CP-349

DEVAGAR SE VAI AO LONGE: O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE CONCEITOS MATEMÁTICOS MAIS COMPLEXOS DESDE O INÍCIO DA ESCOLARIZAÇÃO

Rute E. S. R. Borba
resrborba@gmail.com
Universidade Federal de Pernambuco – Brasil

Resumo

Alguns conceitos matemáticos mais complexos podem ser trabalhados desde cedo na escola, a partir de situações mais simples e por uso de recursos adequados, proporcionando oportunidades para as crianças construírem ideias iniciais, as quais servirão de base para desenvolvimentos conceituais posteriores. A partir desses desenvolvimentos, raciocínios matemáticos diversos poderão ser ampliados. Ressalta-se, nesse trabalho de desenvolvimento de conceitos, o importante papel das representações simbólicas (Nunes, 1997; Vergnaud, 1987; Duval, 2012) e, para exemplificar, apresentarei resultados de pesquisas quanto a conhecimentos iniciais, por parte de crianças novas, de números inteiros, de situações probabilísticas e combinatórias, a partir do uso de registros de representação por elas construídos ou aprendidos. Também discutirei implicações educacionais – tais como a necessidade de maior articulação do trabalho entre os professores de distintos níveis de ensino e a necessidade de formação adequada dos professores (Ball, 1993), considerando-se o desenvolvimento de conceitos ao longo da escolarização básica.

Introdução

O objetivo maior da Educação Matemática, a meu ver, é o desenvolvimento de modos de raciocinar. Mais do que o aprendizado de conteúdos matemáticos específicos, a finalidade é desenvolver nos estudantes seus raciocínios aritmético, relacional, algébrico, proporcional, probabilístico, combinatório, estatístico e geométrico, dentre outros. Defendo, assim, junto a outros educadores matemáticos, que trabalhar na escola com conteúdos matemáticos específicos não é um fim em si mesmo, mas deve ter como objetivo maior o desenvolvimento de variadas formas de raciocínio matemático.

Diversas teorias da Educação Matemática reforçam a visão do desenvolvimento de raciocínios no ensino e na aprendizagem da Matemática. Dentre essas, ressalto a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996) e a dos Conhecimentos Docentes (Ball, 1993). Ao tratar do desenvolvimento conceitual de estudantes e do aprimoramento dos conhecimentos

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

de conteúdo e pedagógico de professores, essas teorias implicam que o aprendizado matemático vai além da aprendizagem de conceitos isolados, envolvendo conceitos articulados e o estímulo, ao longo do período de escolarização básica, ao desenvolver de formas de raciocínio.

Vergnaud (1996) aponta que os conceitos se originam e se desenvolvem em campos conceituais e, baseando-se nesse pressuposto, há necessidade de se lidar com múltiplos conceitos, em estreita articulação, nas atividades matemáticas propostas pelas escolas. A ideia de campo conceitual – além de remeter à articulação entre conceitos estruturalmente e cognitivamente próximos – também implica em considerar o desenvolvimento conceitual ao longo de toda a escolarização. O que inicialmente é tratado com noções intuitivas possuídas pelos estudantes, pode (e deve) voltar a ser trabalhado em sucessivos níveis de maior complexidade, ampliando, a cada revisita de um conceito, o entendimento do campo conceitual ao qual ele pertence e, assim, desenvolvendo formas de raciocinar.

Ao longo desse texto, e apresentação no evento, explorarei alguns conceitos matemáticos, indicando possíveis articulações entre conteúdos e possíveis caminhos de aprofundamento com o passar dos anos escolares – possibilitando ampliação de modos de raciocínio. Serão tomados como exemplos: números inteiros, a probabilidade e a combinatória, evidenciando ideias matemáticas inicialmente possuídas pelas crianças e a partir das quais poderão desenvolver, por meio de representações simbólicas adequadas, seus raciocínios relacional, probabilístico e combinatório.

