SIGNIFICADOS DE LAS RELACIONES "SER MÚLTIPLO" Y "SER DIVISOR" MOSTRADAS POR MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA EN FORMACIÓN

Understandings of relationships "being multiple of" and "being divisor of" shown by training primary teachers

Ángel López[a,b], Encarnación Castro[b] y María C. Cañadas[b]

[a]Universidad de Carabobo, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación en desarrollo sobre divisibilidad, como conocimiento matemático, de maestros de educación primaria en formación. Presentamos algunos resultados sobre dos relaciones consideradas: "ser múltiplo" y "ser divisor". Analizamos las producciones de 104 futuros maestros en una prueba escrita, para delimitar diferentes significados que ponen de manifiesto de estas relaciones. Mostramos ejemplos de los diferentes significados. Los futuros maestros no utilizaron el término "relación" en sus respuestas. Mayoritariamente, se basaron en operaciones aritméticas, con predominio de producto y división.

Palabras clave: *conocimiento matemático, divisibilidad, divisor, futuros maestros, múltiplo.*

Abstract

This work is part of an ongoing study on divisibility, as mathematical knowledge, of training primary teachers. We present some results about two relationships considered: "being multiple of" and "being divisor of". We analyze the production of the 104 prospective teachers in a written questionnaire, to identify different understanding of these relationships. We present examples of the different understandings. Prospective teachers do not use the term "relationship" in their answers. Mostly, they based on arithmetic computations, with predominance of the product and division.

Keywords: *mathematical knowledge, divisibility, divisor, future teachers, multiple.*

López, A., Castro, E. y Cañadas, M.C. (2013). Significados de las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" mostradas por maestros de educación primaria en formación. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 355-365). Bilbao: SEIEM.

INTRODUCCIÓN

La teoría de números es una rama de la matemática que ha despertado interés por su belleza y "sencillez" desde la antigüedad. Una "sencillez" que se reduce al planteamiento de problemas aparentemente muy sencillos pero que su resolución, en algunos casos, puede ser muy compleja, incluso algunos son todavía problemas sin resolver.

En teoría elemental de números se ubican los problemas numéricos que implican relaciones entre números, la divisibilidad es una de estas relaciones (Sinclair, Zazkis y Lidljedahl, 2003).Hay diversas recomendaciones sobre la necesidad de que los futuros maestros trabajen conocimientos relacionados con esta teoría. Por ejemplo, el NCTM (1989) considera que el estudio de la teoría elemental de números proporciona a los maestros de educación primaria una comprensión conceptual profunda de las propiedades y estructuras numéricas. Además, destaca el papel importante de dicha teoría para realizar razonamientos numéricos y resolver problemas no rutinarios (NCTM, 2000). El informe de la *Conference Board of the Mathematical Sciences*(CBMS, 2001) incide en la misma recomendación sobre el interés de la teoría elemental de números en la formación de los maestros porque les permite entender y tratar ideas fundamentales de dicha teoría en las aulas.

El currículo de educación primaria español (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) muestra que los maestros de educación primaria han de trabajar en sus aulas conceptos relacionados con la estructura multiplicativa, algunos de ellos relacionados con la divisibilidad. Los maestros deben profundizar en el conocimiento de los números y sus relaciones (Castro y Molina 2011). La divisibilidad es una relación multiplicativa entre números y, como el producto y la división exacta son operaciones inversas, la relación de divisibilidad responde también a la idea de división exacta.

En nuestra investigación distinguimos la relación de divisibilidad dela operación de división. Por ejemplo, cuando se escribe 6+3, 2x3, 6/3, se hace una clara referencia a una operación. En cada caso, se obtiene un resultado numérico de la expresión. Sin embargo, cuando se escribe seis es mayor que tres, se expresa una relación entre esos dos números. En general, podemos decir que para cualquier par de números "a" y "b", $a>b$ puede ser verdadera o falsa y no un número. De forma análoga sucede con la división y la divisibilidad: se dice: $a|b$, y se lee "a divide a b", si existe un número entero "c" tal que $b=a\text{x}c$. En la Figura 1 presentamos un mapa conceptual de la estructura conceptual de la divisibilidad y destacamos las relaciones de orden que se identifican entre diferentes elementos involucrados.

