ESTRATEGIAS PARA APROXIMAR NÚMEROS IRRACIONALES

Sandra Leonor Barrile; Stella Maris Boutet
Universidad Tecnológica Nacional. Facultad Regional Avellaneda.
sandrabarrile@hotmail.com, stellaboutet@gmail.com

Resumen

Los alumnos reconocen que $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, π y el número de oro φ son números irracionales; conociendo una aproximación de los mismos empleando la calculadora. El objetivo del siguiente trabajo es utilizar sucesión y límite de sucesiones para obtener dichos números. Con tal fin se generan distintas estrategias: en algunos casos se construye una sucesión utilizando como disparador el área de figuras geométricas (polígonos regulares y rectángulos) y en otros se utiliza sucesiones famosas como la de Fibonacci o el desarrollo de la serie de Taylor como así también algunas realizadas a lo largo de la historia por famosos Matemáticos. También se incluye referencia a la aparición del número de oro en otras disciplinas.

Palabras clave: Sucesión, Límite, Números irracionales.

Abstract

Students recognize that, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e, π φ and the number of gold are irrational numbers; knowing an approximation thereof using the calculator. The aim of this work is to use succession and inheritance limit for such numbers.
To this end generate different strategies: in some cases a sequence is generated using as a trigger area geometric shapes (regular polygons and rectangles) and other use famous estates such as Fibonacci or the development of Taylor series as well as some made throughout history by famous mathematicians reference to the appearance of the number of gold in other disciplines are also included.

Keywords: succession, limit, irrational numbers.

1. Introducción

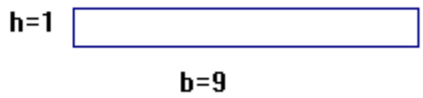
Los alumnos conocen la existencia de los números irracionales , de los cuales los más famosos son $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, e,π y el número de oro φ, el objetivo del siguiente trabajo es obtener aproximaciones de los mismos al abordar el concepto de sucesiones y límites de sucesiones. Teniendo en cuenta el objetivo general de la búsqueda de estrategias que fomenten el aprendizaje significativo, como una forma de aproximar y definir dichos números, propusimos a los alumnos generar sucesiones para números famosos. A partir de figuras geométricas conocidas, presentaron sucesiones para aproximar raíces cuadradas y el número pi, basándose en el área de rectángulos o polígonos regulares. La utilización de figuras de análisis les permitió lograr una buena aproximación de los citados números considerando que la visualización es una estrategia que favorece la comprensión del concepto.
Presentaron también sucesiones que convergen a π realizadas por distintos matemáticos a lo largo de la historia, aproximaciones del número e y del número φ, mostrando la presencia de este último en el arte y en la naturaleza.

2. Sucesión que converja a $\sqrt{a}$

Se considera el siguiente algoritmo para calcular la raíz cuadrada de un número a, es decir se quiere calcular $\sqrt{a}$

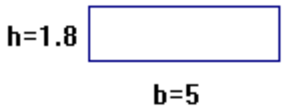
Para fijar ideas se toma a=9 (sabiendo que $\sqrt{9}=3$)

Se considera un rectángulo de lados 1 y 9 : b=9 h=1; su área es b∗h=9



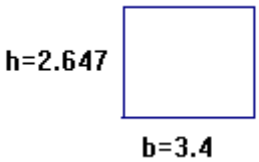
A continuación el rectángulo que se obtiene de tomar $b = \frac{b+h}{2}$ e igual área:

$$b = \frac{1+9}{2} = 5 \qquad h = \frac{9}{5} = 1.8$$



Se vuelve a tomar como base del nuevo rectángulo la suma de la base y altura últimas dividido 2

$$b = \frac{1.8+5}{2} = 3.4 \qquad h = \frac{9}{3.4} = 2.647$$



el rectángulo se parece cada vez más a un cuadrado

Si se repite el procedimiento se obtiene b=3.02 y h=2.98

Con otro paso resulta b=3 y h=3

Si se sigue repitiendo el procedimiento resultará b=3 y h=3 en todos los pasos.