Ao discutir os exemplos, ressaltarei o papel das representações simbólicas, considerando que um conceito não deve ser confundido com sua representação e, para tal, distintos registros devem ser trabalhados no ensino (Duval, 2012), e, ao mesmo tempo, defenderei como o desenvolvimento conceitual tem forte influência dos registros utilizados (Nunes, 1997). Pensar sobre um mesmo conceito utilizando representações simbólicas diferenciadas – como o registro escrito e o uso de cálculo oral, por exemplo – possibilita o pensar sobre o conceito em distintas formas, evitando confundir o conceito com sua representação, e estimulando múltiplos olhares a um mesmo conceito.

Na visão de desenvolvimento de raciocínios, as escolas, e seus professores, precisam estar preparados para o trabalho que tenha esse desenvolver como objetivo principal. Nesse

ISBN 978-84-945722-3-4

sentido, a articulação entre conhecimentos de conteúdo e conhecimentos pedagógicos (Ball, 1993) se faz necessário para, amparado no domínio dos conteúdos matemáticos, desenvolver propostas pedagógicas cujo alvo maior seja o desenvolvimento de modos de raciocinar. Dentre os conhecimentos apontados por Ball e colaboradores, tem-se o *conhecimento do horizonte do conteúdo*, ou seja, ter em mente o desenvolvimento de conteúdos ao longo de períodos escolares ou, melhor ainda, no percurso de toda a escolarização básica. Assim pedagogos (que ensinam Matemática nos anos iniciais de escolarização) e licenciados em Matemática (que lecionam nos anos posteriores) necessitam estar conectados em prol do desenvolvimento matemático dos estudantes. O desenvolvimento de raciocínios matemáticos é, portanto, corresponsabilidade dos professores dos distintos níveis de ensino e isso implica em valorização mútua do trabalho realizado por cada um. Para o alcance dessa conexão maior entre professores dos diferentes níveis da educação básica, sugiro maior integração destes em programas de formação inicial e formação continuada.

Os exemplos de conceitos matemáticos aqui explorados serão discutidos à luz de um olhar de seus horizontes – sempre buscando entender: Como atender ao dito popular 'Devagar se vai ao longe' no ensino e na aprendizagem da Matemática? Como trabalhar a complexidade conceitual crescente ao longo da escolarização? Como melhor auxiliar os estudantes a desenvolverem modos de raciocínio matemático que lhes sejam úteis, ampliando suas formas de raciocinar e alargando suas compreensões do mundo que os cerca?

Desenvolvendo o raciocínio relacional de crianças novas

Em estudo de tese de doutorado (Borba, 2002), observei o desempenho de crianças de 7 e 8 anos de idade ao responderem, em contexto de jogo (pinball), questões referentes a números inteiros (positivos e negativos). Ressalta-se que esse conteúdo é, geralmente, inicialmente trabalhado na escola quando os estudantes estão com 12 ou 13 anos de idade.

A motivação do estudo se deu a partir da observação de resultados de estudos anteriores os quais, por um lado, indicavam que crianças novas já demonstravam compreensões de números negativos e outros estudos, por outro lado, evidenciavam dificuldades de adolescentes ao tratarem números inteiros em seus aprendizados escolares.

ISBN 978-84-945722-3-4

Em uma análise atenta desses estudos anteriores, à luz da Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996), observei que o significado de número negativo enquanto *medida* já é entendido por grande parte das crianças, mas o significado de *relação* ainda precisa ser desenvolvido e a escola tem importante papel nesse desenvolvimento. Também a escola deve atentar para o papel da explicitação de representações simbólicas, em particular no que diz respeito ao uso do sinal '-' (menos), com seus múltiplos significados, tais como transformação negativa, subtração (resultando em um resto ou diferença), medida negativa, relação negativa, oposto de um número negativo e oposto de uma transformação negativa.

Apresentarei, em minha fala, resultados do levantamento efetuado que evidenciam a influência dos distintos significados, propriedades e representações na compreensão do número inteiro. Esses resultados reforçam que é importante o desenvolvimento de raciocínio relacional (*quanto a mais* ou *quanto a menos*), amparado em representação simbólica explícita compreensível, e que esse modo de pensar pode ser base de outros raciocínios, tal como o algébrico. Compreender desde cedo, por exemplo, que, em um jogo, ganhar 7 pontos (representado por fichas verdes) e perder 9 (representado por fichas amarelas) significa possuir '2 pontos a menos' (as duas fichas amarelas restantes da comparação entre fichas verdes e amarelas), independente de quanto era a pontuação inicial, é um raciocínio relacional útil também à construção e desenvolvimento do raciocínio algébrico.

