APLICACIÓN DE CONCEPTOS MATEMÁTICOS A UN PROBLEMA DE HIDROLOGÍA SUBTERRÁNEA

Agostina Zucarelli; Silvia Seluy; Elisabet Haye
Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.
silvia_seluy@yahoo.com.ar

Resumen

Como docentes de las asignaturas de matemática en el ciclo inicial de carreras de Ingeniería, consideramos que es fundamental brindar herramientas para que los alumnos, desde el comienzo de sus carreras, sean capaces de aplicar los conocimientos adquiridos en esta área a otras situaciones prácticas concretas y actuales de asignaturas asociadas a sus estudios. Esta reflexión surge luego de haber observado en los estudiantes, ciertas carencias para interrelacionar los conceptos, así como dificultades para formular criterios de resolución de problemas e interpretar resultados obtenidos. Por tal motivo se ha propuesto una aplicación referida a Hidrología Subterránea, en el marco de un Taller de Resolución de Problemas que se desarrolla en Matemática Básica de primer año para las carreras de Ingeniería. Con esta actividad se espera incrementar el interés de los alumnos por las ciencias básicas y concientizarlos que las mismas tendrán un rol fundamental a lo largo de sus carreras.

Palabras clave: Resolución de problemas, Hidrología Subterránea, Matemática Aplicada, Ingeniería, Ecuaciones diferenciales elementales.

Abstract

As teachers of mathematics in the initial cycle of the Engineering career, we believe it is essential to provide tools for students from the very beginning of the career, so that they will be able to apply the knowledge gained in this area to other specific and current practical situations of subjects associated with their studies. This reflection comes up after noticing in students certain lacks to interrelate the concepts as well as difficulties in formulating criteria for problem solving and result interpretation. For this reason, it has been proposed, within the framework of a Problem Solving Workshop developed on Mathematics of the first year in every Engineering career, an application referred to Hydrogeology. This activity is expected to increase the interest of students on the basic sciences and make them aware that they have a fundamental role throughout their careers.

Keywords: Problem solving, Hydrogeology, Applied Mathematics, Engineering, Elementals Differential Equations

1. Introducción

Se considera fundamental en la enseñanza de Matemática para la formación de futuros Ingenieros, poder orientar al estudiante en la aplicabilidad de los conceptos matemáticos en situaciones reales y de interés actual y lograr que puedan construir e interpretar ciertos modelos en su disciplina de interés.
Las matemáticas son una parte integral de nuestra vida cotidiana, cada vez más compleja; es por ello la importancia de enfatizar en la enseñanza, distintos tipos de

situaciones problemáticas ayudando al estudiante a formular, resolver e interpretar los resultados de los problemas involucrados en las aplicaciones (Tan, 2012).
En este sentido es que desde la primera asignatura de matemática que se cursa en la Facultad, se plantea un Taller de Resolución de Problemas, en el que se pretende orientar al alumno en la aplicabilidad de los conceptos estudiados y que a su vez, les permita asumir con mayor interés el estudio de los temas.
La resolución de problemas es un aspecto esencial en la vida profesional de los ingenieros. Proponer al alumno la labor de solucionar una situación particular, trae aparejado que deba analizar y aplicar los conceptos básicos matemáticos a los que la misma refiere, y fomentar la discusión con sus pares tal que le permita arribar a una respuesta congruente con lo que se plantea, apelando a la interpretación de las distintas situaciones.
En esta oportunidad, se propone al alumno la resolución de un problema referido a las aguas subterráneas utilizando ecuaciones diferenciales elementales, como caso práctico en las carreras de Ingeniería en Recursos Hídricos, Ingeniería Ambiental e Ingeniería en Agrimensura, que se dictan en la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral.
Se presentan a continuación, los conceptos básicos que se requieren para la interpretación de la actividad que se dicta en el marco del *Taller de Resolución de Problemas*. Es de destacar que para la resolución del problema se utilizan ecuaciones diferenciales sencillas, las que constituyen una parte fundamental de las Matemáticas, tanto desde un punto de vista puramente teórico como desde un enfoque más aplicado, coincidiendo con Gallardo (2012), que su estudio es de gran importancia en todas las carreras científicas y técnicas.

