CB-1.427

DE LO GEOMÉTRICO A LO FUNCIONAL: APORTES DE LAS TECNOLOGÍAS DIGITALES EN EL JUEGO DE MARCOS DE TRABAJO DE LA NOCIÓN DE FUNCIÓN

Leonard Sánchez Vera

leonardsanchez@gmail.com

UNEFM–Venezuela / LDAR - Universidad Paris Diderot, Francia

Núcleo temático: (I) Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.

Nivel : Terciario o bachillerato

Modalidad : Comunicación breve (CB)

Resumen

La noción de función ocupa un lugar central en los programas de enseñanza de la matemática en diferentes países, pudiendo ser estudiada: i) desde diferentes puntos de vista: puntual, local y global (Vandebrouck, 2011)*; ii) en diferentes marcos (o dominios) de trabajo matemático (Douady, 1986); y en el cual, iii) pueden ser movilizados diferentes registros de representación semiótica* (Duval, 2001) *al interior de un marco o dominio específico. En esta comunicación se presentan cuatro rótulos para el estudio de la noción de función en un marco geométrico, diseñadas en un software de geometría dinámica (SGD) y que favorecen el estudio del concepto de función como co-variación entre magnitudes geométricas. Se plantean las hipótesis que el medio de geometría dinámica permiten: el estudio de la noción de función desde los diferentes puntos de vista gracias a los registros de representación movilizados en las diferentes ventanas del SGD y, favorece la articulación – o juego – entre los marcos geométrico y funcional para el estudio de la noción de función. Se presentará los resultados de una experimentación de uno de los rótulos para la introducción de la noción de funciones afines en clase de tercero de colegio en Francia (alumnos de 14 años).*

Palabras claves: funciones, marcos, registros

Introducción

En esta conferencia presentaremos primeramente los aportes teóricos, derivados de la investigación en didáctica de las matemáticas, que sostienen nuestra propuesta de

ISBN 978-84-945722-3-4

incorporación de las tecnologías digitales, y en particular un SGD, en el enseñanza y aprendizaje de la noción de función en el bachillerato.

Seguidamente destacaremos el papel que juega el SGD GeoGebra en el estudio de la noción de funciones: constante, afín, cuadrática, cúbica y polinómica a partir del la co-variación entre magnitudes geométricas (en un marco geométrico) y su eventual pasaje a un marco funcional en unos "rótulos" diseñados en un ambiente de geometría dinámica para tal fin.

En la última parte presentamos los resultados de la puesta en escena de la utilización de uno de los rótulos en una clase de refuerzo sobre el estudio de las funciones lineales y afines en alumnos de tercero (3º - grado 11) a nivel de colegio en la ciudad de León en la región Rhône Alpes al sur – este de Francia.

Aportes de la investigación en didáctica de las matemáticas al estudio de la noción de función

Una noción matemática adquiere un doble matiz y puede ser estudiada como objeto matemático en si mismo o como una herramienta para solucionar problemas. Es bajo este principio que Régine Douady (Douady, 1986) introduce en didáctica de las matemáticas la dialéctica "herramienta – objeto" para referirse, en el contexto de resolución de problemas en el marco de las situaciones de acción, formulación y validación desde la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998), a este doble papel jugado por las nociones matemáticas: papel de herramienta y objeto. Es así como por ejemplo, podemos estudiar la noción de función en didáctica de las matemáticas como **objeto** matemático, distinguiendo sus propiedades descontextualizadas, pero también como una **herramienta** que funciona y que se somete a la prueba en la resolución de múltiples problemas aplicados no ligados al área del conocimiento matemático, como por ejemplo, los problemas de optimización en el área de las ingenierías.

