

## ANÁLISIS DE INVESTIGACIONES ACERCA DE LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA LINEAL Y SU VINCULACIÓN CON LA GEOMETRÍA ANALÍTICA EN LA UNIVERSIDAD

Sabatinelli, Pablo Agustín<sup>1</sup>; Llanos, Viviana Carolina<sup>2,3</sup>; Otero, María Rita<sup>2,3</sup>

<sup>1</sup>Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura (UNR).

<sup>2</sup>Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).  
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN).

<sup>3</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).

[pablos@fceia.unr.edu.ar](mailto:pablos@fceia.unr.edu.ar); [vcllanos@exa.unicen.edu.ar](mailto:vcllanos@exa.unicen.edu.ar); [rotero@exa.unicen.edu.ar](mailto:rotero@exa.unicen.edu.ar)

### Resumen

Este trabajo describe y analiza los resultados de N=142 investigaciones sobre la enseñanza del Álgebra Lineal en la Universidad. En particular, se analiza si las investigaciones abordan el problema de la Enseñanza del Álgebra Lineal, estableciendo alguna relación con la Geometría Analítica, sea esta didáctica o histórico-epistemológica. El análisis se realiza a partir de una categorización inductiva de los trabajos de investigación recabados. Se proponen ejemplos de algunas de las categorías formuladas y se presentan resultados acerca de la enseñanza del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica en el primer año de la Universidad.

**Palabras clave:** Enseñanza de la Matemática; Álgebra Lineal; Geometría Analítica; Universidad.

### Abstract

This paper describes and analyzes the results of research about the teaching of Linear Algebra at university level. It specifically analyzes if there is any relation in the research carried out about the teaching of Linear Algebra establishing any relation with Analytic Geometry, be it didactic or historico-epistemological. The analysis is carried out from an inductive categorization of the research papers obtained -an amount of 142-. Examples of some of the categories put forward are proposed. Results from the teaching of Linear Algebra and Analytic Geometry at the first year of university are presented.

**Key words:** Teaching Mathematics; Linear Algebra; Analytic Geometry; University.

### 1. Introducción

En este trabajo se presenta un reporte de investigación acerca de la enseñanza del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica en la Universidad. A partir del análisis de N=142 investigaciones proponemos identificar los principales resultados acerca de la enseñanza del Álgebra Lineal en la Universidad, enfocando el estudio en la “separación” entre la Geometría Analítica y el Álgebra Lineal, de aquellas que proponen un estudio híbrido de estas disciplinas. Este análisis permitiría comprender de qué manera podría generarse alguna modificación en la enseñanza del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica en la Universidad.

En la formación básica de la UTN Rosario, donde el profesor es el investigador, los estudiantes de 1<sup>er</sup> Año tienen como materia anual “Álgebra y Geometría Analítica”. En esta cátedra está establecido que en el primer cuatrimestre, se estudian los primeros elementos de Geometría Analítica (vectores, recta en el plano, plano, recta en el

espacio, cónicas y superficies) y en el segundo, los conceptos del Álgebra Lineal (matrices, determinantes, sistemas de ecuaciones, espacios vectoriales y transformaciones lineales). La materia se presenta como dos partes irreconciliables, y donde la división está establecida sin cuestionamiento alguno. Pero este problema pareciera no ser específico de una Institución en particular. Desde la década del 90 se registran numerosos estudios acerca de las dificultades que presentan los alumnos de primer año de la Universidad, en el aprendizaje del Álgebra Lineal (Celestino, 2000). Uno de los grupos de investigación más reconocidos es el Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) (Carlson, Johnson, Lay, & Porter, 1993) que redactó una serie de recomendaciones y observaciones para el dictado de un primer curso de Álgebra Lineal en la Universidad, que fue ampliamente aceptado por la comunidad mundial de investigadores en matemática educativa y que actualmente constituye el fundamento teórico de los libros de texto recomendados en la materia.

En este trabajo, describimos algunos resultados del análisis de las investigaciones seleccionadas, poniendo énfasis en la relación entre Álgebra Lineal y Geometría Analítica, para la enseñanza de estas disciplinas en la Universidad.

