CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL CONTENIDO AL ENSEÑAR A MEDIR SEGMENTOS Y ÁNGULOS A FUTUROS PROFESORES EN MATEMÁTICA

Lucía Schaefer; Natalia Sgreccia
Facultad de Cs. Exactas, Ingeniería y Agrimensura de la Universidad Nacional de Rosario, Argentina.
lucias@fceia.unr.edu.ar, sgreccia@fceia.unr.edu.ar

Resumen

En este trabajo se estudian los modos de emergencia del conocimiento geométrico en la formación inicial de profesores y, en particular, del conocimiento especializado del contenido basado en el modelo teórico del grupo liderado por Ball. Se lo encuadra en una unidad temática, referida a medida y congruencia de segmentos y ángulos, de la asignatura Geometría I de primer año del Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario. Puntualmente se analizan los relatos de observación de las clases de tratamiento del tema. El enfoque metodológico adoptado es cualitativo y responde a una investigación de tipo empírica, en su contexto natural y con alcance descriptivo. Como categorías de análisis se adoptan los seis subdominios del conocimiento matemático para la enseñanza del referente teórico y, a partir de reconocer regularidades en las clases, se elaboran modalidades que sustentan las categorías de estudio. Finalmente se aproxima una caracterización de las clases observadas.

Palabras clave: Formación de profesores, Conocimiento especializado, Geometría sintética.

1. Introducción

Esta ponencia se inscribe en el Plan de Investigación “La Geometría Sintética en la Formación del Profesor en Matemática: el caso de la Universidad Nacional de Rosario” (Consejo Interuniversitario Nacional, 2015-2016), correspondiente a una Beca de Estímulo a las Vocaciones Científicas, dentro del Proyecto de Investigación “Procesos de acompañamiento en la formación inicial y continua de profesores en Matemática” (Universidad Nacional de Rosario, 2014-2017).

En la investigación se estudian los modos de emergencia del conocimiento geométrico en la formación inicial de profesores en Matemática y, en especial, cómo ese conocimiento se piensa para ser enseñado. Se lo hace a través del modelo teórico del grupo Michigan liderado por Ball denominado Conocimiento Matemático para la Enseñanza (MKT). En este reporte en particular se analiza uno de los seis subdominios que dicho modelo abarca: el conocimiento especializado del contenido, dado que uno de los desafíos en la formación de profesores en Matemática consiste en el desarrollo de ese tipo particular de conocimiento matemático que es exclusivo para quienes se dedican a la enseñanza (Ball, 2009; Sgreccia y Massa, 2012).

En el Profesorado en Matemática de la Universidad Nacional de Rosario (PM), la formación básica en Geometría Sintética se ubica en el primer cuatrimestre de la carrera, dentro de la asignatura anual Geometría I (con cursado de marzo a noviembre). Dicha parte de la materia comprende ocho unidades: Puntos, rectas, planos y figuras planas elementales; Medida y congruencia de segmentos y ángulos; Congruencia de triángulos, área de figuras planas y el Teorema de Pitágoras; La circunferencia.

Construcciones con regla y compás; Proporcionalidad y semejanza; Trigonometría plana; Transformaciones rígidas en el plano; Geometría del espacio.
En esta comunicación se procura reconocer los modos de activación del conocimiento especializado del contenido en las tres clases teóricas destinadas, en el año 2015, al tratamiento de la segunda unidad, relativa a "medida y congruencia de segmentos y ángulos", desarrolladas entre el 8 y el 22 de abril.