En el mismo orden de puesta en funcionamiento de conocimientos matemáticos en la resolución de situaciones fundamentales (en el sentido de la TSD), e inspirada en el trabajo real del matemático como sujeto epistémico resolviendo problemas, (Douady, 1986) introduce la noción de "**marco**" y de "**juego de marcos**" en didáctica de las matemáticas como una visión dinámica donde el resolutor de problemas tiene la necesidad de pasearse de un área de trabajo a otra, terminando por enriquecer ambas áreas; así:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

> “un marco está constituido de objetos de una rama de las matemáticas, de relaciones entre esos objetos, de sus formulaciones eventuales diversas y de las imágenes mentales asociadas a estos objetos y esas relaciones. Nosotros concebimos la noción de marco como una noción dinámica. El cambio de marco es un medio de obtener formulaciones diferentes de un problema que sin ser necesariamente equivalentes, permiten un nuevo acceso a las dificultades encontradas y la puesta en obra de herramientas y técnicas…La traducción de un marco en otro termina frecuentemente en resultados no previstos, a técnicas nuevas, a la creación de objetos matemáticos nuevo, en definitiva al enriquecimiento del marco de origen y a los marcos auxiliares de trabajo” (Douady, 1986)

Retomando los aportes de Douady, (Robert, 2008) considera un “marco” como un dominio de trabajo en la cual funciona una noción dada, éste dominio no siendo el único dominio de intervención de la noción en general. Así, (Brousseau, 2001) establece que lo que Douady establece por “marco” no es más que el reagrupamiento derivada de la actividad del matemático, pero de las más amplias y estables del universo de los matemáticos. Para (Brousseau, 2001) este vasto dominio de trabajo está constituido por los marcos más antiguos: numéricos, algebraico, geométrico, gráficos y de los más recientes: el funcional, el topológico y el informático.

Sin embargo, el carácter de marco es otorgado por el funcionamiento de la noción matemática en un dominio de trabajo específico. Así, tal como lo señala (Rogalsky, 2001), aunque el objeto matemático función pertenece naturalmente a múltiples marcos tales como: en marco del análisis, el marco conjuntista, el marco algebraico el marco geométrico y los marcos de análisis funcionales y numéricos; pudiéramos considerar un marco llamado “marco funcional” si empleamos funciones convexas o cóncavas dentro del estudio de un marco más amplio denominado, por ejemplo, marco de la convexidad.

Por otra parte (Duval, 1993) introduce la idea de representaciones en didáctica de las matemáticas a la idea de las diferentes formas de escritura de una noción desde un punto de vista semiótico. Con la idea de diferenciar un “marco” (en el sentido de Douady) de un registro de representación (Duval, 2001) establece que al interior de un mismo marco pueden coexistir múltiples registros y que, en una situación que implique un juego de marcos, muy frecuentemente este cambio de marcos se acompaña de un cambio de registros.

Para (Perrin-Glorian, 2001) cuando se introduce la noción de función en un nivel escolar dado uno entra en un nuevo dominio entre el álgebra y el análisis, uno construye objetos de

ISBN 978-84-945722-3-4

un nuevo marco y que nosotros aquí llamamos marco funcional. En este marco la función tiene diversos registros de representación semiótica: registro simbólico ligados a la escrituras en el marco algebraico, registro gráfico y registro de tablas.

Otro aspecto importante en el estudio de una noción en el marco del análisis es la distinción entre las dialécticas global / local / puntual del estudio de la noción de función (Vandebrouck, 2011). Así, para el estudio de la noción de función en un marco funcional, debe considerarse si la propiedades estudiadas conciernen a un punto (propiedad puntual), una vecindad de puntos (propiedad local), o a un intervalo – incluso en el conjunto de los números enteros (propiedad global).

Rol de las tecnologías digitales en la enseñanza de la noción de función

Según (Rogalsky, 2001) diversos estudios que han seguido los trabajos de Douady han sugerido que el trabajo matemático en un solo marco o en un solo registro (en el sentido de Duval) no es favorable para los aprendizajes.

Partimos de la hipótesis que las tecnologías digitales, y más particularmente los programas de geometría dinámica pudiesen favorecer el pasaje o el juego de marcos donde interviene una noción matemática, como por ejemplo la noción de función. Esta noción asume el papel de herramienta para la resolución de problemas pero adquiere el estatus de objeto matemático una vez se descontextualice de la situación.

