

ANÁLISIS DE UNA EVALUACIÓN ESCRITA REALIZADA DURANTE UNA SECUENCIA DIDÁCTICA SOBRE FUNCIONES EXPONENCIALES EN EL MARCO DE LA TEORÍA DE LOS CAMPOS CONCEPTUALES

Patricia Sureda; María Rita Otero

Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT).
Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN).
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET).
psureda@exa.unicen.edu.ar, rotero@exa.unicen.edu.ar

Resumen

Se propone un análisis de la evaluación realizada al final de una secuencia sobre funciones exponenciales (FE) en la escuela secundaria (ES). Se analiza el aprendizaje de los alumnos a la luz de la Teoría de los Campos Conceptuales, identificando los invariantes operatorios (IO) que dirigen la acción de los alumnos (15-16 años) cuando resuelven una evaluación sobre FE. El análisis muestra que los alumnos usaron TA vinculados a la fórmula exponencial y que los TA relacionados con la gráfica y la variación responden a modelos no lineales.

Palabras Clave: Matemática, Enseñanza, Secundaria.

1. Introducción

La secuencia (compuesta por 12 situaciones y tres grupos de tareas) se implementó durante tres meses en dos cursos de matemática de una ES semiprivada. Las tareas propuestas en las situaciones involucraban diferentes sistemas de representación (SR). Previo a la implementación los alumnos habían estudiado potencias, interés simple y funciones lineales. Durante la implementación, el rol del profesor y de los alumnos, en la clase fue radicalmente modificado en correspondencia con una enseñanza por investigación, lo cual requirió un esfuerzo sostenido en el tiempo.

Al finalizar la implementación, se realizó una evaluación compuesta por cinco situaciones –tareas– que involucraban los diferentes SR: gráfico, numérico, algebraico de primer orden y verbal escrito. En este trabajo se describen y analizan los TA que los alumnos utilizan al resolver las cinco tareas que componen la evaluación, y se infieren resultados sobre la secuencia para futuras investigaciones.

2. Marco Teórico

Los conceptos se aprenden mediante la acción en situación (Vergnaud, 1990). Pues es en situación que sujetos construyen invariantes operatorios (IO): teoremas y conceptos en acto; que le permiten lidiar con ella. Los conceptos en acto (CA) son categorías pertinentes, y los teoremas en acto (TA) son proposiciones tenidas como verdaderas. Ambos se construyen en forma solidaria y pueden ser implícitos, más o menos explícitos, y eventualmente falsos. Los IO permiten seleccionar la información pertinente y, a partir de ella y de la meta a atender, inferir las reglas de acción más adecuadas para abordar una situación (Vergnaud, 1990; Sureda y Otero 2011). Así, las

decisiones que tome un alumno en situación van a depender del esquema activado, pero más específicamente de los CA y TA de los que disponga.

El estudio de los conceptos relativos a la FE se diseñaron a partir de la definición de concepto de la TCC, en la cual, el Concepto $C(S, I, L)$ está compuesto por tres conjuntos distintos, no independientes entre ellos, pero distintos (Vergnaud; 1990):

La referencia [S]: Es el conjunto de situaciones que le dan sentido al concepto. Aquí, las cinco tareas propuestas. *El significado [I]*: Es el conjunto de IO (conceptos y teoremas en acto) que estructuran las formas de organización de la actividad (esquemas) susceptibles de ser evocadas por estas situaciones. *El significante [L]*: conjunto de representaciones lingüísticas y simbólicas (algebraicas, gráficas, etc.) que permiten representar los conceptos y sus relaciones, y por ende las situaciones y los esquemas que evocan. En este caso los diferentes sistemas de representación.

3. Metodología

Se recogieron las respuestas de los 49 alumnos a la evaluación y se las escanearon. A partir de ellas se analizaron e infirieron los TA que estarían guiando las acciones de los estudiantes al formular la respuesta y se los enuncia. La evaluación requería acciones en los siguientes sistemas de representación: *Sistema de Representación Numérico [SRN]*: refiere tanto a las tablas como a todos los cálculos con números. *Sistema de Representación Algebraico [SRA]*: involucra aquellos procedimientos algebraicos en el que los parámetros se corresponden con la situación. Es decir, a todos los procedimientos algebraicos en los que estén involucrados también los números. *Analítico-Gráfico [SRG]*: refiere a la construcción gráfica en ejes cartesianos. *Verbal Escrito [SRVE]*: son las formas lingüísticas escritas.

