CR-519

LA MODELIZACIÓN COMO RECURSO PARA DESARROLLAR COMPETENCIAS ALGEBRAICAS

María Teresa Navarro Moncho
Teresa.Navarro-Moncho@uv.es
IES Veles e Vents Torrent.
Departament de Didàctica de la Matemàtica. Universitat de València. España

Núcleo temático: La Resolución de Problemas en Matemáticas.
Modalidad: CR
Nivel educativo: Secundaria. Bachillerato
Palabras clave: modelización, función, transformaciones algebraicas, parámetro.

Resumen

El proceso de modelización (PM) es un proceso de resolución de problemas (RP) con características específicas. La RP es el lugar para la constitución de los conceptos por parte de los alumnos, para que los doten de significado y puedan extender su significado al usarlos en nuevas situaciones. Los conceptos y objetos matemáticos se elaboran en la historia como medios de organización de fenómenos. El PM pretende organizar algún fenómeno mediante algún concepto u objeto matemático en el que no se elabora ningún concepto u objeto nuevo, sino que se selecciona uno ya existente, que se considera idóneo para organizar el fenómeno en cuestión.

Por los estudios realizados en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la UV sabemos que para realizar un PM son necesarias competencias en: análisis cualitativo del fenómeno, propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles, sus formas canónicas, significados de los parámetros en estas formas, efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas, transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica y análisis cualitativo de las limitaciones del modelo. Las transformaciones algebraicas tienen sentido en el PM en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica.

1.- Introducción

Las habilidades que en la actualidad se requieren de los ciudadanos se basan en la aplicación de sus conocimientos a situaciones reales. En estas situaciones, cada vez más se precisa de tareas que incluyen conceptos cuantitativos, cualitativos, espaciales, probabilísticos, relaciones… Por tanto, es lógico pensar que cada vez tendrán más importancia las matemáticas del entorno y de la vida cotidiana.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Las matemáticas se consideran una de las disciplinas esenciales en la formación del ciudadano. De ellas se espera que sean útiles para describir, analizar, interpretar y entender el mundo que nos rodea.

La resolución de problemas y la resolución de problemas de modelización matemática es una herramienta muy útil para aproximar las matemáticas del mundo real a los estudiantes. Con la modelización matemática se establecen vínculos de unión entre las distintas partes de las matemáticas y entre las matemáticas y otras disciplinas, sin abandonar el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Como afirma Blomhøj (2008) "La modelización matemática, sin embargo, puede ser vista como una práctica de enseñanza que coloca la relación entre el mundo real y la matemática en el centro de la enseñanza y el aprendizaje, y esto es relevante para cualquier nivel de enseñanza. Las actividades de modelización pueden motivar el proceso de aprendizaje y ayudar al aprendiz a establecer raíces cognitivas sobre las cuáles construir importantes conceptos matemáticos. Además, las competencias para establecer, analizar y criticar procesos de modelización y el posible uso de los modelos es una meta educativa, por derecho propio, de la enseñanza de la matemática en la educación general."

2.- La modelización matemática. Marco teórico

2.1. Antecedentes

Durante los años sesenta, matemáticos como Morris Kline o George Polya fueron protagonistas de la reforma de la educación matemática, defendieron un estilo heurístico de la enseñanza de las matemáticas frente al formalismo de las llamadas "Matemáticas Modernas". En la década de los setenta, Freudenthal impulsó la Educación Matemática Realista (EMR). Según Heuvel-Panhuizen (2009) la EMR es una teoría local para la educación de las matemáticas basada en la idea de Freudenthal de las matemáticas como una actividad humana. Si las matemáticas han de tener un valor humano, deben guardar relación con la realidad, mantenerse cercanas a los niños y ser relevantes para la sociedad. Para Freudenthal, la mejor manera de aprender matemáticas no es como un sistema cerrado, sino como un proceso de resolución de problemas: "*el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas"* (Freudenthal, 1969, p.7).