2. Fundamentos teóricos

Según Corbalán (2001), hablar de matemática y sobre todo de la manera en que se puede transmitir, tiene que ser una preocupación cotidiana, una tendencia general en todas las materias, que puede hacerse de forma directa. Hay que utilizar los temas de comentario habitual para hacer ver que las matemáticas también aportan elementos para ampliar y enriquecer la perspectiva de la realidad.
En concordancia con el pensamiento de Corbalán (2001), se ha optado por presentar un problema de Hidrología Subterránea para que el alumno resuelva e interprete los resultados que arroja, como una manera de reconocer la aplicabilidad que tienen los temas estudiados en la resolución de situaciones problemáticas reales e inherentes a la Ingeniería.
Se describen a continuación, algunos conceptos básicos para introducir al estudiante en el contexto de la temática seleccionada.
En primer término se habla de las formaciones geológicas como aquellas que permiten la circulación libre del agua por sus poros. Se refiere a los llamados *acuíferos* (del latín aqua: agua y fero: llevar) donde el agua que circula por ellos, es aprovechada por el hombre en cantidades económicamente apreciables para subvenir a sus necesidades (Custodio et al, 1976).
Dado que los acuíferos constituyen sistemas físicos cuyo funcionamiento está regulado por la recarga, descarga y movimiento del agua, es necesario mencionar la influencia de ciertas características fundamentales que describen su comportamiento mediante el uso de distintos parámetros, los que permiten predecir el funcionamiento o respuesta del acuífero frente a determinadas acciones exteriores. Entre ellos se puede citar la

transmisividad (T) que es una medida de la capacidad del medio para transmitir agua y es función de las características del acuífero.
Se conoce como pozos o perforaciones a las captaciones de agua subterránea más ampliamente utilizadas en la actualidad, por lo que el desarrollo de este trabajo, parte de dicha consideración.
Cuando se inicia el bombeo para extraer agua de una perforación (considerando que el caudal de agua que se bombea es constante), se genera un *cono* de influencia debido al descenso del nivel de agua en el acuífero. Estos descensos son estudiados en el ensayo de bombeo y una vez que se estabilizan se considera que se alcanzó el régimen permanente.
La distancia a partir de la cual se consideran despreciables los descensos producidos por el bombeo en el pozo se denomina *radio de influencia del pozo* (R).
Las ecuaciones que describen la extracción de agua subterránea empleadas en la resolución de problemas, intentan describir la forma del cono de descensos antes mencionado y se emplea para ello, el concepto de *gradiente,* introducido en la Ley de Darcy. (Custodio et al, 1976)

3. Modelización matemática para captación de aguas subterráneas

Se considera un pozo en el centro de una isla circular, en un acuífero confinado (sometido a presión, donde el agua ocupa todos los poros de la formación, saturándola completamente), con régimen permanente, lo que debe cumplir que el caudal de agua bombeada sea igual al flujo que atraviesa el cilindro con centro en el pozo.
Considerando un cilindro de radio r (distancia radial al eje del pozo) y un acuífero de transmisividad (T), constante, donde se extrae un caudal Q se cumple que:

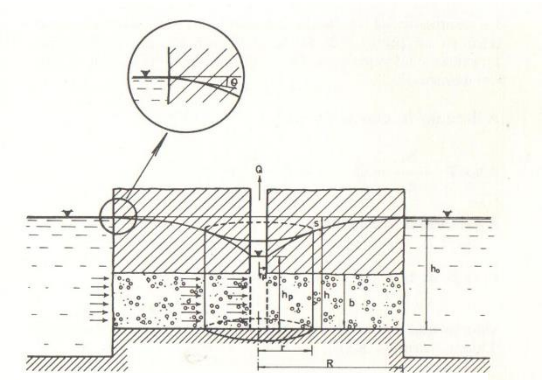

Figura 1: Pozo en acuífero confinado en el centro de una isla circular. Fuente: Custodio, E. y Llamas M.