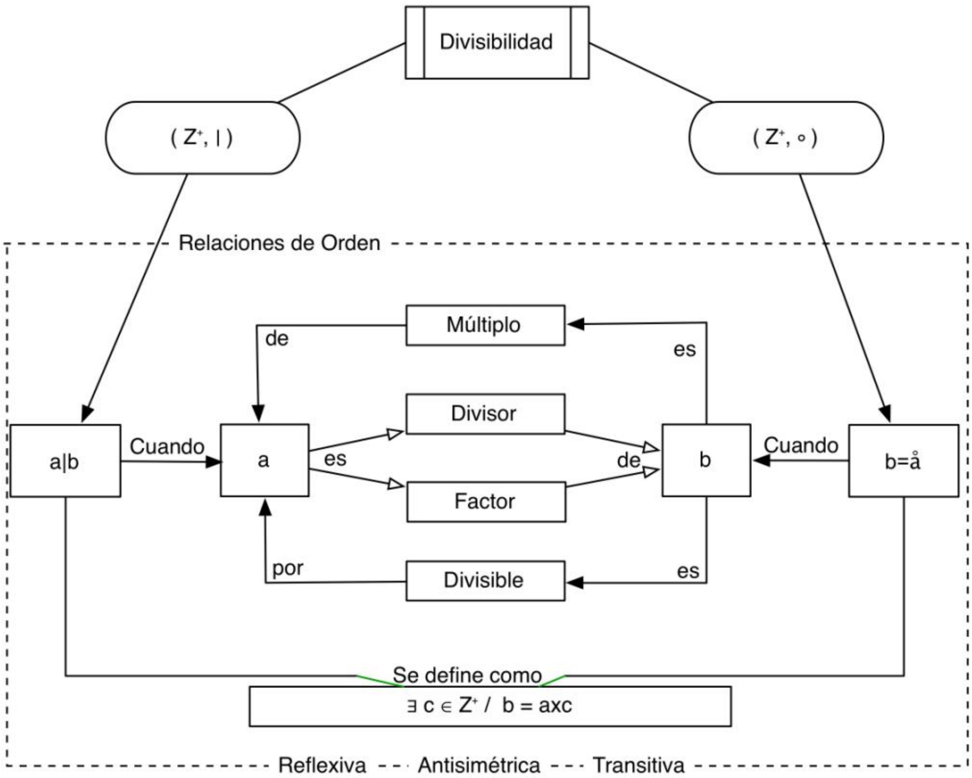


Figura1. Estructura conceptual de divisibilidad

En educación primaria, la divisibilidad se trabaja después de la división, exacta y entera, sus términos, y el algoritmo de la división. Este conocimiento previo puede obstaculizar el aprendizaje de la divisibilidad como relación, perdurando solamente la idea de la división exacta. Esta situación está reforzada en algunos libros de texto, cuando se asocia la relación ser divisor con la realización de la operación división exacta; y la relación ser múltiplo con la realización de la operación multiplicación; no interpretándola en términos de la relación entre los números.

Algunas dificultades están asociadas al vocabulario propio de la divisibilidad. Se usan expresiones que, en algunos casos, son equivalentes y, en otras, indican la relación opuesta, en virtud de que se tome el producto o la división como operación que sustenta la relación(ver figura 1). Por ejemplo: *divisor de*, *factor de, divisible por*, *múltiplo de*. A su vez, la expresión *divisor* en la operación de dividir representa uno de los términos de tal operación y en la divisibilidad hace referencia a un número que divide a otro (es divisor de otro). Utilizar el primer significado de divisor por mucho tiempo puede impedir la percepción del segundo significado.

Otras dificultades con la divisibilidad están relacionadas con el teorema fundamental de la aritmética. Por ejemplo, Zazkis y Campbell (1996) constatan que muchos futuros maestros de educación primaria están familiarizados con dicho teorema, pueden enunciar y explicar su significado, pero no lo aplican en diferentes situaciones de resolución de problemas.

