una reificación del procedimiento de calcular el resultado. Si no se reifican las funciones como objetos, no puede construirse un sistema analítico en el que los elementos u objetos sean las funciones reales de valor real. Aquí podría estar la diferencia entre el álgebra de bachillerato y el análisis real.

En este caso Vasco (2009) plantea que la reificación es muy cercana al paso del procepto de Tall, Vinner y Fischbein al concepto respectivo. Así lo ha utilizado Ed Dubinsky en experimentos de enseñanza de la teoría de grupos. Pero no es el único caso. Por ejemplo, las relaciones simbolizadas por los signos “<” y “>”, que los estudiantes leen *menor* y *mayor*, suelen quedarse en una comparación entre dos números y no pasan a configurar un sistema de relaciones con sus propiedades, su composición, su inversión, etc., pues esas relaciones no han sido reificadas, cosificadas u objetivadas. No se puede trabajar con un sistema cuyos

ISBN 978-84-945722-3-4

elementos sean las relaciones si los estudiantes no las reifican, es decir, si no las vuelven cosas u objetos mentales.

Aquí también puede haber una barrera para el paso al análisis desde el álgebra de bachillerato y el estudio de pre-cálculo y cálculo con funciones como instrucciones o como relaciones, sin reificarlas. Mientras no se logre la reificación, el estudiante no puede pasar a los sistemas analíticos, cuyos elementos son las funciones como operaciones unarias reificadas. Tanto los estudiantes como muchos de sus profesores siguen pensando que el sistema simbólico que aprendieron en el álgebra de bachillerato representa lo mismo cuando se usa en el cálculo, pues en ambas asignaturas basta saber operar con algunas reglas que se refieren solo a los símbolos, sin tener que pensar en los conceptos.

Conclusiones

A través de estas consideraciones se pretende aportar herramientas teóricas y metodológicas para la enseñanza y aprendizaje del cálculo diferencial escolar en estudiantes universitarios, que han de servir también, por supuesto, para todo aquel que esté transitando del álgebra escolar al cálculo diferencial escolar, y dotar de elementos de profundización, sustentación y fundamentación epistemológica y metodológica a la investigación sobre obstáculos, conflictos y dificultades que se presentan al iniciar el estudio del cálculo diferencial escolar. Así mismo, se esperan impactos a partir del uso de los resultados de investigación en lo institucional, en relación con la investigación en didáctica de las matemáticas y en la formación de profesores de matemáticas, con las comunidades de investigadores y con las políticas educativas.

Referencias Bibliográficas:

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En: El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8; Sevilla. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1992). Gráficas y ecuaciones. Antología de la Educación Matemática (Trad. Parra, M., del original en francés: Graphiques et equations. L'Articulation de deux registres, 1988. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, p.p. 125-139). México: Cinvestav-IPN.

Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. Revista Ingeniería (Universidad Distrital Francisco José de Caldas), n. 1, 87-92.

ISBN 978-84-945722-3-4

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 151-169.
Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: functions, limits, infinity and proof. En: Grouws, D. (Ed.), Handbook or research on Mathematics teaching and learning (p.p. 495-510). New York: MacMillan.
Vasco, C. E. (1995). History of mathematics as a tool for teaching mathematics for understanding. En: Perkins, D.; Schwartz, J.; Maxwell, M. y Stone, M. (Eds.). Software goes to school. Teaching for understanding with new technologies (p.p. 54-69). New York/Oxford: Oxford University Press.
Vasco, C. E. (2009). Acerca de "concept-image, procept, reification". En: Seminario de investigación del DIE-UD. Bogotá: DIE-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE EL ÁLGEBRA ESCOLAR, EL CÁLCULO DIFERENCIAL Y EL CASO DEL LÍMITE

Gloria Inés Neira|Sanabria
gneira@udistrital.edu.co; nicolauval@yahoo.es
Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Universidad Autónoma de Colombia
Bogotá, Colombia

Núcleo Temático: Formación del Profesorado
Modalidad: CB
Nivel: 5
Palabras Clave: álgebra, cálculo, límite, función

ANEXOS

Tensiones disciplinares y de aprehensión cognitiva

Hay múltiples tensiones entre el análisis real, el cálculo escolar, la geometría escolar, la geometría analítica escolar, el álgebra abstracta, el álgebra de bachillerato, la aritmética de los reales, la aritmética de los racionales, la aritmética de los enteros, la aritmética de los naturales, entre lo discreto y lo continuo (y en la mitad, lo denso), entre lo finito y el infinito actual (y en la mitad, el infinito potencial).