2. Algunos antecedentes

Gutiérrez (2010) señala que, en la actual escuela secundaria, la Geometría Sintética (o Euclídea) está escasamente desarrollada y muchas veces se olvida cómo tratarse durante la formación de profesores. Lo primero imposibilita a los estudiantes conocer otro modo de pensar (Itzcovich, 2005). Respecto a lo segundo, el tipo de experiencias formativas por las cuales transita un futuro profesor es determinante para su desempeño profesional (Ministerio de Educación, 2010). La *International Commission on Mathematical Instruction* (1994) busca analizar los desafíos para la enseñanza de la Geometría en el siglo XXI. De Villiers (1997) ha solicitado cambios importantes en los programas de formación de profesores sosteniendo que incluso los profesores "cualificados" en Matemática de secundaria apenas conocen más Geometría que sus alumnos.
La investigación sobre el conocimiento de los profesores en Matemática ha surgido en las últimas cuatro décadas, acompañado por una preocupación pública y política como medio para mejorar la enseñanza. Poco se sabe acerca de los conocimientos matemáticos necesarios para la enseñanza (Ponte, 2014; Chapman, 2015), con vacancias en la Geometría Sintética (Sgreccia y Massa, 2012), el soporte de herramientas de Geometría Dinámica (Santana y Climent, 2015) y errores geométricos en alumnos de secundario (Cabello, López y Sánchez, 2014). Abrate, Delgado y Pochulu (2006) indican que los docentes suelen desplazar la Geometría al final del curso. Corica y Marin (2014) señalan su exclusión o un estudio superficial.
La Geometría Sintética se reconoce como uno de los componentes más importantes del currículum escolar de Matemática (Atiyah, 2001); las razones para su inclusión son múltiples: promover la percepción espacial, la intuición geométrica y la visualización, y utilizar propiedades geométricas (Jones, 2000): introducir el primer sistema axiomático donde se deducen teoremas y definiciones con rigurosidad lógica, y estimular la creatividad; desarrollar habilidades como conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en demostraciones, en la modelización y resolución de problemas.
En los núcleos temáticos básicos a desarrollar en los Profesorados en Matemática Universitarios de nuestro país (Res.CIN856/13[3]), se distingue al área Geometría como ejemplo paradigmático para la enseñanza de una teoría axiomático-deductiva y se subraya su potencial para el desarrollo de la inducción, intuición, visualización, representación gráfica, percepción de relaciones, regularidades y propiedades. En particular, la Geometría Sintética es la base estructural de toda una rama dentro de la Matemática y del pensamiento matemático mismo. De ella se desprende, por ejemplo, la Geometría Analítica (al vincularla con el Álgebra) o la Geometría Diferencial (al vincularla con el Cálculo), imprescindibles en carreras científico-tecnológicas, por sus múltiples aplicaciones.

[3] *Consejo Interuniversitario Nacional (2013). Propuesta de estándares para la acreditación de las carreras de Profesorado Universitario en Matemática.*

3. Marco teórico

Se adopta el modelo teórico del conocimiento matemático para la enseñanza (*mathematical knowledge for teaching*) en el cual se distinguen seis subdominios de conocimiento: común del contenido, en el horizonte matemático, especializado del contenido, del contenido y de los alumnos, del contenido y de la enseñanza, del contenido y del currículum (Ball, Thames y Phelps, 2008). En particular, el conocimiento especializado del contenido atiende a los usos específicos que surgen en el proceso de enseñanza, a las adecuaciones, adaptaciones y secuenciaciones realizadas para transformarlo en contenido enseñable, aspectos que no se requieren en otras profesiones u oficios que recurren a la Matemática. Comprende el conocimiento y habilidades matemáticas propias de los docentes, que generalmente no poseen otros adultos, aun cuando hubieran completado sus estudios superiores.

Este conocimiento involucra un trabajo de desmenuzamiento: organizar la estructura conceptual en que serán presentadas las ideas matemáticas; formular preguntas matemáticamente productivas; encontrar un ejemplo para construir un aspecto matemático específico; adaptar el contenido matemático de los libros de texto; reconocer qué está involucrado al usar una representación matemática particular; explicar y justificar por qué se efectúa cierto procedimiento o desarrollo y no otro. Estas tareas demandan un entendimiento y razonamiento exclusivo de la enseñanza, más allá del conocimiento matemático en sí que se está enseñando.