Investigaciones recientes sobre la teoría elemental de números y maestros en formación insisten en la necesidad de estudios en este campo (Brown, Thomas y Tolias, 2002; Campbell, 2006; Ginat, 2006; Kieran y Guzmán, 2006; Lavy, 2006; Leinkin, 2006; Mason, 2006; Smith 2006). En este trabajo, ampliamos el estudio hecho en (López, Castro y Cañadas,2013). Nos centramos en indagar sobre la comprensión de las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" que muestran un grupo de maestros de primaria en formación.

OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

1. Determinar los significados que muestra el grupo de futuros maestros de primaria sobre la relación ser múltiplo.
2. Determinar los significados que muestra el grupo de futuros maestros de primaria sobre la relación ser divisor.

MÉTODO

En este trabajo nos centramos en las respuestas de los futuros profesores a 8 ítems, referidos a las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor". Los futuros profesores pertenecían a dos grupos (A y B, con 55 y 49 futuros profesores, respectivamente), tomados intencionalmente, y que cursaban la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada en el curso 2011-2012.Para que pudieran trabajarla en una sesión de clase, utilizamos 4 ítems para el grupo Ay 4 ítems para el grupo B, lo cual nos llevó a repartir los ítems en dos pruebas una para cada grupo y para aplicarla en su horario correspondiente.

Los ítems para el grupo A fueron:

- A1: Indica si la expresión 24 es múltiplo de 6 es verdadera. Explica tu respuesta.
- A2: Explica, con tus palabras, qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro.
- A3: Indica si la expresión 24 es divisor de 6 es verdadera. Explica tu respuesta.
- A4: Considera el número 3^3x5^2x7 y responde razonadamente a la pregunta. ¿Es 15 un divisor del número dado?

Y para el grupo B:

- B1: Indica si la expresión 6 es múltiplo de 24 es verdadera. Explica tu respuesta.
- B2: Dado el número 3^3x5^2x7, responde razonadamente la pregunta: ¿es múltiplo de 21?
- B3: Indica si la expresión 6 es divisor de 24 es verdadera. Explica tu respuesta.
- B4: Explica, con tus palabras, qué quiere decir que un número sea divisor de otro.

Estos ítems buscan indagar sobre qué entienden los futuros maestros sobre las relaciones "ser múltiplo" y "ser divisor" en tres situaciones particulares: (a) una afirmación (ítems A1,A3, B1 y B3), (b) una consideración personal de múltiplo y de divisor (ítemsA2 y B4, respectivamente) y (c) una situación que pretende generar una respuesta en función de la interpretación que haga el futuro maestro sobre la tarea (ítemsA4 y B2).

Analizamos las respuestas de los futuros maestros atendiendo a los significados mostrados cuando responden. Para la relación "ser múltiplo" consideramos tres categorías: el múltiplo como producto, el múltiplo como factor y el múltiplo como dividendo en una división exacta. Para la relación "ser divisor" consideramos dos categorías: divisor como elemento que participa en una división (rol de divisor) y divisor como resultado de una división exacta. Hemos excluidos aquellos casos donde no hay respuesta al ítem porque no aportan ninguna información relevante para nuestro estudio.

RESULTADOS

Recogemos los resultados correspondientes a las relaciones ser múltiplo y ser divisor.

Relación ser múltiplo

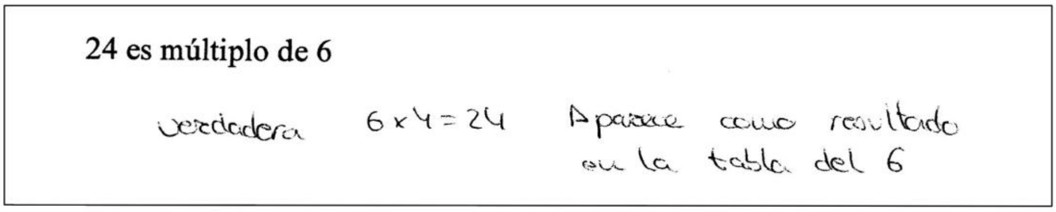
En la Tabla 1 resumimos los resultados (en porcentajes) de la relación ser múltiplo, de los futuros maestros que respondieron en cada uno de los ítems.