Dessa forma, crianças em início de escolarização têm condições de começar o desenvolvimento de raciocínios relacionais, tais como os contidos em situações que envolvem números positivos e negativos. Não se trata de formalização ainda dos registros de números negativos, mas o estímulo ao pensar em situações que envolvem *medidas*, *relações* e *transformações* negativas. Esse trabalho requer dos professores a compreensão de como iniciar a discussão sobre números negativos e de como aprofundar o entendimento desse conceito ao longo da escolarização.

Desenvolvendo o raciocínio probabilístico desde o início da escolarização

Bryant e Nunes (2012) apontam quatro compreensões necessárias à aprendizagem da probabilidade: da *aleatoriedade*, de *espaço amostral*, da *quantificação* e *comparação de*

ISBN 978-84-945722-3-4

probabilidades e de *correlação*. Essas compreensões não se apresentam de forma desarticulada em situações probabilísticas, mas podem ser analisadas isoladamente.

Em situações de jogo, Batista da Silva (2016) observou que crianças de 7 a 11 anos possuem noções intuitivas que têm potencial para o desenvolvimento de seus raciocínios probabilísticos. Para as crianças do estudo, aleatoriedade estava associada à sorte ou ao azar e elas eram muitas vezes corretas em seus julgamentos de eventos pouco prováveis (a obtenção de resultado 2 na soma de dois dados lançados, por exemplo) e de eventos impossíveis (obtenção da soma 1 no lançamento de dois dados). As crianças evidenciaram fragilidades no julgamento de eventos independentes, cometendo erro de *recência positiva* (acreditando que, se no lançamento de um dado, deu 2 repetidas vezes, daria 2 no lançamento seguinte) ou erro de *recência negativa* (julgando que não daria 2 no próximo lançamento). Embora as crianças fossem bem-sucedidas no levantamento de alguns elementos do espaço amostral, falharam em perceber que, no lançamento de dois dados, obter 3 em um dado azul e 5 em um dado vermelho é diferente de obter 3 em um dado vermelho e 5 em um dado azul.

O estudo de Batista da Silva mostrou que, apesar de algumas limitações, o contexto de jogos (envolvendo dados e moedas) pode ser favorável ao desenvolvimento de raciocínios probabilísticos de crianças novas, levando-as a refletirem sobre demandas cognitivas necessárias à compreensão da probabilidade. Assim, de modo lúdico, as reflexões iniciais a respeito da probabilidade poderão ser exploradas posteriormente de outras formas – em experimentações, por exemplo – possibilitando um mais amplo desenvolvimento do raciocínio probabilístico.

Outros estudos (Santana, 2011; Campos e Pietropaolo, 2013; Bernabeu, Torres, Garcia e Batanero, 2015) apontam para a fragilidade de conhecimentos probabilísticos de professores. Essa fragilidade nos alerta sobre a necessidade de melhor formação docente, em particular no que diz respeito ao trabalho integrado de professores de início de escolarização com professores de anos posteriores na abordagem da probabilidade.

Desenvolvendo o raciocínio combinatório da Educação Infantil ao Ensino Médio

Um terceiro exemplo de desenvolvimento de raciocínio matemático, a ser tratado do início ao final da escolarização básica, é o envolvido em situações combinatórias. Em texto

ISBN 978-84-945722-3-4

anterior (Borba, 2010), apontei que as variadas situações (basicamente *produtos de medida*, *arranjos*, *combinações* e *permutações*) podem ser abordadas da Educação Infantil ao Ensino Médio, levando em consideração invariantes de *escolha* e de *ordenação* das distintas situações. Há princípios comuns em problemas combinatórios e também aspectos diferenciadores no que diz respeito a como os elementos são escolhidos e se a ordem dos elementos caracteriza, ou não, possibilidades distintas. Assim, as semelhanças e diferenças precisam ser abordadas no trabalho com situações combinatórias.