Inmediatamente surgen movimientos de renovación educativa que preocupados por la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas utilizarán situaciones más o menos reales en el

ISBN 978-84-945722-3-4

desarrollo curricular: Shell Centre, NCTM, etc. En España, emergieron grupos de profesores como el Grupo Cero en la Comunidad Valenciana, el grupo Zero a Cataluña, el Grup de Reforma de la C.V, las sociedades de profesores como Thales en Andalucía, Newton en Canarias, Societat d'Educació Matemàtica de la C.V. "Al-Khwārizmī, etc.

2.2. ¿Qué entendemos por modelización?

La modelización matemática es el proceso de formular en términos matemáticos un fenómeno del mundo real, obteniendo resultados en el mundo de la Matemática que permitan evaluar e interpretar matemáticamente el fenómeno del mundo real.

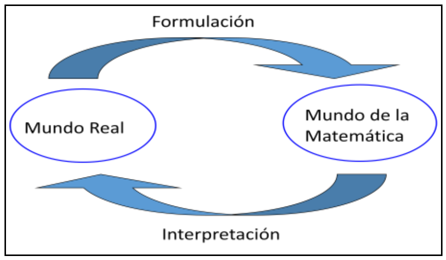

Figura 1. Esquema modelización.

En el proceso de modelización se pueden distinguir diversos pasos:

1. Identificar un problema real.
2. Identificar factores importantes del problema para buscar un modelo del mundo real.
3. Representar el modelo del mundo real en términos matemáticos.
4. Usar métodos matemáticos para obtener resultados.
5. Interpretar y evaluar los resultados matemáticos.
6. Analizar cómo afectan las conclusiones al fenómeno estudiado del mundo real.

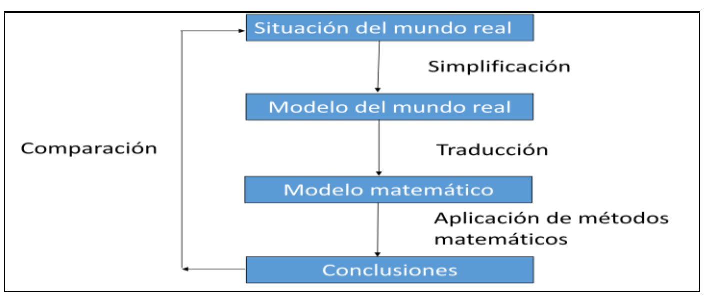

Figura 2. Esquema proceso de modelización.

Ahora bien, buscar un modelo matemático no es siempre una tarea fácil, pero encontrar un buen modelo en ocasiones es muy complicado. Para Stephen Hawking y Leonard Mlodinow *"Un modelos es satisfactorio si: 1) Es elegante. 2) Contiene pocos elementos*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

arbitrarios o ajustables. 3) Concuerda con las observaciones existentes y proporciona una explicación sobre de ellas. 4) Realiza predicciones detalladas sobre observaciones futuras que permitirán refutar o falsar el modelo si no son confirmadas." (Hawking, S. y Mlodinov, L., 2010, pp.36)

2.3. La modelización en la resolución de problemas

El proceso de modelización es un proceso de resolución de problemas con algunas características específicas. Ahora bien, eso no quiere decir que no tengamos que prestar atención a las características específicas que tiene el proceso de resolución de problemas cuando el problema que se trata de resolver es un problema de modelización. Una de las funciones de la resolución de problemas en la enseñanza es ser el lugar para la constitución de los conceptos por parte de los alumnos, para que los alumnos los doten de significado y puedan extender su significado al usarlos en nuevas situaciones. En el caso particular de los problemas de modelización, la modelización tampoco está después de los conceptos como aplicación de éstos sino que la resolución de problemas de modelización es también el lugar para la constitución de conceptos, su dotación de significado y la extensión de su significado.

Que la resolución de problemas de modelización cumple estas funciones estaba ya claramente indicado en los trabajos de la escuela holandesa desde finales de los setenta. Jan de Lange (1987) subraya este papel de la resolución de problemas de modelización en el currículo, desarrollado en la década de los ochentas, para los últimos años de la secundaria en Holanda al decir que una parte importante de los materiales diseñados para la enseñanza persiguen que los alumnos se embarquen en un trabajo de matematización "conceptual".