Flujo = perímetro * transmisividad * gradiente
= caudal del pozo

$$\text{Flujo} = (2\pi\, r).T.\frac{dh}{dr} = Q \qquad (1)$$

Donde:
r: radio del cilindro [m]. Es la distancia radial al eje del pozo.
h: nivel piezométrico [m] correspondiente al cilindro considerado. Es la altura del nivel freático en la superficie libre.
dh/dr ó gradiente: derivada de la función de la curva que materializa la superficie piezométrica.
s: descenso del nivel de agua en el acuífero producido por el bombeo. El descenso s es igual a la cota de la boca del pozo h_0 menos el nivel piezométrico h, es decir: $s = h_0 - h$.
T: transmisividad [m^2/día]. Se considera constante en acuíferos homogéneos e isótropos.
Q: caudal extraído [m^3/día]
Resolviendo la ecuación (1), se tiene:

$$(2\pi\, r)\, T\,\frac{dh}{dr} = Q \;\Rightarrow\; \frac{dh}{dr} = \frac{Q}{(2\,\pi\, r)\, T} \;\Rightarrow\; \text{integrando respectoa r},\;\; h(r) = \frac{Q}{2\,\pi\, T}\int \frac{dr}{r}$$

$$\text{es decir, } h(r) = \frac{Q}{2\,\pi\, T}\ln r + C\,;\;\; \text{siendo } C = \text{constante} \qquad (2)$$

Este tipo de ecuación donde la función desconocida (h) resulta expresada con una derivada, se presentará al alumno con el nombre de *ecuación diferencial*, tema que se profundizará en otra asignatura. Por la sencillez que la misma presenta, se resolverá por los métodos de integración, tema que el alumno hasta ahora conoce.

Para determinar el valor de la constante de integración C, se supone que se conoce un nivel piezométrico h_1 a distancia r_1 del pozo de bombeo. (Fig. 2)

Es decir:

$$h_1 = \frac{Q}{2\,\pi\, T}\ln r_1 + C \;\Rightarrow\; C = h_1 - \frac{Q}{2\,\pi\, T}\ln r_1 \qquad (3)$$

Al reemplazar (3) en (2) se tiene:

$$h_1 - h = \frac{Q}{2\,\pi\, T}\ln\frac{r_1}{r} = s \qquad (4)$$

siendo s: los descensos en el pozo de bombeo [m].

La ecuación (4) se conoce como *Fórmula de Thiem* y permite determinar la forma de la superficie que describe los descensos en el pozo de bombeo que atraviesa un acuífero confinado si se conoce el descenso en un punto. (Custodio et al,1976)

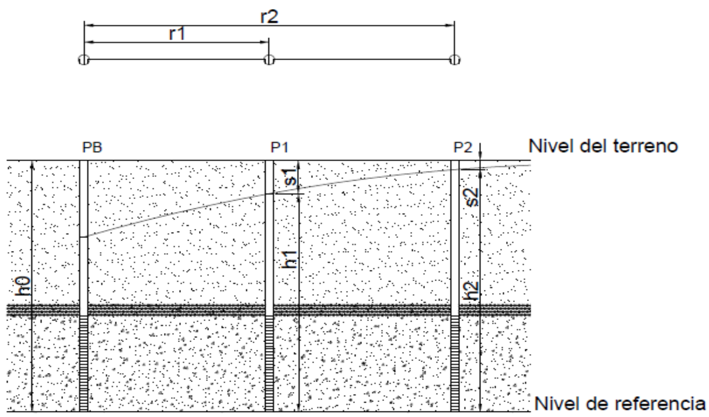

Figura 2. Pozo de bombeo y dos piezómetros de observación
Fuente; Elaboración propia

Referencias:

PB: pozo de bombeo
P1: piezómetro 1
P2: piezómetro 2
r1: distancia del pozo de bombeo al P1
r2: distancia del pozo de bombeo al P2
s1: descenso en P1
s2: descenso en P2
h1: nivel en P1
h2: nivel en P2

3.1 Problema Propuesto

El siguiente problema se presenta a doscientos cincuenta alumnos en el cursado de Matemática Básica, de duración cuatrimestral, distribuidos en comisiones de aproximadamente treinta alumnos cada una, en el marco de un Taller de Resolución de Problemas que forma parte de las actividades curriculares de esta asignatura.

El Taller se desarrolla en cada comisión, en el término de una hora a continuación de la clase práctica, con su docente actuando como orientador, quien presenta una situación problemática para que el alumno aplique algunos conceptos dados (en este caso: función lineal, derivadas, integrales), a los efectos que luego interprete y reflexione acerca de los resultados obtenidos y presente por escrito, su resolución y conclusiones en la clase siguiente.