4. Análisis y resultados

Tarea 1. Con el objetivo de combatir una enfermedad, un médico ha indicado a su paciente una medicación que deberá ser inyectada durante 21 días, de la siguiente forma: el primer día (día cero) se aplica la dosis máxima de 160 ml, cada día subsiguiente se aplicará $(4/5)$ de la dosis correspondiente al día anterior.

- Construye una tabla que describa como varía la dosis de la medicación a medida que pasan los días.
- ¿Cuál es el dominio de validez y la imagen de la función, que puede establecerse como modelo de la situación?

Frente a este problema, los estudiantes construyen tablas que se corresponderían con los siguientes “teoremas en acto numéricos (TAN)”.

TAN1: El aumento es un valor constante

TAN2: El aumento no es un valor constante

TAN3: El aumento es una proporción de la cantidad anterior

Los teoremas en acto TAN1 y TAN2 no son correctos, y aunque al principio de la secuencia eran la inicialización más disponible para los estudiantes, en la evaluación solo persisten en 10 de los 49 alumnos. Mientras que TAN3 fue utilizado en la acción por los restantes 39 alumnos. Por otra parte, las expresiones que usaron para describir el fenómeno responden a los siguientes “teoremas en acto algebraicos (TAA)”.

TAA1: La función EA que modela este problema exponencial es $f(x) = m.a .x$

TAA2: La función que modela este problema exponencial es $f(x) = K : a . b$

TAA3: La función que modela este problema exponencial es $f(x)=k.a^x$

En este caso, el teorema en acto correcto (TAA3) se identifica en 43 de los 49 alumnos. Esto significa que en algunos alumnos aún conviven IO lineales y exponenciales al momento de construir una respuesta. Y esto depende del SR en el que deban hacerlo. Un ejemplo de esto se muestra en la Figura 1.

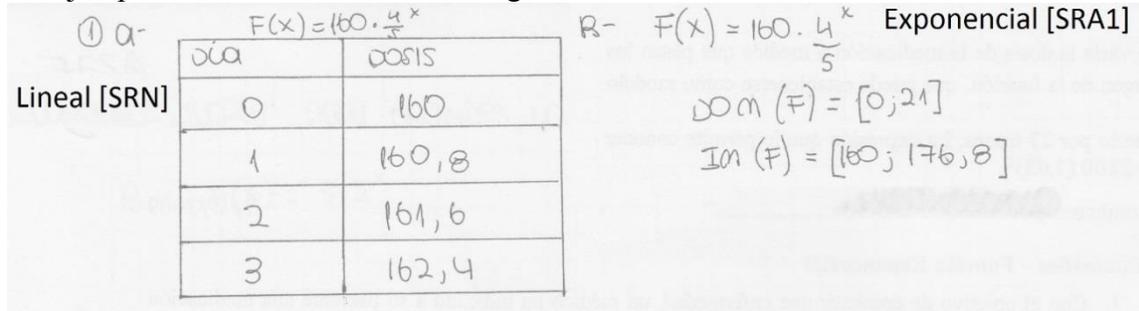


Figura 1: Resolución de la primera tarea en forma Parcialmente Exponencial- Alumno A58.

En síntesis, en 39 de los 49 alumnos se identifican TA exponenciales en ambos SR.

Tarea 2. Una persona colocó \$2100 a interés compuesto por 23 meses. La expresión que le permite conocer cómo varía su dinero mes a mes es: $M(t) = 2100 [(1,03)]^t$

- ¿A qué tasa de interés ha puesto el dinero?
- ¿Es posible determinar cuánto dinero aumentará por mes? ¿Por qué?
- ¿La forma en que aumenta el dinero con la expresión $M(t)$, es exponencial? ¿Por qué?
- Hallar de la forma más exacta posible el momento en que la persona tendrá \$2822,2244.

En esta tarea los alumnos deben reconocer que el interés compuesto (IC) no aumenta lo mismo cada mes. En particular, que el aumento es una proporción del mes anterior. También se espera que los alumnos reconozcan al IC como un caso particular de variación exponencial. La complejidad de la tarea reside en que se requiere reflexionar sobre las características de la FE y escribirlo. Un ejemplo de la resolución de esta y la siguiente tarea, por más de 40 alumnos se muestra en la figura 2.