4. Metodología del estudio

El enfoque metodológico adoptado es el cualitativo, con el fin de ofrecer una caracterización y análisis exhaustivo de las prácticas de enseñanza desde la perspectiva de los actores involucrados, con un diseño de estudio de caso (Stake, 1995). Captar la complejidad del caso en cuestión, por su peculiaridad, puede dar lugar a resultados que, desde una lógica inductiva y sin ánimo de generalizar, puede proporcionar categorías válidas y útiles para analizar otros casos en situaciones semejantes (Ander-Egg, 2003), como son otros Profesorados Universitarios en Matemática. Responde a una investigación de tipo empírica, en su contexto natural y con un alcance descriptivo. Se adoptan seis categorías de análisis, correspondientes a los seis subdominios de conocimiento matemático para la enseñanza de Ball et al. (2008), puntualizándose en esta ocasión en el especializado del contenido. Entre las técnicas de recolección de información, se encuentra la observación de clases, que es la correspondiente a la parte del estudio que aquí se comparte. Se toman registros de audio y notas manuales de campo, que sirven de insumos para elaborar los relatos respectivos. Particularmente se trata de tres clases, ubicadas a un mes del inicio del cursado de la asignatura Geometría I correspondientes al tratamiento de la segunda unidad temática, cuyas duraciones aproximadas fueron de 150, 100 y 165 minutos respectivamente.

Para procesar la información, se aplica la técnica de análisis de contenido, a partir de reconocer ciertas regularidades en las palabras o acciones del docente que se fueron agrupando en “modalidades” y que sustentan las categorías de análisis del estudio. De este modo cada modalidad está asociada a varios extractos de relatos de las clases que comparten su naturaleza semiótica desde la interpretación de las investigadoras.

5. Resultados

En las tres clases analizadas (C1 a C3) se reconocieron momentos en el tratamiento del contenido, que se resumen en la Tabla 1. Se observa que, por lo general, el docente repasa los contenidos al comenzar las clases. Asimismo en todas ellas se distingue, al analizar la agrupación de los mensajes y los significados que transmiten, un momento de cierre, acompañado previamente por algunos minutos destinados a definiciones o propiedades variadas.

Clase	Momentos
C1	Introducción a la medida de segmentos Base axiomática de la medida de segmentos Definiciones variadas Procedimientos Introducción a la medida de ángulos Base axiomática de la medida de ángulos *(Recreo)* Definiciones variadas Continuación de "Base axiomática de la medida de ángulos" Procedimientos Definiciones y propiedades a partir de los axiomas Cierre de la clase
C2	Repaso de contenidos Construcción y definición de bisectriz Definiciones de cuadriláteros Definición y propiedades de congruencia de triángulos Cierre de la clase
C3	Repaso de contenidos Demostración de lema Definiciones y demostración de ángulos entre rectas paralelas *(Recreo)* Demostraciones variadas Cierre de la clase

Tabla 1: Momentos de tratamiento del contenido identificados en las clases observadas

En la Tabla 2 se muestran las diez modalidades emergentes en el dominio en cuestión, especificando las frecuencias en que fueron reconocidas en cada una de las clases así como un extracto de los relatos correspondientes con el fin de ejemplificar el sentido atribuido. Se observa que las modalidades destacadas son *construcción previa a la formalización* y *representaciones gráficas*. Aquella que se activó con menor frecuencia es *elección o solicitud de ejemplos*. Además, esta última estuvo ausente en determinadas clases, al igual que la *explicación de estrategias para demostrar un enunciado o resolver problemas*, la *justificación de afirmaciones y procedimientos*, el *sentido de las denominaciones y propiedades*, y el *trabajo con el error*.