En una localidad se desea proyectar la ubicación de un pozo ciego para volcar aguas servidas con previo tratamiento séptico. De la inspección de las inmediaciones, se observó que en el predio aledaño al caso de estudio, se localiza un pozo de bombeo del que se extrae agua para consumo humano. A los efectos de determinar la ubicación del pozo ciego sin alterar la calidad del agua extraída del pozo de bombeo cercano, ***se desea conocer el radio de influencia (R) de este pozo y los descensos (s) que se producen a 50 m (s_{50}) y 1300 m (s_{1300}) del mismo****. Para ello se realiza un ensayo en el pozo de bombeo que atraviesa un acuífero confinado. Se extrae del pozo de bombeo un caudal constante de 760 m^3/día y se registran (simultáneamente) los descensos que se producen en dos perforaciones auxiliares de medición, instaladas para la causa y ubicadas a distancias de 10 y 120 metros respecto al eje del pozo de bombeo. El ensayo de bombeo arrojó como resultado, que para la perforación ubicada a una distancia r1=10 metros del pozo el descenso observado fue de 0.282 metros y para la perforación ubicada a distancia r2= 120 metros, el descenso fue de 0.132 metros.*

3.2 Resolución

El problema pide calcular los descensos (s) y dado que la Fórmula de Thiem (ecuación 4) se presenta definida por los niveles piezométricos (h), nos interesa reemplazarlos por los descensos ($s=h_0-h$), utilizando las siguientes relaciones:

$$s_1 = h_0 - h_1 \quad \Rightarrow \quad h_1 = h_0 - s_1$$

$$s_2 = h_0 - h_2 \quad \Rightarrow \quad h_2 = h_0 - s_2$$

siendo s_1 y s_2 los descensos en sendos pozos de observación ubicados cada uno a distancias r_1 y r_2 , respectivamente, del pozo de bombeo.

Luego la ecuación (4) quedaría:

$$h_1 - h_2 = \frac{Q}{2\pi T}\ln\frac{r_1}{r_2}$$

$$(h_0 - s_1) - (h_0 - s_2) = \frac{Q}{2\pi T}(\ln r_1 - \ln r_2)$$

$$h_0 - s_1 - h_0 + s_2 = \frac{Q}{2\pi T}\ln r_1 - \frac{Q}{2\pi T}\ln r_2$$

$$s_2 - s_1 = \frac{Q}{2\pi T}\ln r_1 - \frac{Q}{2\pi T}\ln r_2 \qquad (5)$$

El radio de influencia R se obtiene cuando los descensos son despreciables, es decir, cuando $s_2 = 0 \rightarrow r_2 = R$. Luego de (5) se tiene:

$$0 - s_1 = \frac{Q}{2\pi T}\ln r_1 - \frac{Q}{2\pi T}\ln R \quad \text{y generalizando para cualquier par de valores } (s,r)$$

$$s = \frac{Q}{2\pi T}\ln\left(\frac{R}{r}\right) = \frac{2.3\ Q}{2\pi T}\log\left(\frac{R}{r}\right) \qquad (6)$$

La expresión (6) es equivalente a:

$$s = \frac{2.3\ Q}{2\pi T}\log R - \frac{2.3\ Q}{2\pi T}\log r \qquad (7)$$

Se puede observar que (7) tiene la forma de una función lineal y = b + ax cuya pendiente es $a = -\frac{2.3\ Q}{2\pi T}$, la variable independiente es x=log r, la variable dependiente es y = s y la ordenada al origen es $b = \frac{2.3\ Q}{2\pi T}\log R$.

El problema pide calcular el radio de influencia R correspondiente al pozo de bombeo y los descensos s_1 y s_2 para los radios r_1 =50 metros y r_2 =1300 metros.

Se pueden graficar los dos pares de valores conocidos (s_1,r_1) y (s_2,r_2) para obtener los valores de R y T y calcular los descensos. De esta manera, al graficar la recta (Fig. 3) se puede obtener de su pendiente el valor de T y de su ordenada al origen el valor de R. Determinados estos valores, se pueden calcular los descensos para los radios de 50 y 1300 metros.