Procedimiento para calcular $\sqrt{a}$ para un a cualquiera:

Se toma$b_1 = 1$ $\quad h_1 = a = \frac{a}{b_1}$

En el segundo paso

$$b_2 = \frac{b_1+h_1}{2} = \frac{b_1+a/b_1}{2} = \frac{1}{2}\left(b_1 + \frac{a}{b_1}\right) \qquad (h_2 = a/b_2)$$

el siguiente será $\quad b_3 = \frac{b_2+h_2}{2} = \frac{1}{2}\left(b_2 + \frac{a}{b_2}\right)$

$$\vdots$$

si en el paso n se calcula b_n y $h_n = \frac{a}{b_n}$ se puede construir el siguiente rectángulo de lados b_{n+1} y h_{n+1} donde

$$b_{n+1} = \frac{b_n+a/b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(b_n + \frac{a}{b_n}\right)$$

Si se realiza un número grande de pasos, los rectángulos se irían pareciendo cada vez más a un cuadrado que tendrá como lado $b = \sqrt{a}$; se puede decir que estos números b_n se acercan cada vez más, a medida que tomamos n cada vez más grande, a $\sqrt{a}$

3. El número π

Arquímedes fue el primer matemático de la historia en intentar hacer “una buena aproximación” de Pi. Utilizando la geometría conocida en el año 200 a.C. fue capaz obtener una buena aproximación del número Pi, aplicando el método de exhaución, inscribiendo y circunscribiendo en una circunferencia polígono de hasta 96 lados, determinando que era mayor que 223/71, pero menor que 22/7.

Se propone aproximar el número π realizando el cálculo del perímetro de polígonos regulares inscriptos en una circunferencia de radio 1. Cuanto mayor sea el número de lados de un poligonal su perímetro será más “parecido” al perímetro de la circunferencia.
Se consideran los polígonos de lados: 4, 8, 16, 32,…,2n+1

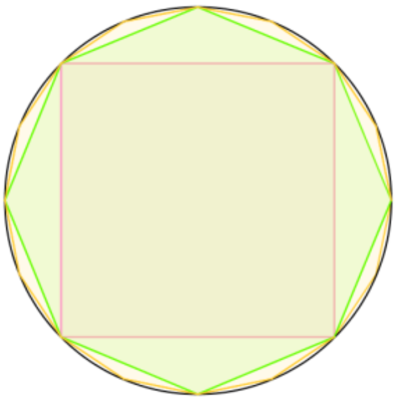


Figura 1: Poligonos regulares de 2^n lados

Utilizando el teorema de Pitágoras se calcula el valor de sus lados.
Para el polígono de 4 lados

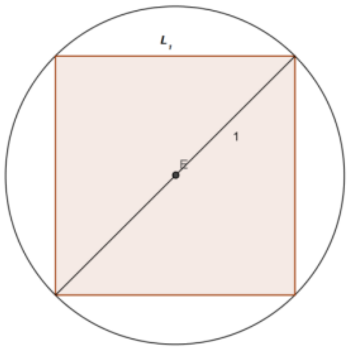


Figura 2: Polígono de 4 lados

Como la diagonal del cuadrado vale 2, el lado $L_1 = \sqrt{2}$
Para el polígono de 8 lados (2^3)

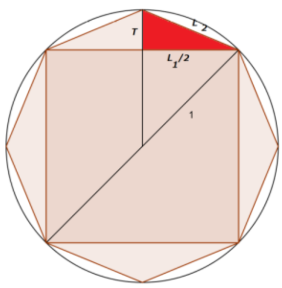


Figura 3: Polígono de 8 lados

El lado T=$1-\frac{\sqrt{2}}{2}=1-\sqrt{1-\left(\frac{L_1}{2}\right)^2}$, entonces $L_2=\sqrt{\left(1-\frac{L_1}{2}\right)^2+\left(\frac{L_1}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{4-L_1^2}}$

Para el polígono de 16 lados (2^4)