Para o desenvolvimento do raciocínio combinatório, os estudantes, ao longo da escolarização, podem (e devem) ser levados a refletir sobre a necessidade de levantar todos os elementos do espaço amostral das referidas situações e também a pensarem em como determinar todas as possibilidades sem ter que contá-las uma a uma. Assim, a gradativa complexidade das situações combinatórias trabalhadas na escola pode possibilitar um amplo desenvolvimento conceitual dos estudantes – articulando também seus raciocínios combinatório e probabilístico. Como apontam Navarro-Pelayo, Batanero e Godino (1996), esses dois modos de raciocínio se articulam estreitamente, pois, para a construção de todos os possíveis eventos de determinado espaço amostral, uma construção combinatória se faz necessária.

Um possível caminho no *horizonte do ensino de Combinatória* seria: trabalho inicial com materiais manipuláveis e desenhos; seguido de listagens e árvores de possibilidade; e posteriores trabalhos com expressões numéricas, princípio multiplicativo e fórmulas. Esse conjunto de usos de representações simbólicas diversificadas, certamente auxilia no desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os materiais podem ser livremente manipulados pelas crianças, possibilitando verificar as distintas possibilidades de combinações. Os desenhos por elas produzidos, principalmente antes do domínio da escrita, também são formas das crianças representarem os problemas combinatórios. Ao listarem as combinações ou ao construírem árvores de possibilidades, os estudantes também levantarão o espaço amostral e poderão refletir, como apontam Azevedo, Borba e Bittar (2016), sobre como desses registros pode-se chegar a expressões numéricas e ao princípio multiplicativo. Todas essas construções anteriores poderão auxiliar na compreensão das fórmulas

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

introduzidas no Ensino Médio – não deixando para esse nível de ensino a responsabilidade de todo (ou de maior parte) do estudo de situações combinatórias.

Rocha (2011) aponta que, à semelhança dos estudantes, professores de todos os níveis de ensino, possuem dificuldades na compreensão do invariante da ordenação – em particular na diferenciação entre *arranjos* e *combinações*. Essa autora também observou que escolhas didáticas, no ensino de Combinatória, variam em função da formação inicial e experiências de ensino dos professores – o que reforça o aqui defendido de que as trocas entre professores de diferentes níveis de ensino é necessária e pode ser muito benéfica. O estudo de Rocha, assim, ressalta a necessidade de maior aprofundamento de conhecimentos docentes (específicos de conteúdo, de ensino e de aprendizagem de alunos, dentre outros) para que seja realizado na escola um efetivo trabalho de desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Considerações

Finalizo apresentando algumas questões que resultam do que foi aqui discutido.

Defendo um início mais precoce de trabalho na escola com conceitos matemáticos mais complexos, tais como os conceitos de número negativo e os envolvidos em situações probabilísticas e combinatórias. Usualmente esses conteúdos são trabalhados mais tarde na escola, mas defendo que atividades adequadas podem ser desenvolvidas, com o intuito de iniciar, desde cedo, o desenvolvimento de formas de raciocínio, tais como o relacional, o probabilístico e o combinatório.

Assim, acredito que pesquisar o que crianças de início de escolarização já conhecem ou podem vir a conhecer a respeito de conceitos matemáticos precisa ser uma das prioridades em estudos da Educação Matemática. Isso está de acordo com o crescente interesse mundial de pesquisas na área realizadas com crianças novas (Elia e Mulligan, 2016), situada dentro de uma discussão mais ampla a respeito da idade que se deve começar a trabalhar conceitos matemáticos específicos na escola e quais conceitos devem ser inicialmente trabalhados.

Outro ponto resultante das discussões aqui levantadas diz respeito a como a defesa de um trabalho mais precoce com conceitos matemáticos mais complexos se ampara em resultados de pesquisa que trazem evidências de compreensões inicias a respeito desses

ISBN 978-84-945722-3-4

conceitos. Assim, defendo que não se deve menosprezar conhecimentos já em processo de construção, pois o trabalho mais precoce pode propiciar desenvolvimentos mais amplos.

Ressalta-se que esse trabalho mais precoce necessita se amparar em formas de representação simbólica adequadas a crianças mais novas. E esse cuidado ressalta o muito importante papel que as representações simbólicas possuem no aprendizado matemático, no desenvolvimento de formas de raciocinar.

