CR-33

FORMACIÓN DE CONJETURAS Y SU VALIDACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Profesor Ángel Homero Flores Samaniego
ahfs@unam.mx

Colegio de Ciencias y Humanidades-UNAM

Modalidad: CR

Nivel educativo: Todos

Núcleo temático: Investigación en Educación Matemática

Palabras clave: Argumentación matemática, Formación de conjeturas, Esquemas de argumentación, Validación del conocimiento escolar.

Resumen

La creación de conocimiento y su validación es una actividad social que involucra, en primer término, a la comunidad interesada en tal conocimiento. En el caso de la matemática, un cierto conocimiento es validado por la comunidad de matemáticos interesados en él; en su caso, son también los encargados de rechazarlo o de poner en duda su validez.

En este proceso de creación y de validación de conocimiento, la argumentación juega un papel central; entenderemos por argumentación la serie de razonamientos o hechos encaminados a explicar un resultado o con el propósito de persuadir a otros de su validez o de la certeza de una conjetura.

Con respecto a la matemática escolar, ¿cómo se valida el conocimiento matemático que se genera en el aula?, ¿qué papel juega la argumentación matemática en el aprendizaje del estudiante?, ¿qué tipo de argumentación utilizan los estudiantes cuando justifican resultados en resolución de problemas?

En la presente plática se abordarán estos temas y algunos otros relacionados con la formación de conjeturas matemáticas desde la perspectiva de una enseñanza-aprendizaje centrada en el estudiante.

Introducción

Es posible encontrar a la matemática en cualquier actividad humana, desde el quehacer científico, hasta las manifestaciones culturales y artísticas. Así pues, resulta importante desarrollar en los individuos los aspectos básicos de la matemática que permitirán

ISBN 978-84-945722-3-4

desempeñarse satisfactoriamente tanto en contextos académicos y científicos como en sociales y laborales.

Para entender la naturaleza de la matemática y la manera en que se construye el conocimiento matemático, hay que reflexionar sobre la forma en que se genera y se valida el conocimiento matemático, proceso muy parecido al que sigue la validación del conocimiento científico en general.

Básicamente, los resultados que un matemático obtiene de sus investigaciones aparecen, en primer término, como una serie de conjeturas que debe validar. Es muy probable que una conjetura se forme a partir de una serie de hechos aislados, siguiendo un proceso abductivo (Pierce, 2014). Si las evidencias obtenidas convencen al matemático de su plausibilidad (proceso inductivo), es decir, si hay un proceso de auto convencimiento de la veracidad de sus hallazgos, entonces se aventura a buscar una demostración matemática, basada en procesos deductivos. Una vez que tiene la demostración de su conjetura, la somete a la revisión y al escrutinio de sus colegas, dando inicio, así, a un proceso de persuasión sobre su validez. Si los resultados son lo suficientemente interesantes o relevantes para el conocimiento y la teoría matemática, es posible que la revisión de la demostración lógica de la conjetura se haga de tal manera que se dé una serie de pruebas y refutaciones hasta que sea aceptada o rechazada por la comunidad (Lakatos, 1976).

Si la conjetura es aceptada como válida, entonces adquiere el estatus de teorema; si no, la conjetura puede utilizarse con las reservas del caso. En ambos casos, teorema y conjetura, vienen a formar parte del conocimiento matemático.

Lo interesante de este proceso de formación de conjeturas y su validación, es que el pensamiento reflexivo juega un papel importante. Esto es, el investigador, siguiendo más o menos en el mismo orden los pasos lógicos del pensamiento reflexivo definidos por Dewey (1989), percibe que algo puede ser importante; ubica ese algo y lo define o trata de definirlo; sugiere posibles explicaciones en forma de una conjetura; razona de manera lógica sobre la validez de su conjetura; y busca mayores evidencias de ésta, hasta que termina por aceptarla o rechazarla. Ahora bien, este conocimiento se da en el seno de una comunidad, por ello la necesidad de someterlo a su escrutinio; esta misma necesidad de que

ISBN 978-84-945722-3-4

el resultado sea reconocido como válido por la comunidad, hace que el investigador se someta a una serie de reglas establecidas tanto en la disciplina misma como por la comunidad en la que se desenvuelve. En este caso, hablamos del respeto a las reglas matemáticas y la honestidad en los planteamientos.