Tabla 5. Significados de la relación ser múltiplo para los grupos A y B

Ítem	MP	MF	MD	O
		Grupo A		
A1	72,9	8,3	6,3	12,5
A2	59,2	20,4	12,2	8,2
		Grupo B		
B1	20,4	61,4	11,4	6,8
B2	18,5	7,4	59,3	14,8

Nota. MP = múltiplo como producto; MF = múltiplo como factor; MD = múltiplo como dividendo; O=otro.

En el ítem A1, independientemente de su consideración en la respuesta sobre la expresión “24 es múltiplo de 6”, los futuros maestros justificaron mayoritariamente con la operación de multiplicación. Destaca el significado de múltiplo como producto. Por ejemplo, Jerónimo[xxvi] (Figura 2) toma la decisión sobre el múltiplo, basándose en la condición de ser resultado de la tabla de multiplicar, es decir, múltiplo como producto.


24 es múltiplo de 6

verdadera $6 \times 4 = 24$ Aparece como resultado en la tabla del 6

Figura 2. Respuesta de Jerónimo al ítem A1

En el ítem A2, señalamos la marcada tendencia operacional mostrada por los futuros maestros cuando describieron con sus propias palabras lo que significa que un número sea múltiplo de otro. Mayoritariamente usaron la multiplicación. En el uso de esta operación se diferencian dos aspectos, determinados por el papel que juega cada número en la multiplicación: como *factor* y como *producto*.

Múltiplo como sinónimo de factor: la estructura multiplicativa exige una terna de valores (a,c,b) que cumplen la relación $a\text{x}c=b$. En este producto, “a” (primera componente) se denomina multiplicando, a “c” (segunda componente) multiplicador (si bien pueden intercambiarse en virtud de la propiedad conmutativa del producto) y “b” (tercera componente) resultado o producto. En el caso de la divisibilidad, a la terna (a,c,b), se le suele denominar a la primera y segunda componente de la misma manera, se puede decir que son los factores en esa estructura multiplicativa. La tercera componente se le llama producto. En ese sentido, aproximadamente una quinta parte de los futuros maestros utilizaron el concepto de factor en la multiplicación para definir múltiplo. En la Figura 3 se observa la respuesta de Cristina, quien se refiere al múltiplo como el número que ocupa el lugar de factor en una multiplicación.

Múltiplo de otro, cuando esse número multiplicado
por otro cualquiera. de cómo resultado el nº
que estamos tratando.
Por ejemplo 5 es múltiplo de 10.
Porque 5 multiplicado por (2) dá como
resultado 10.

Figura 3. Respuesta de Cristina al ítem A2

Múltiplo como sinónimo de producto: al resultado de la multiplicación como operación se le suele llamar producto. En este caso, más de la mitad de los futuros maestros definieron múltiplo como resultado de la operación de multiplicación. Raquel (ver Figura 4), asocia múltiplo con resultado de multiplicación, afirmando que "se obtiene multiplicando". Ella trata de hacer esta afirmación en términos generales, para cualquier número entero. Sin embargo, las expresiones "se obtiene multiplicando" y "se obtiene otro" son claros indicios de la operación multiplicación y su asociación con sus elementos intervinientes: factores y producto.

Un numero entero es multiplo de Otro cuando se
Obtiene multiplicando, osea multiplicando algún
numero entero al segundo se obtiene Otro

Figura 4. Respuesta de Raquel al ítem A2

En el ítem B1, destacamos que más de la mitad de los futuros maestros respondieron de forma incorrecta: consideraron que "6 es múltiplo de 24" (múltiplo como factor).Una posible conjetura es que, al poder escribir la estructura multiplicativa como 24=6x4y sus distintas formas de conmutatividad, a los futuros maestros les parece condición suficiente para afirmar y justificar la cuestión. Consideramos que conseguir un resultado en el producto prima sobre el significado propiamente dicho de la relación ser múltiplo. La operación de multiplicación agrupa a la mayoría de las justificaciones dadas, en los dos sentidos descritos anteriormente.

En el ítem B2, La operación que más utilizaron los futuros maestros cuando justificaron su respuesta fue la división. Además, consideraron mayoritariamente el múltiplo como el dividendo en una división exacta.