Proponemos la utilización de rótulos diseñados en GeoGebra y que permiten el estudio de la noción de función desde un marco geométrico (al que llamamos marco de origen) y promovería un eventual juego (o pasaje) al marco funcional (al que llamamos marco destino). El programa GeoGebra favorecería la articulación de al menos dos registros de representación semiótica permitidos por la presentación, en una misma ventana, del registros algebraicos (vista algebraica), gráficos (vista geométrica) y numérico (vista hoja de cálculo). Mostramos en la siguiente figura ejemplos de algunos rótulos:

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

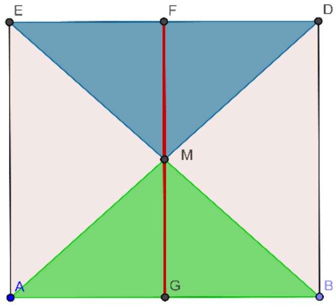
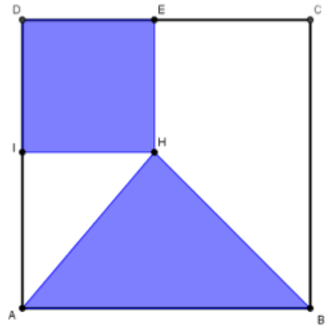
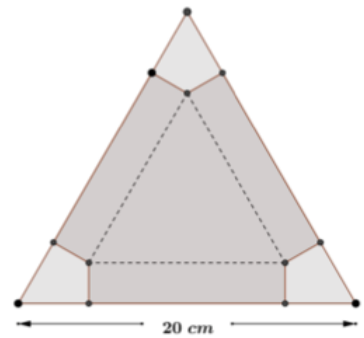
		

Figura 1a	**Figura 1b**	**Figura 1c**

Figura 1. Diferentes tipos de rótulos diseñados en geometría dinámica

Los rótulos diseñados en un contexto dado y en un marco geométrico permiten la emergencia de diversas relaciones funcionales como co-variación entre magnitudes geométricas, por ejemplo, entre la longitud de un segmento dado y que puede ser controlado por medio de un deslizador y el área de la figura que este deslizador genera. El área, el perímetro o el volumen siendo una función dependiente de la longitud del deslizador, puede ser modelizada por medio de una función constante, lineal o afín, cuadrática o cúbica (en el caso del volumen).

Así por ejemplo, en el rótulo mostrado en la figura 1a) las áreas de los triángulos azul y verde son variables dependientes (y por lo tanto función) de la longitud del segmento FM determinado por el punto M móvil (controlado por el deslizador) se desplaza a lo largo del segmento FG (representado como x). La base de los dos triángulos siendo la misma y constante dichas áreas pueden ser modelizadas por una función lineal y afín respectivamente. En rótulo de la figura 1b), siendo el punto E un punto que se desplaza libremente sobre el segmento DC, las áreas del cuadrado DEMI y el triángulo ABM se hacen dependientes de la longitud del segmento DC; el área del cuadrado es modelizada por una función cuadrada y el área de triángulo es modelizada por una función afín. En el rótulo de la figura 1c), al tratarse de la construcción de una caja de base triangular, a partir de cortes a los lados, intervienen nuevas dimensiones: largo, ancho y altura, por lo que es natural pensar en modelizar y tratar óptimamente el volumen de esta caja representada por una función polinómica de grado tres.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Experimentación sobre la puesta en escena de un rótulo en GD para la enseñanza de la noción de función lineal y afín

Contexto de experimentación

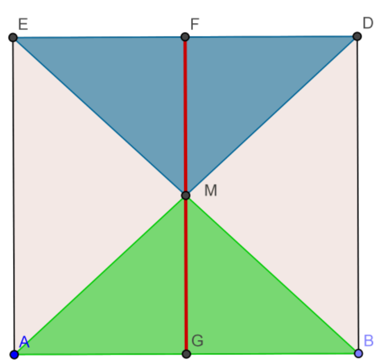
Hemos llevado a cabo la experimentación con alumnos de tercero de colegio en la ciudad de León en Francia. Se trata de una clase sobre la noción de función lineal y afín. Los alumnos disponían del conocimiento de la noción de función lineal y afín ya que habían sido introducidos a estas nociones en clase ordinaria (sin tecnología). El interés de esta actividad para la docente encargada de este curso, llevada a cabo en sala informática, era establecer la diferencia desde el punto de vista de la representación algebraica de ambas funciones. Los alumnos trabajaron en binomios colocados frente al ordenador con el archivo .ggb contentivo de la actividad previamente instalado.