En una didáctica matemática centrada en el aprendizaje (Juárez, 2015), es posible reproducir en buena medida el proceso de creación de conjeturas y su validación. Esto en un proceso que implica el desarrollo del pensamiento reflexivo por parte del estudiante. En el presente texto haré una reflexión sobre la adquisición de conocimiento matemático en una didáctica centrada en el aprendizaje. La disquisición se hará alrededor de la respuesta a las siguientes preguntas: ¿cómo se valida el conocimiento matemático que se genera en el aula?, ¿qué papel juega la argumentación matemática en el aprendizaje del estudiante?, ¿qué tipo de argumentación utilizan los estudiantes cuando justifican resultados en resolución de problemas?

Matemática, pensamiento matemático y educación matemática

Iniciaré mi reflexión definiendo lo que se entenderá por estos tres términos, fundamentales en nuestro ámbito de conocimiento.

Por matemática me referiré al cuerpo de conocimiento sobre entes abstractos como números, cuerpos geométricos, ecuaciones, etcétera, y las relaciones que tienen entre sí. Como cuerpo de conocimiento, la matemática es única, por tanto, en mi concepción, no hay muchas matemáticas o las matemáticas. La matemática tiene características especiales que hacen que se le pueda utilizar como un lenguaje para comunicar ideas; como una herramienta para resolver problemas de toda índole; como una ciencia que facilita el entendimiento de fenómenos naturales o no; y como una disciplina que se estudia a los entes matemáticos mismos (en este sentido la matemática es una meta-ciencia; SUMEM, 2014).

Hacer matemática implica una forma de razonamiento propia del pensamiento reflexivo definido por Dewey (1989) como una concatenación de ideas de las cuales una es conclusión lógica de la anterior. Por tanto, por pensamiento matemático se entenderá como el pensamiento reflexivo aplicado a la resolución de problemas matemáticos y a la

ISBN 978-84-945722-3-4

validación de conjeturas nacidas durante el proceso de hacer matemática. Por consiguiente, en mi concepción no existen conceptos tales como pensamiento algebraico, geométrico o variacional. En todo caso serían manifestaciones del pensamiento matemático cuando se abordan problemas o se hace investigación en alguna de las ramas en que la matemática se ha dividido para su estudio.

Finalmente, la educación matemática es el bagaje de conocimientos matemáticos que posee un individuo y el uso más o menos efectivo que hace de él en situaciones cotidianas o escolares. Por tanto, la didáctica matemática se encargará de propiciar y mejorar la educación matemática de nuestros estudiantes, es decir, su conocimiento matemático y sus aplicaciones.

Ahora bien, la didáctica como parte de la pedagogía que se encarga de la metodología de los procesos de aprendizaje puede estar centrada en la enseñanza o en el aprendizaje. Si la centramos en la enseñanza, entonces el profesor adquiere un papel relevante como diseñador y administrador del proceso y el estudiante es el recipiente del conocimiento que se le quiere enseñar. Éste es el enfoque que tradicionalmente ha tenido la docencia; el profesor enseña el cúmulo de conocimientos y procesos que quiere que sus estudiantes aprendan, pero no siempre tiene control sobre lo que realmente el estudiante ha aprendido y el instrumento por excelencia para medir ese conocimiento, el examen, no siempre arroja resultados realistas. La otra posibilidad, una didáctica centrada en el aprendizaje, toma en cuenta las maneras en que los estudiantes pueden aprender mejor los conceptos y los procedimientos, y le da un papel protagónico en la construcción del conocimiento. Mucha veces el aula se convierte en una comunidad de aprendizaje en la que todos sus integrantes tienen un objetivo común: el aprendizaje del conocimiento necesario para desempeñarse eficientemente dentro y fuera de la comunidad.

En este tipo de ambiente es el estudiante quien tiene que validar el conocimiento que ha adquirido, y el proceso de validación puede ser muy parecido al que sigue un científico cuando intenta validar los resultados de sus investigaciones. En el caso del aprendizaje de la matemática, se trata de validar conjeturas haciendo uso de la teoría que ya se conoce, usando su pensamiento reflexivo y sus esquemas de argumentación; es decir, su capacidad de persuasión.

ISBN 978-84-945722-3-4

El papel de la argumentación matemática en el aprendizaje

Si el aprendizaje es el proceso de adquisición de un conocimiento, ¿cómo saber si uno a adquirido un cierto conocimiento? En el ámbito escolar ¿cómo sabe el profesor que uno de sus estudiantes a aprendido?