En este sentido, el marco teórico de PISA 2015 considera siete capacidades matemáticas fundamentales en las que incluye la matematización. "Matematización: la competencia matemática puede suponer transformar un problema definido en el mundo real en una forma estrictamente matemática (esto puede suponer la estructuración, conceptualización, elaboración de suposiciones y/o formulación de un modelo) o la interpretación o valoración de un resultado o modelo matemático con relación al problema original. El término matematización se utiliza para describir las actividades matemáticas fundamentales implicadas". (OECD, 2016, p. 78).

2.4. La modelización como recurso para desarrollar competencias algebraicas

ISBN 978-84-945722-3-4

Luis Puig y Onofre Monzó, desde hace ya bastante tiempo, y yo más recientemente, estamos trabajando en el desarrollo de materiales de enseñanza y su experimentación en los que el centro de atención es la modelización con datos reales.

Este trabajo se sitúa en la tradición que se inició en los años setenta y recoge elementos de la investigación en resolución de problemas y el desarrollo curricular basado en la resolución de problemas, la teoría y metodología para la investigación de los Modelos Teóricos Locales[7], y la investigación en didáctica del álgebra.

Por estos trabajos[8] (Puig y Monzó, 2007, 2008, 2010, 2011, 2012; Puig y Monzó, 2013; Monzó, Puig y Navarro, 2015, 2016) sabemos que para realizar un proceso de modelización son necesarias competencias en: propiedades cualitativas de los tipos de funciones disponibles, análisis cualitativo del fenómeno que se va a observar, formas canónicas de los tipos de funciones, significados de los parámetros en las formas canónicas[9], efecto de los cambios en los parámetros en las propiedades cualitativas, transformaciones algebraicas para llevar una expresión algebraica a una forma canónica y análisis cualitativo de las limitaciones del modelo.

También sabemos que los análisis cualitativos del fenómeno y del comportamiento de las familias de funciones, se revelan como el mecanismo de guía y control del conjunto del proceso de modelización. Dicho de otra forma, y contestando de otra manera a la indicación de Maaß (2006) sobre que la competencia no se limita a "seguir los pasos" de un método, la competencia incluye ser un buen gestor del proceso de modelización, y el elemento clave de la buena gestión del proceso es el conocimiento cualitativo de los fenómenos y los modelos funcionales y el uso de este conocimiento cualitativo para tomar decisiones, controlar y organizar el conjunto del proceso.

Las transformaciones algebraicas tienen sentido en el proceso de modelización en la medida en que garantizan que cualquier expresión algebraica podrá llevarse a una forma canónica.

3. Modelo de enseñanza

---

[7] Una descripción detallada sobre los MTL se encuentra en el libro *Educational Algebra*. (Filloy, Rojano y Puig, 2008).

[8] Estos trabajos son el resultado de los proyectos de investigación financiados por el Ministerio de Ciencia e Innovación (EDU2009-10599) y el Ministerio de Economía y Competitividad (EDU2012-35638 y EDU2015-69731-R) de España.

[9] Se estudia la forma canónica $y = a \cdot f\left(\frac{x-c}{b}\right) + d$ en la que a dilata la gráfica en la dirección del eje OY, respecto de la recta $y = d$; b dilata la gráfica en la dirección del eje OX, respecto de la recta $x = c$; c traslada la gráfica en la dirección del eje OX hacia la derecha, si $c > 0$, o hacia la izquierda, si $c < 0$; d traslada la gráfica en la dirección del eje OY hacia arriba, si $d > 0$, o hacia abajo, si $d < 0$.

ISBN 978-84-945722-3-4

La idea central de nuestro modelo de enseñanza es que este produce una comprensión rica de los conceptos de familia de funciones y desarrolla la competencia en la transformación de expresiones algebraicas ya que las dota de significado. En nuestro modelo de enseñanza, las formas canónicas están elegidas de manera que sus coeficientes (o parámetros) indiquen directamente propiedades de los fenómenos modelados con esas expresiones.