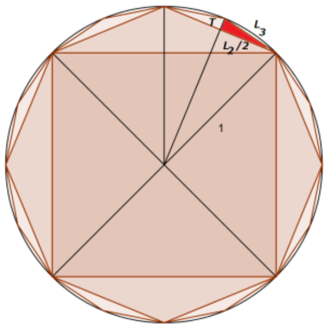


Figura 4:Polígono de 16 lados

T=$1-\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}$ y $L_3=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{L_2}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{4-L_2^2}}$

Para el polígono de 2^{n+1} lados se obtiene

$$L_n=\sqrt{\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{L_{n-1}}{2}\right)^2}=\sqrt{2-\sqrt{4-L_{n-1}^2}}$$

Se construye la sucesión de perímetros:

$P_1=2^2 L_1$, $P_2=2^3L_2$,….,$P_n=2^{n+1}L_n$

$$P_n=2^{n+1}\sqrt{2-\sqrt{4-L_{n-1}^2}}$$

La sucesión anterior tiende a 2π y por lo tanto dividiendo por 2 la sucesión,

$$a_n=2^n\sqrt{2-\sqrt{4-L_{n-1}^2}}$$

tiende a π

4. El número e

Se plantean las siguientes sucesiones que tienen como límite el número e , calcularon algunos de sus términos para comparar con la expresión que da la calculadora, observando que los términos de la sucesión se aproximan al de la calculadora cuanto mayor es el valor de n.

i) $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

El límite de esta sucesión es utilizado, habitualmente, para definir el número e. La cual fue obtenida por Jacob Bernoulli, hacia 1620, al realizar el estudio del problema de interés compuesto.

n	a_n	*Aproximación (4 decimales)*
1	*2*	*2*

2	*9/4*	*2.25*
3	*64/27*	*2.3704*
4	*625/256*	*2.4414*
50	*23906 104021463 695675944 970232802 506562109 352795956 288572339 180887929 402783866 828065001 / 8881 784197001 252323389 053344726 562500000 000000000 000000000 000000000 000000000 000000000*	*2.6916*

Tabla 1: Algunos términos de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

ii) $\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n!} \end{cases}$

Esta es la sucesión generada al aplicar el Polinomio de Taylor a la función e^x centrada en x=0

n	*bn*	*Aproximación*
1	*2*	*2*
2	*5/2*	*2.5*
3	*8/3*	*2.6666…*
10	*9864101/3628800*	*2.718281801..*

Tabla 2: Algunos términos de $b_1 = 2;\ b_n = b_{n-1} + \frac{1}{n!}$

5. El número de oro

El número de oro simbolizado con la letra φ, es la medida de la perfecta proporción entre dos partes desiguales.
Se propone realizar el proceso de división de un rectángulo que verifica la proporción $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$, obteniéndose nuevos rectángulos y cuadrados más pequeños que siguen verificando la proporción, que al unir, como se indica en la figura, se construye la llamada espiral aurea. Estos rectángulos y la espiral aparecen en campos tan variados como el reino vegetal, animal, la poesía, la música, la arquitectura, el arte, etc.