## 2. Metodología

Se seleccionan mediante muestreo intencional  $N=142$  investigaciones entre publicaciones en revistas científicas, tesis de maestría y doctorado y publicaciones en actas de congresos. El objetivo de considerar esta variedad de investigaciones obedece no sólo a atender a la diversidad de resultados disponibles con relación a la enseñanza del Álgebra Lineal y Geometría Analítica, sino a determinar en qué medida el problema de la “separación” entre éstas es específica de la UTN Rosario, donde el investigador es profesor, o es un fenómeno más general. A partir de la muestra seleccionada, se realiza una categorización inductiva. Para organizar la información obtenida, los trabajos fueron agrupados según las características identificadas con relación a la enseñanza del Álgebra Lineal en la Universidad.

La muestra seleccionada permite describir los puntos de vista de los investigadores con relación a la enseñanza del Álgebra Lineal, y de existir la relación con la Geometría Analítica.

En este trabajo sólo se describen las tres grandes meta categorías que agrupan a la totalidad de las investigaciones consideradas, y se mencionan las categorías, tomando algunas investigaciones como representantes. Entre estas se realiza una breve descripción de las categorías y se proponen algunos ejemplos.

## 3. Categorías de análisis

El análisis permitió generar una categorización inicial compuesta por tres metacategorías: (A) Génesis del Álgebra Lineal, (B) Propuestas para la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal, (C) Desarrollo de conceptos de Álgebra Lineal. En función de éstas, se generaron inductivamente las categorías y subcategorías de análisis, aplicando técnicas de análisis y meta-análisis. Se describen a continuación las metacategorías de análisis, y se colocan ejemplos de las investigaciones más representativas en cada caso.

**A. GÉNESIS DEL ÁLGEBRA LINEAL:** Se identifican aquí 10 investigaciones que analizan el origen y los procesos de formación de conceptos de Álgebra Lineal, tanto desde un punto de vista histórico-epistemológico como didáctico. Entre estos se

identifican **Reportes histórico-epistemológicos (A.1)** y **Reportes didácticos (A.2)**. Los reportes histórico-epistemológicos agrupan a las investigaciones que analizan el devenir histórico del Álgebra en general y del Álgebra Lineal en particular. Por ejemplo, Katz & Barton (2007) a partir de un análisis histórico del Álgebra Lineal justifican la relación intrínseca entre el Álgebra y la Geometría Analítica, análisis que parece no plasmarse en la práctica efectiva. Desde esta perspectiva, existe una coincidencia con el investigador francés Dorier (1995a, 2000), quien señala que la enseñanza de la Teoría de los Espacios Vectoriales (concepto fundamental en el estudio del Álgebra Lineal) está emparejada con la enseñanza de la Geometría por cuanto el vector geométrico es considerado el referente prototípico del Álgebra Vectorial. Así, el Álgebra Lineal, entendida como el estudio de los espacios vectoriales, generaliza y unifica a la Geometría Analítica; la génesis de la primera está indisolublemente ligada a la de la segunda (Dorier, 1995a, 2000).

Entre los Reportes didácticos (A.2), se incluyen las investigaciones que realizan consideraciones didácticas basadas en resultados históricos. Es interesante esta categorización porque se identifican reportes basados en un **Enfoque holístico (A2.1)** y otras desde una **Perspectiva matricial (A2.2)**. Las primeras justifican la intrínseca relación entre Álgebra Lineal y la Geometría Analítica para realizar consideraciones didácticas. Entre éstas, la investigación de Ba & Dorier (2000) señala que la posibilidad de interpretar geoméricamente resultados algebraicos, provee a los conceptos algebraicos de una base intuitiva y una mayor consistencia. El uso de terminología geométrica en la teoría de espacios vectoriales es prueba de esto y resalta la relación que de hecho existe entre la Geometría y el Álgebra Lineal.