Tarea propuesta

Se trata de una tarea de exploración en un ambiente de geometría dinámica (Laborde, Clarou, & Caponni, 2001; Restrepo, 2008). Para la resolución de la tarea los alumnos deben movilizar la noción de área de superficies planas y la noción de función, consideradas a priori disponibles por lo alumnos de tercero.

En la figura siguiente mostramos el enunciado de la tarea:

Activité 2 : La couverture du CD



Pour créer une couverture de CD, nous avons réalisé un modèle comme nous le montrons ci-dessous :

Le polygone **ABDE** est un carré de côté de 12 cm, M est un point du segment [FG] qui bouge librement sur le segment de telle manière que se forment les triangles **MED** (colorié en bleu) et **MAB** (colorié en vert). Si nous voulons choisir un modèle de couverture définitif avec lequel nous utilisons la plus petite quantité d'encre de couleur dans chaque impression :

Figura 2. Tarea dada a los alumnos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Archivo GeoGebra dado a los alumnos

Como se trata de una tarea de exploración, los alumnos debían explorar el siguiente archivo dado en GeoGebra. Los alumnos debían desplazar el punto M móvil sobre el segmento FG y conjeturar, a partir de la articulación entre las vistas algebraicas y hoja de cálculo en GeoGebra, que el área de la superficie (triángulo) verde aumentaba o disminuía en función del valor del segmento FM.