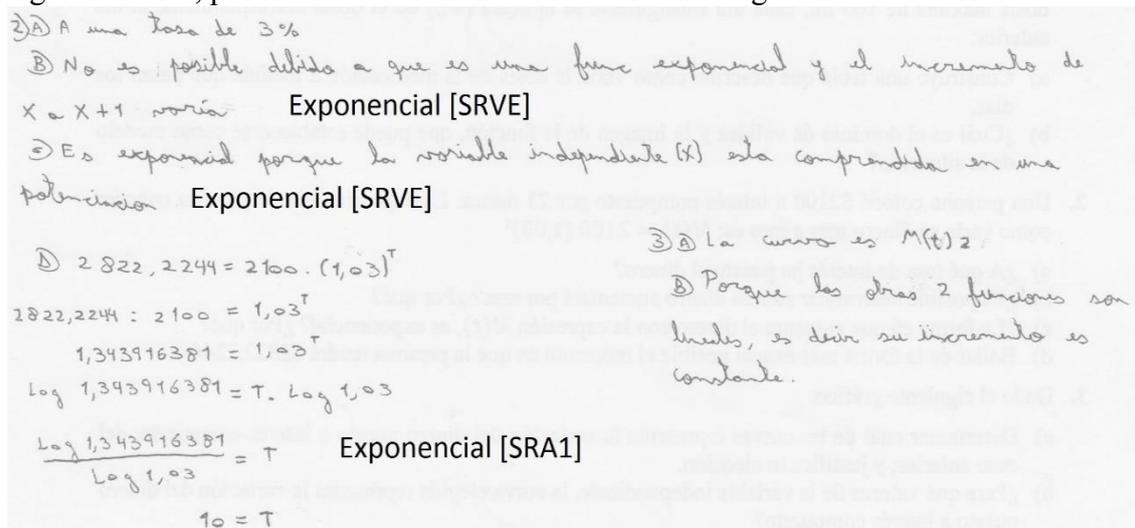


Figura 2: Resolución de la segunda y tercera tarea en forma Exponencial – Alumno A5

A partir de ellas es posible inferir “TA verbal escrito” en los que se advierte que los alumnos reconocen que la cantidad de dinero cambia mes a mes, pero sin detallar cómo es esa variación (TAVE1 y TEVE2).

TAVE1: El aumento no es un valor constante pero podemos decir cuánto aumentará por mes porque tenemos la fórmula.

TAVE2: El incremento de x a $x+1$ varía y por eso no podemos decir cuánto dinero aumentará por mes.

En la misma dirección, cuando se les pregunta por qué son FE, los alumnos sólo hicieron referencia a la fórmula.

TAVE3: La expresión algebraica $f(x) = k \cdot a^x$ del interés compuesto no es una función exponencial porque le falta el parámetro b .

TAVE4: El interés compuesto es una función exponencial del tipo $f(x) = k \cdot a^x$ porque la variable independiente está en el exponente.

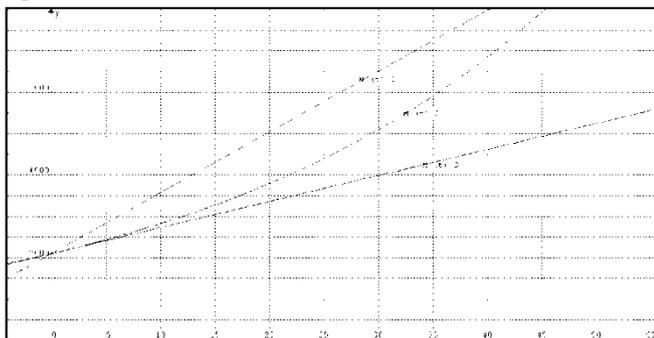
Del total de alumnos, en 43 de ellos se identifica el TAVE4. Si bien es un resultado interesante, en términos de conceptualización, el poder explicitar el TAN3 (El aumento es una proporción de la cantidad anterior) utilizado en acto en la construcción de la tabla de la tarea anterior, indicaría que los estudiantes van más allá de la forma, y que han conceptualizado el tipo de variación propio de la FE. Sin embargo, ningún alumno hace referencia a esta característica de la FE. Esto podría ser un indicador de que los aspectos visuales prevalecen, o de que ellos no reconocen la variación y no la explicitan o de que la secuencia requiere adaptaciones. Finalmente, la totalidad de los alumnos usan IO que les permiten resolver la ecuación exponencial.