Es posible detectar que un estudiante a aprendido un concepto por la manera en que lo usa y por la forma en que habla de él. Es decir, la acción y el discurso son factores que dan fe de la efectividad del aprendizaje.

Cuando la didáctica está centrada en el aprendizaje del estudiante, és este quien debe persuadir al profesor y a sus compañeros que ha aprendido el conocimiento pretendido. Debe argumentar a favor de ese aprendizaje. En matemática, la argumentación implica un razonamiento lógico que persuada al interlocuror de que el conocimiento adquirido es válido. En la mayoría de las veces, un argumento, o parte de él, se fundamenta con la manipulación de los objetos matemáticos. Es decir, en matemática, la argumentación implica tanto el discurso como la acción.

A manera de ejemplo hablaré de una situación que se dio en uno de mis grupos de matemática en el Colegio de Ciencias y Humanidades, nivel pre universitario. A la sazón estábamos haciendo ejercicios y exploraciones con un software de geometría dinámica. La consigna pedía explícitamente que se explicaran los resultados sin recurrir a las herramientas de medición del software.

En específico, en el ejercicio en cuestión se pide a los estudiantes que construyan un cuadrado y sus diagonales. La pregunta es, ¿cómo son los triángulos que se forman entre sí? Explica tu respuesta.

Una de las parejas construyó el cuadrado y sus diagonales y el círculo con centro en la intersección de las diagonales que pasa por uno de los vértices del cuadrado.

La argumentación que dieron para concluir que los triángulos internos son congruentes fue en los siguientes términos:

El cuadrado tiene sus cuatro lados congruentes, por tanto los triángulos tienen

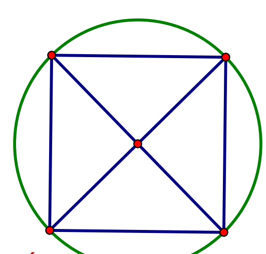

Figura 1. Cuadrado y sus diagonales. Fuente propia.

ISBN 978-84-945722-3-4

un lado con la misma longitud. Si trazamos una circunferencia con centro en la intersección de las diagonales y que pase por uno de los vértices, nos damos cuenta que pasa también por los otros vértices. Entonces los otros lados de los triángulos son congruentes entre sí porque son radios del mismo círculo y deben ser iguales. Los triángulos son congruentes.

El análisis de la situación se puede hacer con respecto a la argumentación misma y con respecto a la interacción entre los estudiantes: me centraré en la primera:

Los estudiantes construyeron el cuadrado trazando primero un lado y rotándolo después dos veces usando un ángulo recto. Es decir, los estudiantes conocían la definición de cuadrado y sabían cómo manipular el software. También usaron su conocimiento sobre círculos y circunferencias para inferir que los lados del triángulo son congruentes entre sí. Los estudiantes actuaban sobre los objetos matemáticos al tiempo que iban construyendo su argumentación: discurso y acción.

Es posible que la formación de sus argumentos haya seguido un proceso de pensamiento reflexivo, más o menos en los términos siguientes:

a) Después de construir el cuadrado y sus diagonales, observaron que los triángulos parecían ser congruentes. Esto da lugar a un razonamiento de tipo abductivo: si los triángulos fueran congruentes, entonces medirían lo mismo. Su conjetura fue comprobada midiendo: esta comprobación obedece a un razonamiento inductivo.
b) Lo anterior los convenció de que su conjetura (los triángulos son congruentes entre sí) es verdadera. Pero como no podían medir para justificarla, tenían que buscar otra manera de hacerlo. Entonces se decidieron por utilizar la definición de cuadrado. Ésta les asegura que al menos los triángulos tienen un lado correspondiente congruente.
c) Ahora el problema es justificar que los lados que faltan también son congruentes entre sí. Aquí se da otro razonamiento de tipo abductivo: si los lados fueran congruentes, entonces una circunferencia con centro en el centro del cuadrado debe pasar por los extremos de los lados, pues serían radios de esa circunferencia. La comprobación de la conjetura se hace de nuevo usando un razonamiento inductivo.