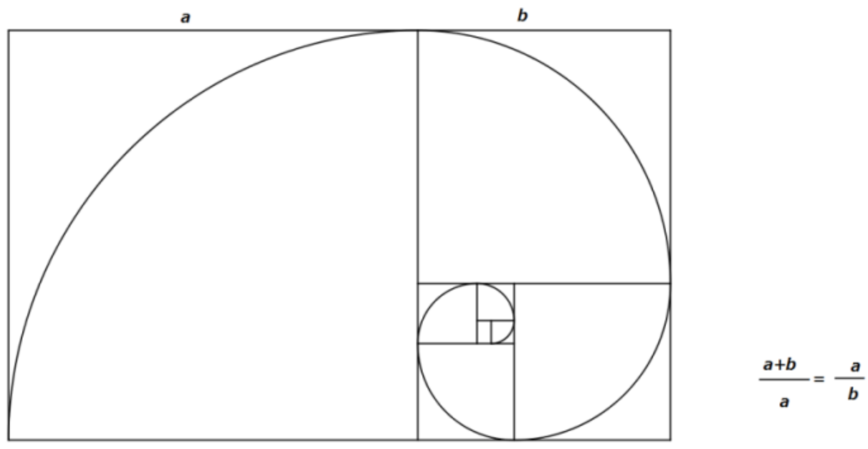


Figura 5: Rectángulos aureos para construir la espiral aurea

Figura 6: Concha de Nautilus

Figura 7: Semillas de girasol

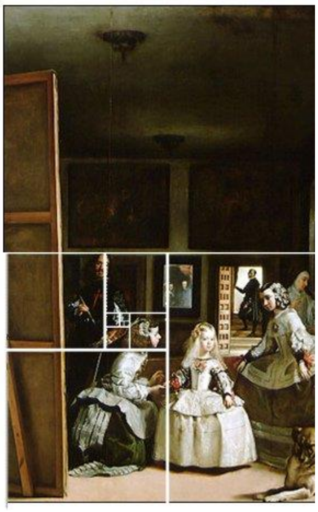


Figura 8: Las Meninas de Velázquez

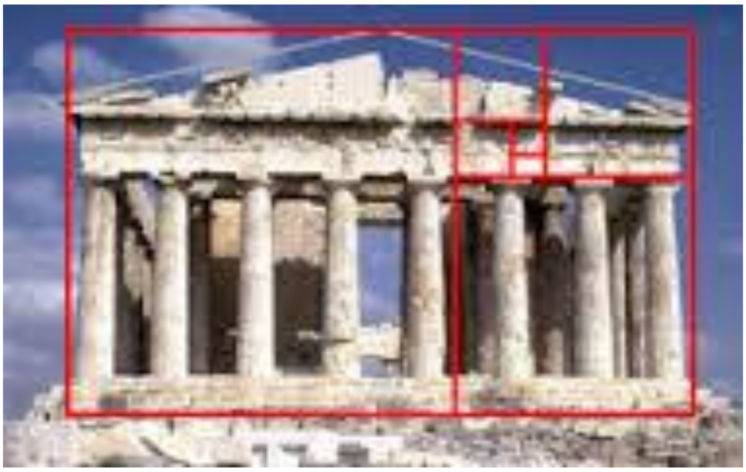


Figura 9: Fachada del Partenón

El número de oro es la solución positiva de la ecuación $x^2-x-1=0$ que se puede escribir utilizando otro número irracional como $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Presentaron las siguientes sucesiones que convergen a ϕ

- La sucesión de Fibonacci:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8 , …… (Cada término se obtiene sumando los dos términos anteriores)

Si tomamos dos números consecutivos de esta sucesión y realizamos el cociente obtenemos una nueva sucesión cuyo límite es el número φ

La sucesión que queda definida por $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 1 \\ a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{a_{n-2}} \end{cases}$ tiene como límite el número φ.

a_n	b_n	$F_n=b_n/a_n$
2	*3*	*1.5*
3	*5*	*1.6666….*
13	*21*	*1.6153846..*
21	*34*	*1.6190476..*

Tabla 3: Algunos términos de la sucesión de Fibonacci y sucesión F_n

- Otra sucesión que permite aproximar el número ϕ

$$a_1 = a \quad ;$$

$$a_n = \frac{1}{a_{n+1}} + 1$$

Con a un número real.

n	*a=2*	*a=5*	*a=10*
2	*3/2= 1. 5*	*6/5= 1. 2*	*11/10= 1. 1*
5	*21/13= 1. 6153846..*	*28/17= 1. 6470588..*	*53/32= 1. 65625*
6	*34/21=1.6190476..*	*45/28= 1. 6071428..*	*85/53= 1. 60377358..*

Tabla4: Algunos términos de la sucesión $a_1 = a$; $a_n = \frac{1}{a_{n+1}} + 1$ para distintos valores de *a*

6. Referencias

Noriega,R (1984).*Calculo diferencial e integral,*Editorial Docencia.Argentina
Rudin,W (1976). *Principles of Mathematical Analysis,* Editorial McGraw-Hill. USA
Spivak,M (1992). *Calculus*, *Cálculo infinitesimal.* Editorial Reverté SA. España
http://contenidosdigitales.ulp.edu.ar/exe/matematica1/nmeros_irracionales_famosos.html
http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm
http://xtec.cat/~fgonzal2/curio_irrac.html