Por otra parte, el grupo de investigaciones que no propone un enfoque holístico, adoptan una perspectiva matricial, término propuesto por el grupo LACSG (Carlson et al., 1993). Desde esta perspectiva, se propone estudiar Álgebra Lineal desde enfoque computacional primero (en desmedro de la génesis histórica del Álgebra Lineal) para luego, en una instancia posterior, abordar los conceptos y relaciones más abstractas, intentando de esta manera retomar la línea histórico-epistemológica de la que se apartan en un principio. Paradójicamente, el grupo entiende que se debe comenzar desde lo concreto (entendiendo esto como la adquisición de destreza en los múltiples algoritmos calculatorios del Álgebra Lineal) y en muchos casos a partir de ejemplos y casos prácticos, para que en una etapa posterior se puedan desarrollar los conceptos generales. Por lo menos un “segundo curso” en Teoría de Matrices / Álgebra Lineal debería estar presente en todo currículum. Su propuesta entonces, no se condice con el devenir histórico-epistemológico del Álgebra Lineal, sino que se propone un “atajo” basado en una perspectiva algorítmica para luego, en una etapa posterior, intentar reconciliar el Álgebra Lineal con la Geometría Analítica.

**B. PROPUESTAS DE ENSEÑANZA DE ÁLGEBRA LINEAL:** Se identifican aquí 59 investigaciones que analizan propuestas de clase, material didáctico –básicamente libros de texto- y uso de software como recursos para la enseñanza del Álgebra Lineal. Se identifican tres categorías: **Reseñas bibliográficas (B.1)**, **Propuestas de clase (B.2)** y **Uso de software (B.3)**. Entre las Reseñas bibliográficas (B.1) se incluyen las investigaciones que realizan una reseña de las propuestas de enseñanza para el dictado de la asignatura Álgebra Lineal. Las **Propuestas de clase (B.2)** se distinguen entre las que proponen (B.2.1.) Enseñanza de Álgebra Lineal utilizando nociones de Geometría Analítica y (B.2.2.) Enseñanza de Álgebra Lineal en sí misma. Por ejemplo los profesores Bressan & Ferrazzi de Bressan (2008) desarrollan una interpretación geométrica a la conocida Regla de Cramer para la solución de sistemas de ecuaciones

lineales normales. No sólo interpretan la regla, sino que además proveen una demostración del teorema apelando siempre a argumentos geométricos. Al respecto, reafirman que muchos temas de Álgebra Lineal son interpretables geoméricamente y que habría que evitar la separación entre dichas disciplinas, pues epistemológicamente esta separación tajante no tiene lugar.

Dentro de aquellos que consideran la enseñanza del Álgebra Lineal en sí misma, Uhlig (2002, 2003) propone enseñar a demostrar a partir de observaciones sobre matrices reducidas. Estas observaciones también le permiten proponer una definición de independencia lineal que a su criterio es más adecuada que la que habitualmente se encuentra en los textos de Álgebra Lineal. En efecto, el investigador evita la definición clásica de independencia lineal, y propone definir la independencia lineal a partir de la cantidad de columnas pivote de una cierta matriz  $A$  (Uhlig, 2002). El investigador entiende que para introducir los conceptos de independencia lineal primero gráficamente con ejemplos en  $R^2$  o  $R^3$  y esperar después generalizar a  $R^n$ , pareciera ser una equivocación porque poner la intuición primero al definir un concepto unificador como el de independencia lineal actúa como un obstáculo en el proceso de formalización necesario e imposibilita un enfoque abstracto desde el principio. Los trabajos agrupados en esta subcategoría sostienen que el Álgebra Lineal no debería estar vinculada a la Geometría Analítica (por lo menos en la etapa inicial de su aprendizaje).