En el ejemplo mostramos la respuesta dada por Mercedes (Figura 5). Transforma el número dado para dividir y como la operación le da exacta, concluye que si es múltiplo de 21.

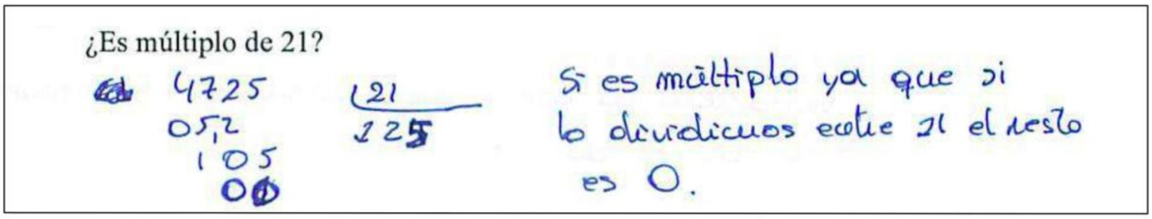


Figura 5. Respuesta de Mercedes al ítem B2

Relación ser divisor

En la Tabla 2 resumimos los resultados (en porcentajes) de la relación ser divisor, de los futuros maestros que respondieron en cada uno de los ítems.

Tabla 6. Significados de la relación ser divisor para los grupos A y B

Ítem	ED	D	O
		Grupo A	
A3	10	82,5	7,5
A4	8,6	65,7	25,7
		Grupo B	
B3	2,3	84,1	13,6
B4	26,1	63	10,9

Nota. ED = rol divisor; D = divisor como resultado de una división exacta; O = otro.

En el ítem A3, el 92,5% de los futuros maestros utilizaron la operación de división. La mayoría asociaron divisor en el sentido de hacer la división y que esta dé exacta.

Rosa (Figura 6)afirma que 24 es divisor de 6 y utiliza la operación de división entera para justificar su respuesta. Identifica el rol de divisor y el de dividendo en la división. Para ella, el divisor representa el número que divide en una división (rol divisor).

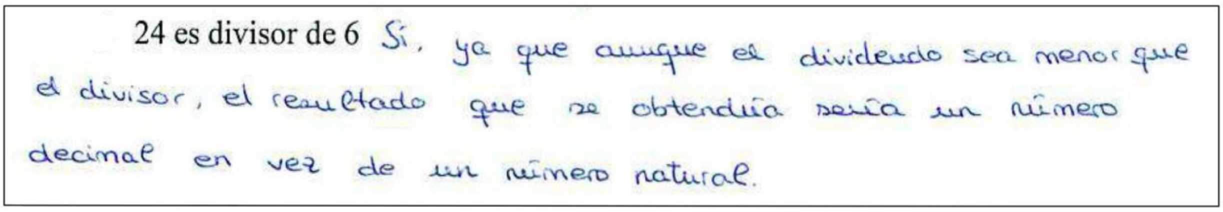


Figura 6. Respuesta de Rosa al ítem A3

En el ítem A4, la mayoría de los estudiantes realizaron la tarea transformando el número dado (escrito por la descomposición canónica del número) en el equivalente escrito en su representación decimal para luego hacer la división.

Jorge (Figura 7) efectúa la división, que es exacta y concluye que 15 es divisor.

¿Es 15 un divisor del número dado?

4725 | 15
22   315 . Sí, es un divisor
75
0

Figura 7. Respuesta de Jorge al ítem A4

En el ítem B3, el 86,4% de los futuros maestros justificaron su respuesta con la operación de división exacta. En el caso de Miguel (Figura 8),asocia el término divisor al cociente de la división exacta.

De las siguientes afirmaciones, indica cuales son verdaderas y explica por qué.
6 es divisor de 24

Sí, debido a que al dividir 24 entre cuatro el resultado es 6.

Figura 8. Respuesta de Miguel al ítem B3

En el ítem B4, más del 60% de los futuros maestros consideraron *divisor como consecuencia de una división exacta* y el 26,1% de ellos lo hicieron asociando divisor con el rol del número que divide en la división (*rol de divisor*).