TAA4: Para resolver una ecuación que tiene la incógnita en la potencia, es necesario utilizar el logaritmo para despejarla.

En resumen, 43 de los 49 alumnos usan TA vinculados a la expresión algebraica de la FE, y a las técnicas que permiten resolver una ecuación exponencial (figura 2).

Tarea 3. Dado el siguiente gráfico:

- Determinar cuál de las curvas representa la variación del dinero puesto a interés compuesto, del caso anterior, y justifica tu elección.
- ¿Para qué valores de la variable independiente, la curva elegida representa la variación del dinero puesto a interés compuesto?



Con esta tarea se quiere evaluar si los alumnos identifican la gráfica del Interés Compuesto, el dominio de la función en la gráfica, y si saben acotar el dominio a los valores dados por la situación. El TAG2 es usado por 41 alumnos para resolver la tarea, de los cuales solo 34 justificaron la elección.

TAG1: La gráfica que representa el interés compuesto es una recta.

TAG2: La gráfica que representa el interés compuesto es una curva no recta.

En las 34 resoluciones que justifican la elección se usan “teoremas en acto verbales escritos” que son insuficientes para diferenciar entre una variación no lineal cualquiera y una variación exponencial.

TAVE5: El aumento es un valor constante.
TAVE6: El aumento no es un valor constante.
TAVE7: Los valores calculados coinciden con la gráfica.
TAVE8: La gráfica que representa el interés compuesto es una curva.

En síntesis, 41 alumnos usaron TA exponenciales que les permitieron elegir adecuadamente la curva, y 34 de ellos pudieron verbalizar y justificar su elección (figura 2). El resultado es coherente con la TCC según la cual los invariantes explicitables son una pequeña parte de los invariantes que aun cuando dirigen la acción del sujeto en situación, permanecen implícitos para él sujeto (Vergnaud, 2007). Por otra parte, los TA utilizados no alcanzarían por sí mismos para diferenciar entre una variación no lineal cualquiera y una variación exponencial. En este caso, la inferencia es obvia porque la única función no-lineal que los alumnos conocían era la exponencial. La secuencia debería modificarse para propiciar la emergencia de TA adecuados para el reconocimiento de gráficas exponenciales.

Tarea 4

Escribe una función exponencial y construye su gráfica (indicando la ecuación de la asíntota).

De los 49 alumnos que realizaron la evaluación, seis de ellos no formularon una respuesta para esta tarea. En las resoluciones de los restantes 43 alumnos se identificaron “teoremas en acto algebraicos (TAA)” asociados a la expresión algebraica de la FE (TAA4).

TAA4: Una FE es de la forma $f(x)=k \cdot a^x+b$, con k constante; b asíntota horizontal y a base.
TAA5: La ordenada al origen de una FE se encuentra en $k+b$.
TAA6: La asíntota horizontal de una FE se encuentra en b .

De ellos, sólo 26 dibujaron también la gráfica. La construcción de la gráfica evidencia el uso de TAA5 y TAA6 (ver figura 3).