Las expresiones algebraicas representan relaciones funcionales. Su significado está ligado al proceso de traducción entre ellas, las tablas numéricas y las representaciones gráficas cartesianas, que, con el soporte de la calculadora gráficas se realizan de forma automática, interviniendo, en su caso, decisiones del usuario de la calculadora sobre la ventana con la que se mira la gráfica, el tamaño del incremento y la longitud de la tabla, o la expresión algebraica concreta elegida para representar la relación funcional.

Se utiliza un entorno interactivo de aprendizaje (Calculadoras gráficas simbólicas, ordenadores, tabletas…) que dispone de cálculo simbólico, representación en tablas y gráficas y tratamiento estadístico de datos, se plantea el estudio de la forma canónica de familias de funciones prestando especial atención al significado de los parámetros y la interrelación entre sus cambios, los de la gráfica correspondiente y los del fenómeno que modelizar; y se plantean situaciones problemáticas en las que se realizan experimentos para obtener datos reales de fenómenos que se modelizan con estas familias de funciones.

3.1. ¿Qué fenómenos elegir?

La modelización matemática debe contribuir a la comprensión de los fenómenos reales, pero los fenómenos reales son complejos, por ello, es importante a la hora de la elección tener en cuenta algunas consideraciones como identificar las variables que intervienen en el fenómeno, identificar y entender las leyes conocidas del fenómeno, identificar las preguntas que se desea responder y revisar los datos obtenidos. Para modelizar un fenómeno real será necesario simplificar tanto como sea posible dicho fenómeno y tener en consideración qué es lo más importante. En muchas ocasiones se tendrá que modelizar idealizaciones o abstracciones de los fenómenos.

En la Física, en la Química, etc, dado su componente experimental y los modelos matemáticos de sus leyes, se pueden encontrar buenos ejemplos para modelizar.

Estos aspectos sobre los fenómenos, el estudio de las familias de funciones y las transformaciones algebraicas, y las características de los entornos interactivos; son

ISBN 978-84-945722-3-4

elementos fundamentales en el diseño de nuestros materiales. Los datos experimentales de estos materiales se han obtenido a través de la fotografía (datos estáticos), de la edición de video (datos dinámicos) o del uso de sensores.

3.2. Un par de ejemplos.

3.2.1. Intercambio de calor: Enfriamiento/Calentamiento de un cuerpo

La intención de este material es doble. Por una parte, el estudio de dos fenómenos inversos, el enfriamiento y el calentamiento de un cuerpo, que la intuición conduce a pensar que se trata de fenómenos fisicoquímicos inversos y por tanto se modelizarán mediante funciones inversas. El análisis simultáneo con datos reales evidencia que se trata de un único fenómeno, el intercambio de calor, que se modeliza con la función exponencial.

Por otra parte, en el entorno interactivo utilizado, la calculadora ClassPad, no dispone de uno de los parámetros que se necesita para modelizar el fenómeno, por lo que es necesario transformar las expresiones algebraicas para poder utilizar los parámetros disponibles en la calculadora.

3.2.2. Reloj analógico.

En este material se estudia, a partir del video de un reloj analógico de un minuto de duración, la relación entre la altura de la manecilla segundera del reloj y el ángulo que forma con el eje de abscisas cuando situamos el origen de coordenadas en el centro de la circunferencia.

Como en el ejemplo anterior, este material tiene una doble intención. En primer lugar, sabemos desde los estudios de Janvier (1978), que "muchos alumnos, incapaces de tratar las gráficas como representaciones abstractas de relaciones, parecen interpretarlas como si fueran meros dibujos de las situaciones que sirven de base" (Janvier, 1978, p. 47). En la situación que hemos elegido evitamos que esto suceda, pues se modeliza con la función seno pero la manecilla se mueve sobre una circunferencia.

Por otra parte, esta actividad pone de manifiesto que en muchas ocasiones lo que vemos no es lo que realmente ocurre, es decir, aunque podemos analizar la altura de la manecilla en función del tiempo, la magnitud de la que depende la altura no es el tiempo sino el ángulo que forma la manecilla con el eje de abscisas. De hecho, tras marcar una serie de puntos en el video, la calculadora proporciona de manera automática las coordenadas de los puntos en una tabla que incluye también el tiempo. A partir de estos datos, la calculadora nos permite

ISBN 978-84-945722-3-4

realizar tres nubes de puntos distintas; la relación entre abscisa y ordenada; la relación entre el tiempo y la abscisa; y la relación entre el tiempo y la ordenada (altura de la manecilla del reloj). Las transformaciones algebraicas son necesarias para obtener la función que modeliza la altura de la manecilla en función del ángulo que esta forma con el eje de abscisas y tomando la longitud de dicha manecilla como la unidad.