Divisor como elemento que participa en una división, rol de divisor: cuando se efectúa una división de dos números enteros, hay cuatro números que guardan una relación y cada uno de esos números, a su vez, ocupan un lugar en la división y tienen asignado un rol específico: dividendo, divisor, cociente y residuo.

En el caso de Ana (Figura 9) distingue al divisor como las veces que vamos a dividir, o las partes en las que vamos a dividir.

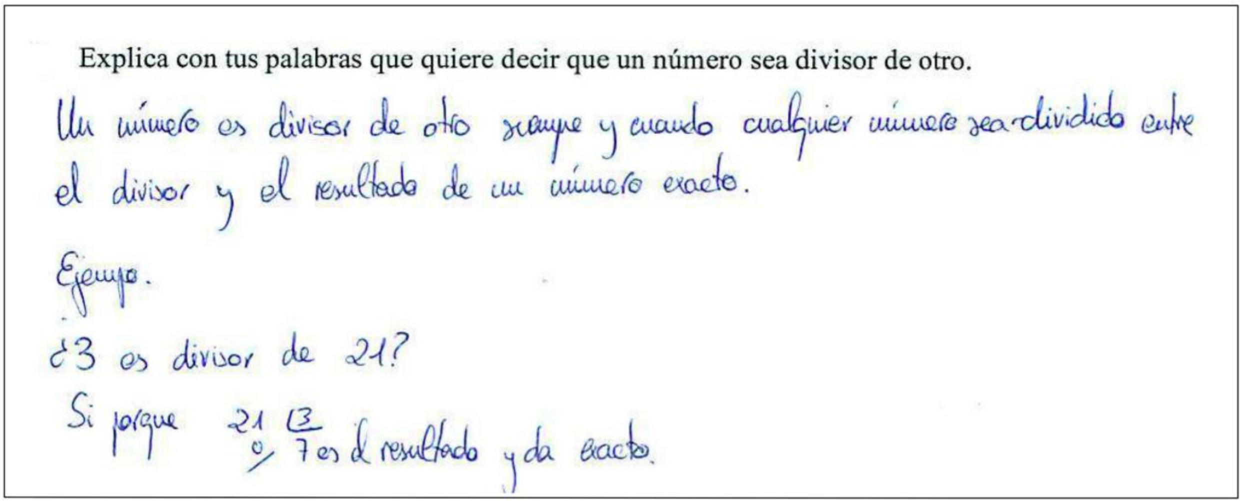
Explica con tus palabras que quiere decir que un número sea divisor de otro.

Un número es divisible cuando es mayor que el divisor, cuando no es negativo etc. Divisor es las veces que vamos a dividir, o las partes, en las que vamos a dividir el dividendo

Figura 9. Respuesta de Ana al ítem B4

Divisor como consecuencia de una división exacta: este significado fue asignado por más de la mitad de los futuros maestros. Cuando definieron divisor en estos términos, establecieron de alguna manera la relación entre números, sin embargo, esta relación estuvo muy marcada por la operación aritmética en si misma.

En el caso de Pablo (Figura 10), hace referencia explícita a la acción de dividir los números y que dé exacto.


Explica con tus palabras que quiere decir que un número sea divisor de otro.

Un número es divisor de otro siempre y cuando cualquier número sea dividido entre el divisor y el resultado de un número exacto.

Ejemplo.

¿3 es divisor de 21?

Si porque 21 |3 0 7 es el resultado y da exacto.

Figura 10. Respuesta de Pablo al ítem B4

CONCLUSIONES

En cuanto a los resultados, destacamos que ningún estudiante señaló explícitamente que ser múltiplo o ser divisor se refiera a una relación entre números, que exige una cierta condición. La mayor parte de los 104 maestros de primaria en formación que participan en el estudio, asocian “ser múltiplo” con una operación aritmética, mayoritariamente la multiplicación y “ser divisor” con la operación aritmética división.

En el caso de la relación “ser múltiplo”, la mayoría lo asocia con el resultado de la operación de multiplicación y, en otros casos, con el de factor, como un elemento que interviene en la multiplicación. Este resultado coincide con el de Zazkis (2001).Esta situación se pone de manifiesto para justificar que entre los números dados, uno es múltiplo del otro y cuando escriben qué quiere decir que un número sea múltiplo de otro con sus propias palabras. Cuando realizan la operación de los factores en que está descompuesto un número para comprobar (haciendo la división entre uno de los factores) si la división es o no exacta, lo consideraron desde la operación de división.