Hay algunos aspectos en los que la notación del cálculo parece ser la misma del álgebra escolar, pero no lo es, como se ve, ante todo, por la ausencia de la composición; por el entendimiento del exponente menos uno (–1) como recíproco, no como inverso de la función; por el uso del apóstrofe para la derivada; por la manera de entender las igualdades que empiezan por "y =…" como funciones; por la yuxtaposición de letras –sin indicar multiplicación– en los nombres de las funciones (como "lnx"). La idea es documentar que se trata de un registro semiótico diferente para un sistema conceptual diferente.

Tenemos la conjetura de que la notación para la geometría analítica de décimo grado no es la misma que la del álgebra escolar ni la del cálculo. En geometría analítica, los términos "no significan nada"; sólo las igualdades –que también llamamos "ecuaciones"– significan algo, aunque en ellas no se trata de averiguar una raíz o un conjunto solución (o conjunto de soluciones). No importa que las gráficas cartesianas determinadas por esas ecuaciones sean funcionales o no. No se usa la composición ni la derivada. Podría, pues, haber otra transición del álgebra escolar a la geometría analítica y otra al cálculo, pero en este trabajo nos interesa la que va del álgebra al cálculo, entre otras cosas, porque en el cálculo de la universidad, la geometría analítica es una unidad más o una herramienta para las llamadas "funciones trascendentes".

La principal operación binaria analítica es la composición de funciones, operación que no figura en el álgebra de bachillerato. Los elementos u objetos del análisis no son los números racionales y reales, sino las funciones reales de valor real. En noveno grado los estudiantes nunca vieron una "o" pequeña entre dos términos algebraicos como 2x y x2, pues no representaban dos funciones: la que duplica, d(_), y la que eleva al cuadrado, c(_), sino los números resultantes. En cálculo habría que escribir cod(x) o doc(x), que no es lo mismo. Los objetos del cálculo son, pues, muy diferentes de los objetos de la aritmética generalizada.

Respecto a la relación continuo-discreto (al interior de la aritmética, del álgebra y del cálculo), en la mitad hay una zona gris: lo denso, o la densidad. En lo discreto están los conjuntos finitos, los números naturales y los enteros; luego se llega a los racionales positivos Q+, que son densos, y de allí se llega a los racionales Q. Luego se trata de capturar el continuo (línea, región) a través de lo discreto y lo denso.

Generalmente se viene trabajando en el álgebra de bachillerato con ciertas funciones muy limitadas: la función cuadrado, la función cubo, las funciones lineales y las funciones afines o de gráfica lineal (que se confunden frecuentemente con las lineales). No se consideran las funciones constantes como funciones, sino como constantes. La función idéntica no se utiliza

ISBN 978-84-945722-3-4

como función, tal vez "porque no hace nada". La x se considera como incógnita, como variable o como indeterminada, pero no como función (representa la función idéntica en los reales).

No es conveniente confundir la función, tomada como operación o transformación, que es un objeto activo, con su grafo, que es un objeto pasivo propio de la teoría de conjuntos. Se perdería el aspecto activo de la función y no se podría hablar de la diferencia entre el conjunto de salida y el dominio, ni de la diferencia entre el conjunto de llegada y el recorrido, rango o codominio. No habría diferencia entre función parcial y función totalmente definida, ni entre función en ("into") y función sobre o sobreyectiva ("onto"). Menos conveniente todavía es confundir la función con su gráfica cartesiana. La una es un elemento u objeto analítico, y la otra es un elemento u objeto geométrico.