ISBN 978-84-945722-3-4

d) Finalmente, los argumentos anteriores llevan a la pareja de estudiantes a concluir que su conjetura inicial es válida: los triángulos internos formado por las diagonales de un cuadrado son congruentes entre sí.

Idealmente (Peirce, 2014), el proceso hubiera sido primero un razonamiento abductivo que establece una conjetura; después, un procedimiento inductivo para comprobar la conjetura (en nuestro caso sólo era necesario probar una instancia); finalmente, un razonamiento deductivo que estableciera la validez general de la conjetura. En nuestra situación, este último paso no se cumplió, pues los estudiantes mideron los lados con una circunferencia como herramienta (razonamiento inductivo). Esto impidió que hicieran una demostración matemática.

Así pues, ejercicios como éste, de exploración y de justificación de resultados, en cualquiera de las ramas de la matemática (o materias) propician la puesta en marcha de esquemas de argumentación que, a su vez, fomentan el conocimiento matemático.

Aún más, la argumentación puede usarse como una ventana al conocimiento adquirido y una herramienta de evaluación.

Esquemas de argumentación

En la argumentación anterior es posible encontrar dos tipos de esquemas (Flores, 2007), un esquema analítico: *Si los triángulos se forman usando los lados del cuadrado como uno de sus lados, entonces esos lados son congruentes entre sí, puesto el en el cuadrado sus cuatro lados son congruentes.* Y un esquema empírico: *Al trazar la circunferencia, nos damos cuenta de que los cuatro lados son radios de una misma circunferencia.*

En algunas investigaciones hechas en niveles básicos (Santamaría 2013, Bravo 2015), además de los esquemas mencionados se han encontrado otros. Los esquemas de argumentación más utilizados son los siguientes:

- Autoritarios, cuando se apela a una autoridad.
- Fácticos, cuando la justificación es una relación de hechos o pasos que llevan al resultado.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Emprírícos, cuando se recurre a mediciones, a la simple observación de una figura o a relaciones observables a simple vista.
- Analíticos, cuando la justificación descanza totalmente en razonamientos deductivos.

Las investigaciones hechas y la experiencia nos dicen que los estudiantes pueden pasar de una manera más o menos natural de los esquemas empíricos a los analíticos; estos últimos son la antesala de la demostración matemática.

Así, en una didáctica centrada en el aprendizaje, es posible, mediante el fomento de de esquemas de argumentacón a través de actividades de formación conjeturas y validarlas, que el estudiante adquiera conocimientos matemáticos más sólidos y aumente su capacidad para resolver problemas y argumentar no sólo en el ámbito del aprendizaje de la matemática sino de cualquier materia.

Referencias

Aberdein, A. (2005). The Uses of Argument in Mathematics, OSSA Conference Archives. University of Windsor. Recuperado el 27 de julio de 2016 de http://scholar.uwindsor.ca/ossaarchive/OSSA6/papers/.

Bravo, Y. (2015). *La argumentación de resultados en la resolución de problemas matemáticos.* Trabajo de obtención de grado. Maestría en Educación Básica, Universidad Pedagógica Veracuzana. México.

Dewey, J. (1989). Cómo pensamos: nueva exposición de la relación entre pensamiento reflexivo y proceso educativo, Paidós, Barcelona, España.

Flores, H. (2007). *Prácticas Argumentativas y Esquemas de Argumentación en Profesores de Matemáticas del Bachillerato,*Tesis de doctorado. Cinvestav-IPN.

Juárez, F. (2015). *Epistemología del aprendizaje: apuntes para una pedagogía persuasiva.* México. UPN: Horizontes Educativos.

Lakatos, I. (1976). *Proofs and Refutations: the logic of mathematical Discovery*. EUA: Cambridge University Press. DOI: http://dx.doi.org/10.1017/CBO9781316286425

ISBN 978-84-945722-3-4

Peirce, C. S. (2014). *Illustrations of the logic of science,* by de Waal, Cornelis, Peirce, Charles Sanders. Open Court.

Santamaría, M. (2013). *La resolución de problemas multiplicativos como estrategia para favorecer la argumentación.* Trabajo de obtención de grado. Maestría en Educación Básica, Universidad Pedagógica Veracuzana. México.

SUMEM. (2014). *Consideraciones para la mejora de la educación matemática en la UNAM.* Falconi, M., Flores, A. H., Hernández, M. (eds.) México: UNAM.

ISBN 978-84-945722-3-4