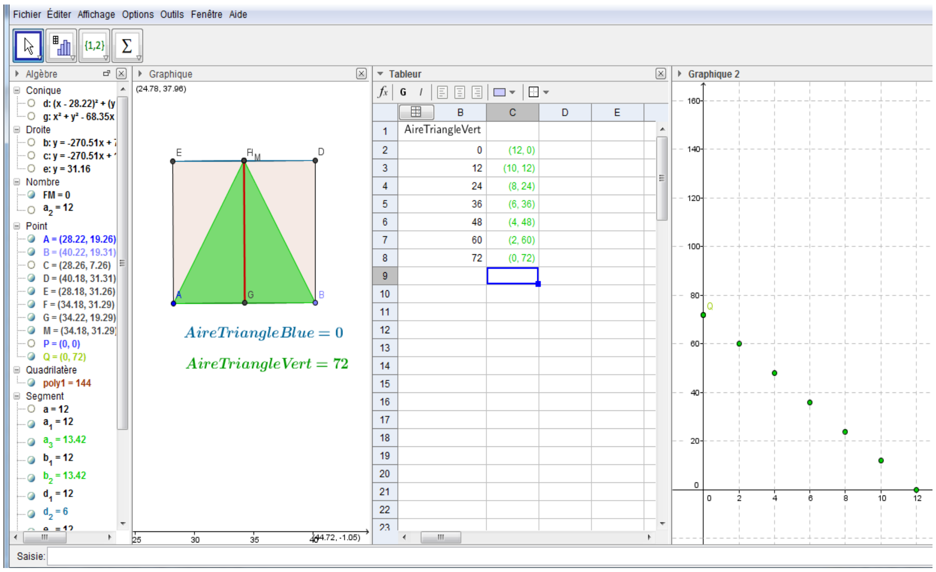


Figura 3. Archivo GeoGebra dado a los alumnos

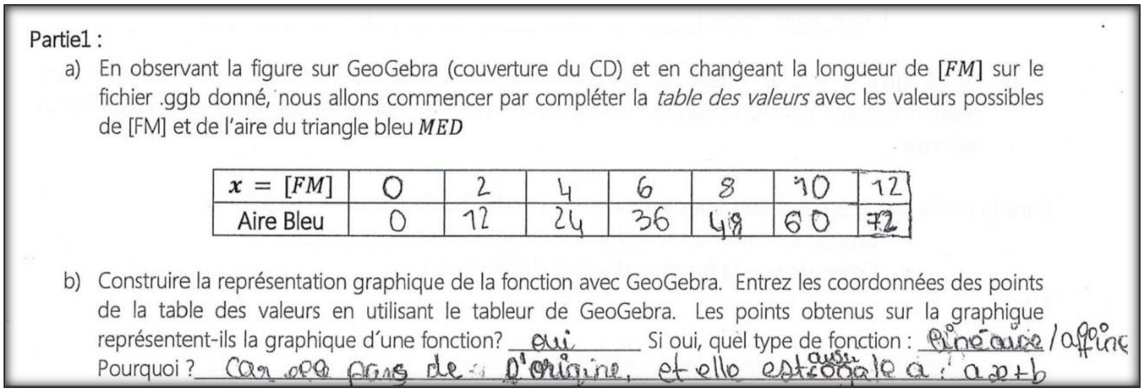
La pareja de pares ordenados mostrados en la vista gráfica dos de la misma ventana permitía identificar, y por tanto conjeturar, que el área del triángulo azul está modelizada por una función afín y el área del triángulo verde está modelizada por una función lineal. Seguidamente, los alumnos debían pasar al registro algebraico o simbólico (propio de la noción de función) al representar como x la longitud del segmento FM, por lo que el segmento MG toma el valor de la expresión: (12 –x).

Producciones de los alumnos e interacciones orales alumno – alumno durante la realización de la actividad

Hemos grabado y transcrito las interacciones durante el desarrollo de la actividad de algunos binomios resolviendo la tarea frente al ordenador. Al mismo tiempo hemos recogido sus producciones (respuestas a la ficha entregada al inicio de la actividad).

A continuación mostramos algunos extractos de las respuestas reflejadas en la ficha:

ISBN 978-84-945722-3-4



Partie1 :

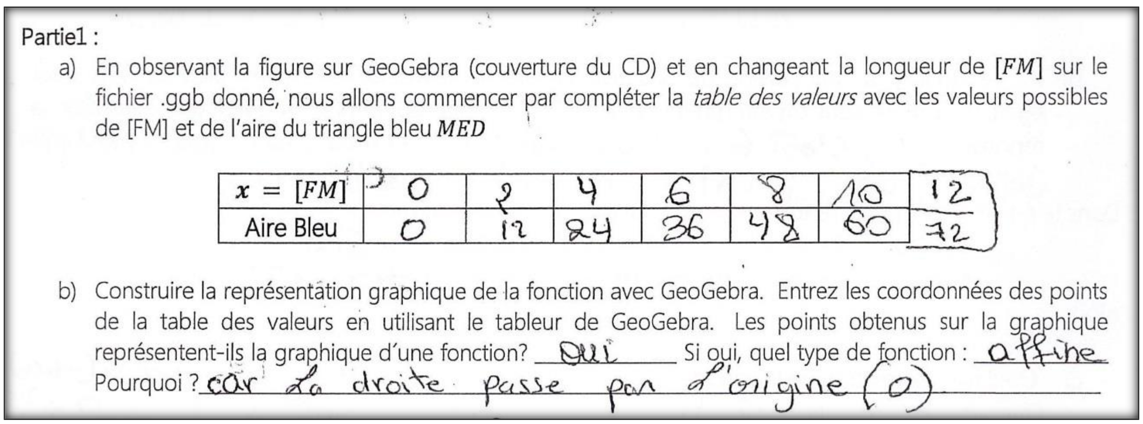
a) En observant la figure sur GeoGebra (couverture du CD) et en changeant la longueur de $[FM]$ sur le fichier .ggb donné, nous allons commencer par compléter la *table des valeurs* avec les valeurs possibles de [FM] et de l'aire du triangle bleu MED