Dentro de la categoría **Uso de software (B.3)** se identificaron 3 subcategorías: **(B.3.1.) Instrumento para recuperar nociones de Geometría Analítica**, **(B.3.2.) Instrumento de cálculo y visualización** y **(B.3.3.) Aplicaciones a otras ciencias**. Por ejemplo, Donevska-Todorova (2011) vincula Álgebra Lineal con Geometría Analítica a través de la utilización de GeoGebra y wxMaxima. Mediante diferentes applet desarrolla el concepto de determinante de una matriz cuadrada de tamaño 2 y de tamaño 3, y sus principales propiedades. Por otra parte, como ejemplo de (B.3.2.) el software se utiliza como una “gran calculadora” para aliviar tan solo las cuentas y algoritmos habituales dentro del Álgebra Lineal. Finalmente, en (B.3.3.) destacamos el trabajo de Archila Diaz, Bautista Rojas & Villamizar Morales (2011) quienes proponen la creación de un robot para lo que necesitarán conocer transformaciones lineales, la representación matricial de movimientos en el espacio, matrices de transformación homogénea, etc. Incluso en el caso de la subcategoría B.3.3., la vinculación entre Álgebra Lineal y Geometría analítica resulta adecuada en estas investigaciones por cuanto ambos campos de conocimiento se enriquecen mutuamente.

**C. DESARROLLO DE CONCEPTOS DE ÁLGEBRA LINEAL:** Se incluyen aquí 73 investigaciones, que se agrupan en dos categorías: **Experiencias de clase (C.1.)** y **Sistemas de representación (C.2.)** Dentro de la primera categoría fue posible identificar tres subcategorías **Dificultades en el desarrollo de conceptos de Álgebra Lineal (C.1.1.)**, **Dificultades de una enseñanza híbrida (C.1.2)** y **Ventajas de una enseñanza híbrida (C.1.3)**. En el caso de (C.1.1.) destacamos el trabajo de Aydın (2009) quien indica que las dificultades de los estudiantes no serían relativas al formalismo en sí, sino en la comprensión de los conceptos del Álgebra Lineal. Los estudiantes tienen que relacionar sus conocimientos previos con conocimientos formales y esto es lo complejo. Respecto de la enseñanza híbrida, Gueudet-Chartier (2002) cuestiona la creencia generalizada de que la Geometría y en particular la Geometría Analítica puedan ser vehículos adecuados para la comprensión de conceptos del Álgebra Lineal. El uso de un contexto geométrico o figural puede ser asociado con una buena comprensión del Álgebra Lineal, aún cuando esto actúe inicialmente como un obstáculo para el estudio. En este trabajo, se muestran tres grupos diferenciados de

estudiantes al abordar un problema de Álgebra Lineal (Gueudet-Chartier, 2002, p.539): (1) Estudiantes que utilizan un contexto geométrico inadecuado para el Álgebra Lineal que deviene probablemente de la Escuela Secundaria; (2) estudiantes que utilizan gráficas vectoriales, donde la mitad de ellos presentaban una buena comprensión del Álgebra Lineal, mientras que la otra mitad tenía algunas dificultades; (3) estudiantes que casi no utilizan dibujos pero a pesar de ello, presentan una buena comprensión de los conceptos específicos del Álgebra Lineal. La existencia de este último grupo de estudiantes, sugiere que un enfoque netamente algebraico es posible. La autora concluye que el uso de modelos geométricos puede ser de utilidad para los estudiantes, aún cuando el uso de técnicas de Geometría no provee un camino seguro para eludir todas las dificultades que se presentan en el estudio del Álgebra Lineal. De la misma manera, Pecuch-Herrero (2000) considera que un abordaje en paralelo con la Geometría Analítica puede ser útil a la hora de encontrar interpretaciones concretas dentro del Álgebra Lineal; así ocurre con el proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt en  $R^3$ , por ejemplo, que ayuda no solamente a entender el algoritmo que se está llevando a cabo sino que también evita que los estudiantes se pierdan en un mar de cuentas. En definitiva, un enfoque integrado que relacione ejemplos numéricos, interpretaciones geométrica y algebraica promueve un aprendizaje y comprensión más profundos (Pecuch-Herrero, 2000).