Referencias bibliográficas

Blomhøj, M (2008). Modelización Matemática- Una Teoría para la Práctica. Revista de Educación Matemática de la FAMAF, pp. 20-35.

De Lange, J. (1987). *Mathematics, insight and meanin: Teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences*. Utrecht: OW & OC.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational Algebra. A Theoretical and Emperical Approach.* New York: Springer

Freudenthal, H. (1969). Realistic models in probability. En I. Lakatos (ed.) Problems in inductive logic, pp. 1-14. Amsterdam: North Holland.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situations. Studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. Universidad de Nottingham.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencias? *ZDM*, 38, 113-142.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2015). Un estudio sobre el proceso de modelización en el entorno informático de las tabletas. En Frontera, G., Perelló, J. y Ruiz-Aguilera, D. (Eds). Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. JAEM 2013. CD-ROM. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Societat Balear de Matemàtiques SMB-XEIX.

Monzó, O., Navarro, M. T. y Puig, L. (2016). Una actividad de modelización en el entorno informático de las tabletas. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 72, pp. 67-74.

Monzó, O. y Puig, L. (2007). Modelización con la ClassPad 300, 1ª parte. Veintidós Séptimos, núm. 24, pp. 26-29.

Mozó, O. y Puig, L. (2008). Modelización con calculadoras gráficas. En actas de las XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas (CD3, T05-01). Badajoz: Publicaciones de la Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Monzó, O. y Puig, L. (2010). Modelización con la ClassPad 300, 2ª parte. Veintidós Séptimos, núm. 26, pp. 4-6.

Monzó, O. y Puig, L. (2011). Materials per a l'estudi de famílies de funcions. En M. Contreras, O. Monzó y L. Puig (Eds.). Actes de les IX Jornades d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (vol. I, pp. 167-185). València: Societat d'Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana "Al-Khwārizmī".

Monzó, O. y Puig, L. (2012). Familias de funciones. En Torralbo, M. y Carrillo, A. (Eds.) Matemáticas con calculadora gráfica. Unidades didácticas, pp. 103-133. Sevilla: SAEM "Thales" y División didáctica CASIO-Flamagas.

Navarro, T., Puig, L y Monzó, O. (2015). Un estudio sobre modelización en la iniciación de la función seno en secundaria. En 17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas. Actas JAEM 2015. Federación Española de Sociedades de Mtemáticas,

ISBN 978-84-945722-3-4

FESPM. Sociedad de Educación de la Región de Murcia, SEMRM. Consultable en http://17jaem.semrm.com/aportaciones/n128.pdf.

OECD. (2016). PISA Assessment and Analytical Framework Science: Science, Reading, Mathematic and Financial Literacy, PISA. París: OECD Publishing. Disponible en http://dx.doi.org/10.1787//9789264255425-en.

Puig, L. y Monzó, O. (2008). Competencias algebraicas en el proceso de modelización. En F. Gracia, A. Monedero, J. Palomo y Mª J. Peris, (Eds.) El discret encant de les matemàtiques. Actes de les VIII Jornades d'Educació Matemática de la Comunitat Valenciana, pp. 142-158. Castellón: SEMCV.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.) Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas, pp. 9-35.México: Trillas.

Puig, L. (2015). Modelización con datos reales. En Frontera, G., Perelló, J. y Ruiz-Aguilera, D. (Eds). Actas de las XVI Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. JAEM 2013. CD-ROM. Palma: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. Societat Balear de Matemàtiques SMB-XEIX.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2009). El uso didáctico de modelos en la Educación Matemática Realista: ejemplo de una trayectoria longitudinal sobre porcentaje. Correo del Maestro, 160, 36-44.

ISBN 978-84-945722-3-4