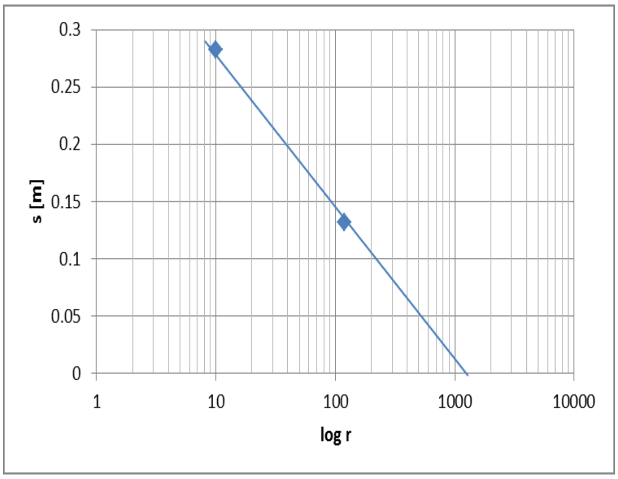

Figura 3: Ajuste de la ecuación lineal
Fuente: elaboración propia

Considerando un ciclo logarítmico completo la pendiente de la recta será:

a = (0.14 - 0.282) m = - 0.142 m

$$a = -\frac{2.3\ Q}{2\pi T} \Rightarrow T = -\frac{2.3\ Q}{2\pi a}$$

$$T = -\frac{2.3\ (760\text{m}^3/\text{día})}{2\pi(-0.142\text{m})} = 1958\ \text{m}^2/\text{día}$$

Gráficamente se determina que R = 1200 m, considerando el valor de la abscisa al origen.

Finalmente los descensos a 50 y 1300 metros serán:

$$s_{50} = \frac{2.3\ (760\text{m}^3/día)}{2\pi(1958\text{m}^2/día)}\log\left(\frac{1200\text{m}}{50\text{m}}\right) = 0.20\,\text{m}$$

$$s_{1300} = \frac{2.3\ (700\text{m}^3/día)}{2\pi(1958\text{m}^2/día)}\log\left(\frac{1200\text{m}}{1300\text{m}}\right) = -0.009\,\text{m}$$

Se puede observar que para valores de r mayores al radio de influencia del pozo de bombeo, la fórmula hace que los descensos sean negativos, lo que pierde sentido físico. El resultado se debe a que se consideró que los descensos valen cero cuando r = R.

El radio de influencia del pozo de bombeo que se obtuvo es R = 1200 metros por lo que el pozo ciego deberá instalarse a distancias mayores para evitar problemas de contaminación. Además, el descenso a los 50 metros es de 0.20 metros mientras que a los 1300 metros se considera despreciable.

4. Conclusiones

Haber trabajado en docencia universitaria desde el aula tradicional, pasando por distintas metodologías con el objeto de motivar y orientar al alumno hacia el

cumplimiento de los objetivos planteados, nos lleva a implementar nuevas metodologías acorde a las circunstancias actuales.
El caso que nos ocupa, referido a la implementación de la modalidad de resolución de problemas, como un espacio sistemático en el cursado de la asignatura Matemática Básica, en carreras de Ingeniería, ha denotado satisfactorios resultados en los alumnos respecto a modalidades anteriores, debido a la inserción de los contenidos de la asignatura a problemas específicos de la especialidad de su formación, que al momento no habían evidenciado. Esta situación conlleva al estudiante a sentirse más partícipe en las aulas y con mayor interés en el estudio de la matemática, debido a que logra entenderla, interpretarla y por ende, aplicarla.

5. Referencias bibliográficas

Corbalán, F. (2001). Matemáticas Cotidianas. *Sigma,* Nº 19, 43-50. Recuperado de http://www.hezkuntza.ejgv.euskadi.eus/r43573/es/contenidos/informacion/dia6_sigma/es_sigma/adjuntos/sigma_19/6_Matem_Cotidianas.pdf
Custodio, E., Llamas, M., Galofré, A. (1976). *Hidrología Subterránea.* Cap. 5, 8 y 9. Barcelona, España: Ediciones Omega.
Gallardo, J. M. (2012).*Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Una introducción con SAGE.* Recuperado de https://edanya.uma.es/pubrepos/EDO_con_Sage.10.pdf
Tan, S. (2012). *Matemáticas Aplicadas a los negocios, las ciencias sociales y de la vida.*
Santa Fe, México, D.F.: Cengage Learning Editores S.A.