Entendemos que la transformación del número como producto de factores primos a la forma de escritura como expresión decimal que hicieron los futuros maestros está basada en la necesidad que sienten de hacer alguna operación aritmética conocida. Esto les llevaa no considerar la representación del número como producto de factores primos, a pesar que esta representación favorecía la respuesta de manera más rápida. No identificaron la relación de “ser múltiplo” en estas expresiones.

En general, sus actuaciones y respuestas se enmarcan en una percepción operacional de la noción “ser múltiplo”. Dentro de esta percepción operacional, el significado que asignan estos futuros maestros a “ser múltiplo”, presenta tres acepciones, dos asociadas a la multiplicación y una a la división.

- Múltiplo como resultado de un producto.
- Múltiplo como factor de un producto.
- Múltiplo como dividendo de una división exacta.

En el caso de la relación “ser divisor”, la mayoría de los futuros maestros manifestó la necesidad de utilizar la operación de división para responder y justificar las cuestiones planteadas. En esta consideración mayoritaria, operacional, sobre la relación ser divisor, mostrada por los futuros maestros, el significado divisor como consecuencia de una división exacta fue el más utilizado. Aunque esta consideración está muy cerca de la definición de divisor como una relación entre números, la forma como fue expresada por los futuros maestros estuvo marcada por la necesidad de realizar la operación de división entre números, es decir, conocer el resultado de la división. Alejándose así de la posibilidad de hacer la consideración en términos generales y no dependientes de los resultados de una división específica de manera explícita.

Otro aspecto a considerar es la transformación del número, escrito en su representación dada por el teorema fundamental de la aritmética, a un número escrito en su representación decimal para responder y justificar. La mayoría de los futuros maestros cuando transformaron el número para responder sobre divisor fue para tratar de conseguir el resultado de la división y no la relación entre los números. Algunos de ellos utilizaron la escritura del número en su forma canónica para responder, sin embargo, no todos fueron capaces de identificar los factores no explícitos en la descomposición canónica del número.

En general, al igual que en la relación “ser múltiplo”, los futuros maestros muestran una percepción operacional de la noción “ser divisor”. El significado mostrado a la relación “ser divisor” por los futuros maestros está ligado a la operación de división en dos sentidos:

- Divisor como elemento que participa en una división, rol de divisor.
- Divisor como resultado de una división exacta.

Referencias

Brown, A., Thomas, K., y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S.R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Journal of Mathematical Behavior Monograph. Westport, CT: Ablex Publishing.

Campbell, S. R. (2006). Understanding elementary number theory in relation to arithmetic and algebra. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 19-40). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Castro, E., y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid: Pirámide.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (CBMS, 2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Ginat, D. (2006). Overlooking number patterns in algorithmic problem. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 223-247). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C., y Guzmán, J. (2006). The number-theoretic experience of 12 - to 15- year-olds in a calculator environment: the intertwining coemergence of technique and theory. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 173-200). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lavy, I. (2006). Learning number theory concepts via geometrical interactive computerized setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 201-221). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Leinkin, R. (2006). Learning by teaching: the case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 115-140). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización de la noción "ser múltiplo" por maestros de educación primaria en formación. *Epsilon. Revista de educación matemática, 84*.

Mason, J. (2006). What makes an example exemplary: pedagogical and didactical issues in appreciating multiplicative structures. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 41-68). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 2211/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria (Vol. BOE Nº 173, pp. 31487-31566). Madrid.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

National Council of Teaching Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Sinclair, N., Zazkis, R., y Liljedahl, P. (2003). Number worlds: Visual and experimental access to elementary number theory concepts. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 8*(3), 235-263.

Smith, J. C. (2006). Revisiting algebra in a number theoretical setting. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education perspectives and prospects* (pp. 249-283). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Zazkis, R. (2001). Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 63-92.

Zazkis, R., y Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 207-218.

[xxvi] Los nombres utilizados son ficticios