$x = [FM]$	0	2	4	6	8	10	12
Aire Bleu	0	12	24	36	48	60	72

b) Construire la représentation graphique de la fonction avec GeoGebra. Entrez les coordonnées des points de la table des valeurs en utilisant le tableur de GeoGebra. Les points obtenus sur la graphique représentent-ils la graphique d'une fonction? oui Si oui, quel type de fonction : linéaire / affine

Pourquoi ? Car elle pass de l'origine, et elle est aussi égale à : ax+b

Figura 4. Respuesta a la primera parte de la actividad (Alexia et Badria)



Partie1 :

a) En observant la figure sur GeoGebra (couverture du CD) et en changeant la longueur de $[FM]$ sur le fichier .ggb donné, nous allons commencer par compléter la *table des valeurs* avec les valeurs possibles de [FM] et de l'aire du triangle bleu MED

$x = [FM]$	0	2	4	6	8	10	12
Aire Bleu	0	12	24	36	48	60	72

b) Construire la représentation graphique de la fonction avec GeoGebra. Entrez les coordonnées des points de la table des valeurs en utilisant le tableur de GeoGebra. Les points obtenus sur la graphique représentent-ils la graphique d'une fonction? Oui Si oui, quel type de fonction : affine

Pourquoi ? car la droite passe par l'origine (0)

Figura 4. Respuesta a la primera parte de la actividad (Meryeme et Ishimme)

Análisis de la actividad de los alumnos con rótulo en geometría dinámica

Hemos constatado que el medio GeoGebra favorece el pasaje (o el juego de marcos) entre los marcos geométrico y funcional en el estudio de las funciones lineales y afines. La adaptación que hemos hecho permite estudiar la modelización funcional en términos de co-variación entre magnitudes, es decir, en un contexto de modelización geométrica. La situación permite también diferenciar la función lineal, afín y constante. A pesar que en el discurso de los binomios (que no presentamos acá por razones de espacio) no hemos escuchado expresiones como : « *hay dependencia de co-variaciones* », « *o esta magnitud depende de ésta otra* », podemos decir que la situación con GeoGebra influencia la actividad procedimental de los alumnos trabajando en binomio. Algunas ayudas de tipo procedimental ofrecidas por la profesora durante la actividad pueden modificar la actividad de los alumnos. Hemos así verificado una recha entre la actividad esperada a priori y la actividad efectiva

ISBN 978-84-945722-3-4

desarrollada por los alumnos, así como la necesaria intervención de la profesora para la prosecución de la actividad.

Referencias Bibliográficas

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques* (La pensée Sauvage). Grenoble.

Brousseau, G. (2001). Cadres, jeu de cadres et théorie des situations. En IREM (Ed.), *Actes de la Journée en hommage de Regine Douady* (pp. 107-110). Paris.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil - objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7*(2), 5-31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *5*.

Duval, R. (2001). Comment décrire et analyser l'activité mathématique? Cadres et registres. En IREM de Paris (Ed.), *Actes de la Journée en hommage de Regine Douady* (pp. 83-106). Paris.

Laborde, C., Clarou, P., & Caponni, B. (2001). *Géométrie avec cabri. Scénarios pour le lycée* (CNDP). Grenoble: CNDP de l'académie de Grenoble.

Perrin-Glorian, M. J. (2001). Millieu, cadres et registres. En IREM (Ed.), *Actes de la Journée en hommage de Regine Douady* (pp. 63-72). Paris.

Restrepo, A. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez les élèves de 6ème*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier.

Robert, A. (2008). La double approche didactique et ergonomique pour l'analyse des pratiques d'enseignants des mathématiques. En F. Vandebrouck (Ed.), *La classe de mathématiques: activités des èléves et pratiques des enseignants* (Octarès, pp. 59-68). Toulouse.

Rogalsky, M. (2001). Les changement de cadre dans la pratique des mathématiques. En IREM (Ed.), *Actes de la Journée en hommage de Regine Douady* (pp. 13-30). Paris.

Vandebrouck, F. (2011). Points de vue et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 149-185.