Para entrar en el mundo del cálculo es necesario enriquecer la visión de los estudiantes sobre la noción de igualdad y desarrollar nuevos métodos para probar igualdades. En este punto, es interesante notar que una reconstrucción similar de la noción de igualdad fue puesta en evidencia por la investigación didáctica, en la transición del pensamiento numérico al pensamiento algebraico. Tal como se ve en Neira (2000), en el álgebra, para demostrar que dos expresiones son iguales, se razona por equivalencia: se transforma la escritura $a(x) = b(x)$ en una sucesión de escrituras $ai(x)=bi(x)$ hasta obtener dos expresiones idénticas. Lo mismo se hace en el tratamiento de las ecuaciones y de las inecuaciones. Mientras que en el cálculo, se hace un encaje con la proposición $\forall \varepsilon > 0, |a-b| < \varepsilon$, Lo cual ha de llevar a comprender que para demostrar que en la vecindad de un punto a, $f(x) < g(x)$, no hay que resolver la inecuación, sino encontrar un intervalo de centro a donde tal desigualdad se pueda garantizar, mediante aproximaciones y estimaciones. *Se pasa de razonamientos por equivalencias sucesivas a razonamientos por condiciones suficientes.*

La entrada en el mundo del cálculo obliga también a los estudiantes a reconstruir objetos matemáticos ya familiares pero en otros mundos: la noción de tangente nos proporciona un caso prototípico de tal reconstrucción. En la enseñanza bachillerato, los alumnos encuentran primero esta noción en el contexto del círculo. La tangente es un objeto geométrico que posee propiedades específicas: • no corta al círculo, • Lo toca en solo un punto, • en el punto de contacto es perpendicular al radio.

ISBN 978-84-945722-3-4

Todas estas propiedades son globales y no tienen nada que ver con la idea de dirección común. Además, para ayudar a los alumnos a darse cuenta del carácter abstracto de los objetos geométricos, los profesores subrayan que incluso si perceptivamente el círculo y la tangente parecen coincidir localmente, en realidad tienen solo un punto común. Esta concepción geométrica se puede generalizar aplicándose a otras curvas, por ejemplo parábolas, y conduce a la concepción algebraica de la noción de tangente como recta que tiene una intersección doble con la curva, que resulta operativa con las curvas algebraicas.

Claramente, no hay una filiación directa entre esta tangente y la definida en cálculo, caracterizada por una propiedad local: la recta con que la curva tiende a confundirse localmente (aproximación afín al orden uno) y cuya pendiente está dada por el valor de la derivada de la función asociada.

Ampliando las conclusiones:

Se espera plantear propuestas didácticas para superar los obstáculos caracterizados y para desarrollar prácticas escolares que conduzcan a una transición más continua del conocimiento superando las rupturas y los obstáculos; una mayor sustentación teórica y metodológica en el área de matemáticas del ciclo básico de ingeniería para la evaluación de las prácticas docentes de los profesores de matemáticas y una ampliación de la base teórica y metodológica de los investigadores, grupos de investigación, formadores de profesores, profesores en ejercicio en la línea de investigación concerniente a la formación de profesores de matemáticas que tengan en cuenta estas consideraciones.

Los acercamientos descritos anteriormente han de permitir obtener algunos resultados prometedores para la formación y profesionalización de la práctica, pues cada concepto del cálculo que se desea enseñar suele apoyarse en nociones más elementales y se resiste al aprendizaje si no se antecede por un sólido entendimiento y articulación de las nociones y los conceptos previos, lo cual es necesario pero no suficiente: lo evidenciamos todos los días en las aulas de clase, y en los "errores" persistentes en los exámenes y evaluaciones.

Se espera haber señalado varios elementos de análisis en dirección a elaborar reflexiones de orden epistemológico y didáctico en cuanto a comprender, interpretar y quizá aportar en la solución, de una manera más amplia, de las dificultades y obstáculos detectados en la comprensión del cálculo diferencial. El trabajo empírico, la recolección y análisis de datos, nos confirmará las bondades y también las limitaciones de este acercamiento.

ISBN 978-84-945722-3-4