Modalidad	Frecuencia			Extracto de los relatos de clases a modo de ejemplo
	C1	C2	C3	
Construcción previa a la formalización	8	3	15	*D pregunta qué características tiene y, como muchos mencionan "dos lados congruentes", dibuja otro trapecio pero ahora rectángulo, mostrando así que la característica en común es solamente un par de lados paralelos* (C2)
Direccionamiento de procedimientos	1	1	1	*Al ver que nadie da la respuesta esperada, D les da una "pista" mencionando que es una combinación del axioma 15 (no del tercer ítem) y la propiedad 4* (C2)
Distintas explicaciones de una misma idea	1	1	3	*Al finalizar, una alumna le dice que no entendió la parte en que usa el Lema 4 y D le explica de manera distinta a la anterior* (C3)

Elección o solicitud de ejemplos	0	1	0	*Luego realiza un ejemplo* (C2)
Explicación de estrategias para demostrar un enunciado o resolver problemas	0	0	5	*Explica la idea de la demostración pero como si los ángulos fuesen consecutivos, cosa que en el triángulo no se da. Por ello menciona que deberán realizar una construcción auxiliar* (C3)
Interpretación y análisis de enunciados	2	1	1	*Cuando escribe la del cuadrado se detiene a preguntar qué sucede si solo se quedan con la primera condición y qué si solo toman la segunda, muchos responden correctamente* (C2)
Justificación de afirmaciones y procedimientos	6	0	1	*Pregunta cómo podrían saber que el ángulo construido es la suma de los otros dos, qué deberían utilizar para justificarlo* (C1)
Representaciones gráficas	11	8	11	*Mientras, dibuja segmentos en el pizarrón y pregunta cuánto miden según u_1 y u_2* (C1)
Sentido de las denominaciones y propiedades	1	1	0	*Explica que se conoce como el primer criterio de congruencia pero, como muy rara vez van a recordar el orden, simplemente lo van a llamar LAL (lado-ángulo-lado)* (C2)
Trabajo con el error	3	0	1	*Un alumno responde incorrectamente que el ítem 2 del axioma es el que garantiza poder medir PQ, a lo que D menciona que no es exactamente ese. Por ello analiza ítem por ítem cuál puede servir para justificar el procedimiento. Concluye junto a los alumnos que el correcto es el ítem 3* (C1)

Tabla 2: Modalidades resultantes en el dominio del conocimiento especializado del contenido

Por otro lado, combinando los momentos reconocidos en las clases (Tabla 1) con las modalidades emergentes (Tabla 2), es posible sintetizar:

- Clase 1. Las representaciones gráficas fueron transversales a prácticamente toda la clase. La construcción previa a la formalización estuvo presente, principalmente, en los primeros cuatro momentos y una única vez llegando al final. La justificación de procedimientos surgió cada vez que se trabajó con los mismos y, por lo general, estuvo acompañada por explicaciones y verificaciones de procedimientos.
- Clase 2. Las representaciones gráficas abarcaron todo el desarrollo de la clase y acompañaron tanto la explicación de procedimientos como las construcciones y formalizaciones. La mayoría de las demás modalidades estuvo en el penúltimo momento de la clase, donde se definió y se trabajó con propiedades de congruencia.
- Clase 3. La construcción previa a la formalización se hizo presente durante todo el desarrollo de la clase, por lo general acompañada de representaciones gráficas. Además, en estas construcciones y formalizaciones, se solía encontrar justificaciones e interpretaciones de afirmaciones o enunciados.

6. Conclusiones

En cuanto a los modos de activación del conocimiento especializado del contenido en las clases analizadas, se destaca la abundante presencia de *construcción previa a la formalización*, consistente en analizar casos particulares, valerse de ideas previas de los estudiantes, realizar asociaciones. De hecho, no se producen formalizaciones en las clases sin tales instancias de construcción previas.

También se hizo presente la detención desde la enseñanza en la *interpretación y análisis de enunciados*, al desmenuzarlos para reconocer similitudes, diferencias, necesidades, posibilidades. Esto también se evidencia cuando se presentan *denominaciones y propiedades*, procurándose dotarlas de *sentido*. Similarmente ocurre con ciertas *afirmaciones y procedimientos*, que se acompañan con *justificaciones*; es decir, no se imponen "porque lo dice el profesor y punto".