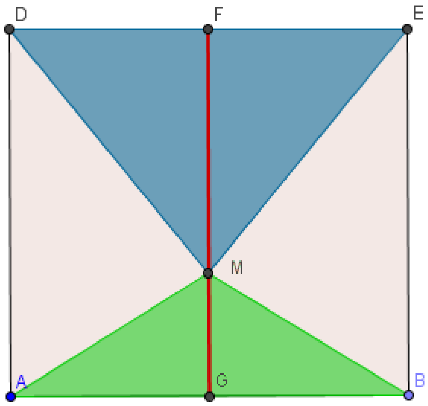
Nom : ____ Classe : _____

Activité 2 : La couverture du CD[4] Temps : 50 min

Pour créer une couverture de CD, nous avons réalisé un modèle comme nous le montrons ci-dessous :

[4] **Attention !** Il faut enregistrer ton travail avec GeoGebra sur mes documents sur le nom de couverture.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4



Le polygone **ABD**E est un carré de côté de 12 cm, M est un point du segment [FG] qui bouge librement sur le segment de telle manière que se forment les triangles **MED** (colorié en bleu) et **MAB** (colorié en vert). Si nous voulons choisir un modèle de couverture définitif avec lequel nous utilisons la plus petite quantité d'écran dans chaque impression :

Partie1 :

a) En observant la figure sur GeoGebra (couverture du CD) et en changeant $[FM]$, nous allons commencer par compléter la table des valeurs avec les valeurs possibles de $[FM]$ et l'aire du triangle bleu MED.

$\boldsymbol{x = [FM]}$							
Aire Bleu							

b) Entrez les coordonnées des points de la table des valeurs en utilisant le tableur de GeoGebra. Les coordonnes de points montres dans la vue graphique représentent-ils une fonction? Si oui, quel type de fonction : ___________________

c) Quelle est l'expression de la fonction? _____________________

d) Quelle est la valeur maximale de l'aire du triangle bleu possible ?___________ Pour quelle valeur de x nous l'obtenons ? x = _____.

e) Entre quelles valeurs varie l'aire du triangle bleu ? [____ ; ____]

Partie 2 :

a) Compléter la table des valeurs avec les valeurs possibles de $[FM]$ et l'aire du triangle vert MAB.

x= $[FM]$							
Aire Vert							

b) Entrez les coordonnées des points de la table des valeurs en utilisant le tableur de GeoGebra. Les coordonnes de points montres dans la vue graphique représentent-ils une fonction? Si oui, quel type de fonction : ___________________

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

c) Quelle est l'expression de la fonction? ____________________

d) Quelle est la valeur maximale de l'aire du triangle vert possible ?__________ Pour quelle valeur de x nous l'obtenons ? x = _____.

e) Pour quelle valeur de x nous avons besoin de moins quantité d'écran vert possible ?

f) Entre quelles valeurs varie l'aire du triangle vert ? [____ ;____]

Partie 3 :

a) Compléter la table des valeurs avec les valeurs possibles de$\boldsymbol{x}$, l'aire du triangle bleu MED, l'aire du triangle vert MAB et la somme des aires des deux triangles.

x= $[FM]$							
Aire Bleu							
Aire Vert							
Aire $\boldsymbol{Blue + Vert}$							

b) Est-ce qu´il y a une valeur de $\boldsymbol{x}$ dans laquelle les aires des triangles bleu et verts sont égaux? C´est possible voir l´égalité dans la représentation graphique des fonctions ?

Dès la partie 1 et 2 précédents vous avez obtenu les résultats suivants :

- Expression de la fonction d´aire du triangle bleu ?________________
- Expression de la fonction d´aire du triangle vert ?_________________

Alors,

c) Quel es l'expression de la somme de deux fonctions d´aires ? _____________
Que signifie ce résultat ?

d) Pour quelle valeur de $\boldsymbol{x}$ nous avons besoin du moins d'écran bleu et vert pour couvrir les aires des triangles ? Justifiez sa réponse.

ISBN 978-84-945722-3-4