As defesas aqui efetuadas implicam na necessidade de uma maior articulação na formação inicial e continuada de professores de diferentes níveis de ensino, pois, para o desenvolvimento de raciocínios matemáticos ao longo da escolarização, os professores devem se entender como uma equipe trabalhando em um *continuum*. Dessa forma, cabe pensar em como fomentar mais trabalho conjunto entre professores de diferentes níveis de ensino e como integrar mais processos de formação (tais como eventos científicos e cursos de formação continuada) de professores que atuam no início da escolarização e os que atuam em anos posteriores. Um trabalho mais articulado entre professores de distintos anos escolares pode possibilitar maior desenvolvimento do conhecimento docente *do horizonte*, ou seja, dos conhecimentos já trabalhados, sendo trabalhados e ainda a serem trabalhados.

E, para finalizar, ressalto que as discussões aqui efetuadas implicam em repercussões junto aos que formulam e desenvolvem políticas públicas, aos que elaboram materiais didáticos e aos que planejam programas de formação de professores. Se vamos ter como foco principal o desenvolvimento de formas de raciocínio matemático ao longo de toda a escolarização básica, é preciso ter-se políticas públicas que tenham essa prioridade e que possibilitem a sua realização.

Referencias bibliográficas

Azevedo Montenegro, J,; Borba, R.; Bittar, M. (2016). A identificação de conversões em situações combinatórias por alunos de anos iniciais. In *Anais do X Seminário Sul-Mato-Grossense de Pesquisa em Educação Matemática*, Campo Grande.

Ball, D. L. (1993). With an eye on the mathematical horizon: Dilemmas of teaching elementary school mathematics. *Elementary School Journal*, *93*(4), 373–397.

Batista da Silva, R. C. (2016). É a moeda que diz não é a gente que quer não: conhecimentos probabilísticos de crianças em situações de jogos. *Dissertação de Mestrado*. Universidade Federal de Pernambuco, CE. Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica.

ISBN 978-84-945722-3-4

Bernabeu, C. B.; Torres, E.; Gómez Garcia, J. M. C.; Batanero, C. D. (2015). Conocimiento matemático de profesores de primaria en formación para la enseñanza de la probabilidad: un estudio exploratório. *Práxis Educativa*, Ponta Grossa, v. 10, n. 1, p. 11-34.

Borba, R. (2002) The effect of number meanings, conceptual invariants and symbolic representations on children's reasoning about directed numbers. *Tese de Doutorado.* Oxford Brookes University.

Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, Bahia.

Bryant, P.; Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability:* a literature review. Nuffield Foundation. 2012, 86p. Disponível em http://www.nuffieldfoundation.org/sites/default/files/files/Nuffield_CuP_FULL_REPORTv_FINAL.pdf. Acessado em 22.09.2014.

Campos, T. M.; Pietropaolo, R. C (2013). Um estudo sobre os conhecimentos necessários para ensinar noções concernentes à probabilidade nos anos iniciais. In Borba, R. & Monteiro, C. (Orgs). *Processos de ensino e aprendizagem em Educação Matemática.* Recife: Ed. Universitária UFPE.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297.

Elia, I.; Mulligan, J. (2016). *Abstract of TSG 1:* Early childhood mathematics education (up to age7). Disponível em: http://www.icme13.org/topic_study_groups

Navarro-Pelayo, V.; Batanero, M. C.; Godino, J. Díaz. (1996). Razonamiento combinatorio en alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, v. 8(1), p. 26-39.

Nunes, T. (1997). Systems of signs and mathematical reasoning. In T. Nunes and P. Bryant (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics. An International Perspective* (pp. 29-44). Hove (UK): Psychology Press.

Rocha, C. A. (2011). Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos. *Dissertação de Mestrado*. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife.

Santana, M. O acaso, o provável e o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado. Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE. Recife.

Vergnaud, G. (1987). "Conclusion". In C. Javier (Ed.) *Problem of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hove (UK): Lawrence Erlbaum Associates Ltd.

Vergnaud, G. (1996) A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) *Didáctica das Matemáticas*. Horizontes Pedagógicos, Lisboa, 1996.

ISBN 978-84-945722-3-4