En vez de presentar verdades únicas e indiscutibles, el profesor propicia *distintas explicaciones de una misma idea* o va *direccionando procedimientos* que procuran acortar la distancia entre el lugar donde está el alumno y el que se pretende arribar. Del mismo modo se propende a *explicar estrategias convenientes para demostrar propiedades o resolver problemas*, interactuando con los estudiantes, sin imponerlas mágicamente el docente. En este marco, se procura *trabajar con las respuestas erróneas* de los estudiantes desde la contrastación y re-elaboración, en la mayoría de los casos, sin que sea el docente el que reemplaza inmediatamente por respuestas correctas.

La presencia de *representaciones gráficas* en principio podría resultar hasta trivial, pues se está en clases de geometría. De todos modos en el caso analizado sobresale la funcionalidad atribuida a tales representaciones, que actúan de apoyo conceptual cuando no son objeto en sí mismas. Finalmente, los *ejemplos que se presentan o solicitan* responden a un orden intencionalmente pensado por el docente, por ejemplo, para prevenir errores, o bien, para indagar sobre el conocimiento de los estudiantes.

Entre otras acciones a futuro, se prevé socializar los hallazgos con los docentes de la cátedra Geometría I para llevar a un plano consciente las prácticas de enseñanza que se sostienen y así poder re-significarlas y potenciarlas. Se procura poner en relieve la trascendencia de este tipo particular de conocimiento -especializado del contenido- que distingue a los profesores en Matemática como profesionales.

7. Referencias

Abrate, R., Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación, 39*(1), 1-9.

Ander-Egg, E. (2003). *Métodos y Técnicas de Investigación Social IV. Técnicas para la recogida de datos e información.* Buenos Aires: Lumen.

Atiyah, M. (2001). Mathematics in 20th Century: Geometry vs Algebra. *Mathematics Today*, *37*(2), 47-49.

Ball, D. (2009). *Developing teachers' mathematical knowledge for teaching*. Conferencia presentada en la California Commission on Teacher Credentialing. Ann Arbor, mayo.

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching. What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Cabello, A.B., López, R. y Sánchez, A.B. (2014). Errores de conceptos geométricos persistentes en alumnos de 1º de ESO: detección y metodología de corrección. *Épsilon, 31*(1), pp.s.n.

Corica, A.R. y Marin, E.A. (2014). Actividad de estudio e investigación para la enseñanza de nociones de geometría. *Números, 85*, 91-114.

Chapman, O. (2015). Understanding and supporting mathematics teachers' knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 18*(2), 101-103.

De Villiers, M. (1997). The future of secondary school geometry. *Pythagoras. Journal of the Association for Mathematics Education of South Africa*, *44*(2), 37-54.

Gutiérrez, A. (2010). Introducción al Seminario I sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría. En M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp.17-19). Lleida: SEIEM.

International Commission on Mathematical Instruction (1994). Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century: Discussion document for an ICMI study. *L'Enseignement Mathématique*, *40*, 345-357.

Itzcovich, H. (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría*. Buenos Aires: El Zorzal.

Jones, K. (2000). Critical Issues in the Design of the Geometry Curriculum. En B. Barton (Ed.). *Readings in Mathematics Education* (pp.75-90). Auckland: Universidad de Auckland.

Ministerio de Educación (2010). Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario – Matemática (pp.118-179).

Ponte, J.P. (2014). Mathematics teacher education as a multifaceted field of study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11*(6), 489-490.

Santana, N. y Climent, N. (2015). Conocimiento Especializado del Profesor para la utilización de Geogebra en el Aula de Matemáticas. *Números, 88*, 75-91.

Sgreccia, N. y Massa, M. (2012). "Conocimiento especializado del contenido" de estudiantes para profesor y docentes noveles de matemáticas. El caso de los cuerpos geométricos. *Educación Matemática, 24*(3), 33-66.

Stake, R. (1995). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.