Respecto de la segunda categoría, Sistemas de Representación, fue posible la categorización en tres subcategorías, según la preponderancia de la representación: **(C.2.1.) Geométrico**, **(C.2.2.) Algebraico** y **(C.2.3.) Mixto**, en este último caso, las representaciones geométricas y algebraicas se complementan y ninguna resulta preponderante. Al respecto, sirve como ejemplo Dogan-Dunlap (2010) quien estudia las respuestas de 45 estudiantes, divididos en dos modalidades de trabajo diferentes sobre independencia lineal, en un primer curso de Álgebra Lineal. A través de un estudio comparativo, la autora concluye que una perspectiva geométrica no reemplaza a las aritmética o algebraica sino que las enriquece, y de este modo ayuda a los estudiantes a considerar diversos aspectos representacionales de un mismo concepto. Al mismo resultado arriba Harel (1989) con un estudio que en términos generales tiene las mismas características y arriba conclusiones similares.

## 5. Conclusiones

Las investigaciones analizadas ponen en evidencia que no existe consenso generalizado acerca de la vinculación entre la Enseñanza del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica, aunque todos concuerdan con un inevitable origen epistemológico común.

Los contenidos de Geometría Analítica y los de Álgebra Lineal conforman dos campos del saber aparentemente inconexos, que se corresponden con la realidad de las cátedras en la Universidad. Las investigaciones afirman la necesidad y la importancia de introducir modificaciones sustanciales en la Enseñanza de del Álgebra Lineal. Surgen en consecuencia nuevas preguntas: ¿Qué modificaciones son necesarias para que la enseñanza del Álgebra Lineal y la Geometría Analítica cobren sentido en la Universidad? ¿Qué contenidos son fundamentales para la formación de los ciudadanos, y para la práctica profesional de los futuros profesionales?

Consideramos que es viable introducir un cambio sustancial en la enseñanza en la Universidad, sobre todo porque las investigaciones sobre Álgebra Lineal y Geometría Analítica dentro del campo de la Educación Matemática no están agotadas y por el contrario, parece ser campo fértil y con necesidad de cambios.

## 5. Referencias

- Archila Diaz, J. F., Bautista Rojas, L. E., & Villamizar Morales, J. (2011). Transformaciones lineales de dimensión finita, aplicadas al desarrollo del modelo cinemática directo para el robot KUKA KR 60 JET R en cursos de Álgebra Lineal y dibujo de máquinas. *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*, XIX(2), 33–47.
- Aydin, S. (2008). The role of the computer in the teaching and learning Linear Algebra. En *Proceedings of the VIII International Educational Technology Conference (IETC 2008)*, pp. 6–9.
- Ba, C., & Dorier, J.-L. (2010). The teaching of vectors in Mathematics and Physics in France during the 20th Century. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Azarello (Eds.), *Proceedings of CERME 6: Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp. 2682–2691.
- Bressan, J. C., & Ferrazzi de Bressan, A. E. (2008). Interpretación geométrica de la regla de Cramer. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 3(1), 1–9.
- Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A.D. (1993). The Linear Algebra curriculum study group recommendations for the first course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41–46.
- Celestino, M. R. (2000). *Ensino-aprendizagem da álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. Tesis de Master, Pontificia Universidade Católica de São Paulo.
- Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear Algebra students' modes of reasoning: Geometric representations. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2141–2159.
- Dorier, J.-L. (1995a). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, 22(3), 227–261.
- Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 29(2), 175–197.
- Dorier, J. L. (2000). Recherches en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algèbre Linéaire-Perspective théorique sur leurs interactions. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, 12.
- Dorier, J. L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. En L. Tatsien, C. Zhijie, X. Mi, & Z. Chunlian (Eds.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, III, pp. 875–884. Beijing (China): Higher Education Press.
- Donevska-Todorova, A. (2011). Developing concepts in Linear Algebra and Analytic Geometry by the integration of DGS and CAS. En *Proceedings of the 16th Asian Technology Conference in Mathematics (ATCM)*.
- Guedet-Chartier, G. (2002). Using “geometrical intuition” to learn Linear Algebra. En J. Novotná (Ed.), *Proceedings of CERME*, 2, pp. 533–541.
- Katz, V. J., & Barton, B. (2007). Stages in the History of Algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 185–201.
- Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and computer projects for teaching Linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 31(2), 181–186.
- Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary Linear Algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 50(3), 335–346.
- Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching Linear Algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 361(0), 147–159.