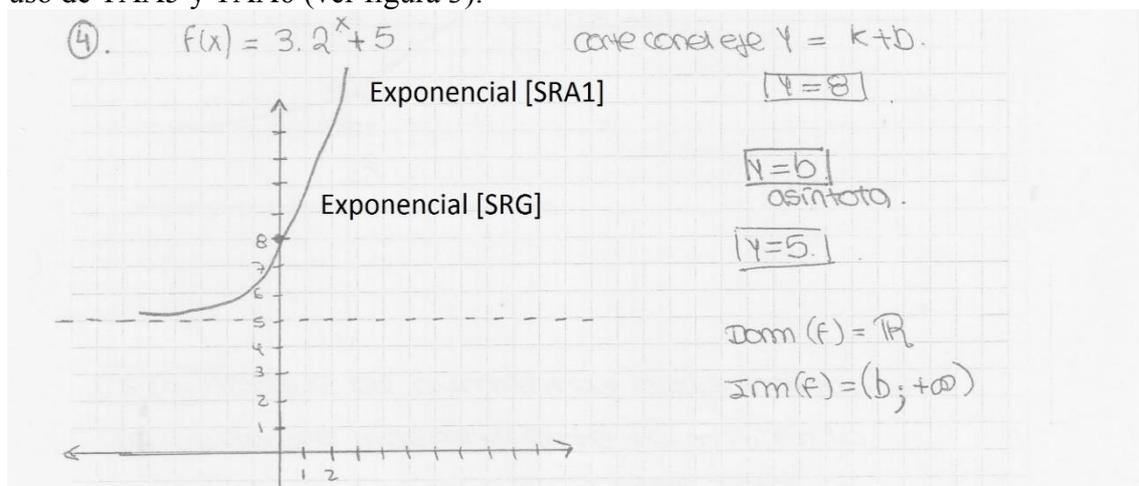


Figura 3: Resolución de la cuarta tarea en forma Exponencial – Alumno A27

De los 26 alumnos que formularon una respuesta exponencial en ambos sistemas de representación (algebraico y gráfico) sólo 14 escribieron el dominio y la imagen en

ambos. Por otra parte, de tres gráficas se puede inferir “teoremas en acto gráficos (TAG)” incorrectos (TAG3).

TAG3: La gráfica que representa la FE es una curva no estrictamente creciente que posee una asíntota horizontal.

TAG4: La gráfica que representa la FE es una curva no recta estrictamente creciente que puede graficarse a partir de la ordenada al origen y la asíntota horizontal.

TAG5: La asíntota horizontal (A.H) se dibuja mediante una recta horizontal punteada.

TAG6: La gráfica de la función no “toca” la asíntota horizontal, ni pasa a través de ella.

Mientras que de las otras 23 gráficas se pueden inferir los restantes TA.

Tarea 5. Tanto en el ítem 1 como en el 2, la variable dependiente se relaciona exponencialmente con la variable independiente.

- ¿Por qué se dice que las variables (dependiente e independiente) están relacionadas exponencialmente?
- Proponé una variación que no sean exponencial.

En las respuestas de 19 alumnos se usa el TAVE9, que junto con TAVE6 y TAVE10, son válidos para cualquier función creciente, no sólo para las exponenciales. Cabe destacar que 14 de los 19 alumnos que dieron esta respuesta habían respondido en forma exponencial a las cuatro tareas anteriores. Al mismo tiempo, en otro SR escribieron la fórmula de una función no exponencial. Es evidente que mucho del conocimiento utilizado por los estudiantes permanece implícito.

TAVE4: $f(x) = k \cdot a^x + b$ es exponencial porque la variable independiente está en el exponente.

TAVE6: El aumento no es un valor constante

TAVE9: La relación es exponencial porque a medida que aumenta x aumenta $f(x)$.

TAVE10: La relación es exponencial porque si la función es creciente, cada intervalo es mayor que el anterior, en el eje y .

De los 23 alumnos que lograron responder por qué estas variables están relacionadas exponencialmente, dos hicieron referencia a la gráfica (TAVE10), cinco a la variación (TAVE6), y 16 alumnos a la fórmula (TAVE4).

5. Conclusiones

La evaluación muestra que los alumnos usan invariantes que le permiten resolver las tareas en forma exponencial, pero que solo pueden verbalizar los IO exponenciales vinculados a la expresión algebraica. Por otro lado, para la gráfica y la variación priman TA no lineales. Es decir, que aunque los estudiantes solo pueden verbalizar IO relativos a la FE vinculados a la fórmula, hay una red de TA que están usando en sus resoluciones en otros SR, y que permanecen implícitos. Por ejemplo, los vinculados a la asíntota, a la escala en el sistema de ejes coordenados, a la ordenada al origen, al dominio, al crecimiento y decrecimiento de una función, etc.

La conceptualización es un proceso de larga duración. Por esto, es importante que las funciones exponenciales sean consideradas en varios momentos de la escolarización. Por otro lado, todos los dispositivos didácticos diseñados en el marco de la enseñanza por investigación, requieren comunicar, validar, explicitar y difundir el conocimiento que se obtiene. Esta no es una práctica escolar habitual, y es un requisito epistemológico, debido a que la ciencia es al final del camino, conocimiento explícito, que se independiza de quien lo generó. La evaluación indica las modificaciones que es necesario introducir en la secuencia.

6. Referencias

Sureda y Otero (2011). Nociones fundamentales de la Teoría de los Campos Conceptuales. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*. 6(2), 124-138.

Vergnaud, g. (2007). ¿En qué sentido la teoría de los campos conceptuales puede ayudarnos para facilitar aprendizaje significativo? *Investigações em Ensino de Ciências*. V12 (2), 285-302.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23): 133-170.