CP-22

PROMOVER O RACIOCÍNIO MATEMÁTICO A PARTIR DO TRABALHO NA SALA DE AULA

João Pedro da Ponte
jpponte@ie.ulisboa.pt
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidade: CP
Nível educativo: 7
Palavras-chave: Raciocínio matemático, Representação matemática, Prática de ensino

Resumo
O desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos constitui um objetivo fundamental do ensino desta disciplina escolar. Em Matemática, o raciocínio assume caraterísticas particulares dada a natureza própria dos objetos desta ciência, como entidades abstratas construídas a partir de experiências do mundo real ou de experiências com outras entidades matemáticas já previamente conhecidas. Tendo por base trabalhos recentes de investigação em educação matemática de diversos países e recorrendo a exemplos ilustrativos, procuro caraterizar as principais formas de raciocínio, nomeadamente indutivo, dedutivo e abdutivo, e analisar o seu papel no ensino-aprendizagem da Matemática. Analiso, também, diversos processos-chave de raciocínio usados em Matemática como a formulação de estratégias de resolução de problemas, a generalização e a justificação, dando atenção à relação do raciocínio com outros processos matemáticos essenciais tais como representar e dar significado. Finalmente, analiso as ações do professor promotoras do raciocínio em diversos níveis de escolaridade.

Introdução

Um dos grandes objetivos do ensino da Matemática é desenvolver a capacidade de raciocinar. Quais os aspetos fundamentais dessa capacidade? De que modo pode o professor na sala de aula promover esse desenvolvimento? São questões que me proponho analisar conjugando perspetivas teóricas e exemplos concretos.

Raciocínio e representação

ISBN 978-84-945722-3-4

É um lugar-comum dizer que "a Matemática requer raciocínio" e também que "desenvolve o raciocínio". Mas o termo "raciocínio" é polissémico, como se vê pelos vários sentidos que lhe são dados pelo dicionário:

> Raciocinar: 1. fazer uso da razão para depreender, julgar ou compreender; 2. encadear pensamentos de forma lógica; 3. apresentar razões; 4. ponderar; reflectir; pensar (Do lat. ratiocinári) (Dicionário Porto Editora)

Depreender, julgar, compreender, pensar de forma lógica, apresentar razões, ponderar, refletir… São muitos significados que estão longe de coincidir! Desde logo, coloca-se a questão se "raciocinar" será o mesmo que "pensar" ou será, de modo mais específico, "pensar de certa maneira". Na verdade, considero que se deve atribuir a "raciocinar" um significado mais preciso que "pensar". Nesta perspetiva, raciocinar é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação, fazendo-o por um processo justificado. Este entendimento está em consonância com outro dicionário, que diz que raciocinar é estabelecer inferências ou conclusões a partir de factos conhecidos ou assumidos como verdadeiros. Acrescento apenas que isso deve ser feito de forma fundamentada, e não mais ou menos ao acaso. Se, em resposta a uma questão, uma pessoa diz a primeira coisa que lhe ocorre sem analisar toda a informação pertinente, não está a raciocinar, está simplesmente a formular palpites. Deste modo, todo raciocinar é pensar, mas existe pensamento que não chega a ser raciocínio. É o que acontece quando descrevemos um objeto, quando relatamos um acontecimento, quando exprimimos um sentimento ou quando formulamos um desejo.

Existe raciocínio em Matemática e também noutros domínios do conhecimento bem como na vida do dia-a-dia. Coloca-se, naturalmente, a questão: será que o raciocínio em Matemática é diferente do raciocínio noutros campos, será que tem alguma coisa de específico? Vejamos então alguns aspetos gerais do raciocínio tal como ele se desenvolve nos mais diversos domínios. O estudo do raciocínio é um campo da Filosofia, com as suas raízes na Grécia antiga, nomeadamente com a sua formalização nas regras da Lógica. Aristóteles é o primeiro grande teórico que estabelece esta disciplina e, já no século XX, o desenvolvimento da Lógica Matemática levou a grandes desenvolvimentos e aplicações

ISBN 978-84-945722-3-4

práticas, nomeadamente nos computadores. Para o que nos interessa aqui, limitar-me-ei a notar que existem essencialmente três tipos de raciocínio: o dedutivo, o indutivo e o abdutivo.

O raciocínio dedutivo é característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental. Nesta ciência, assumimos um conjunto de afirmações como verdadeiras (axiomas ou postulados) e assumimos um conjunto de regras de inferência, para obter novas afirmações válidas (teoremas). Assim, "raciocinar dedutivamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (Ponte, Branco & Matos, 2008, p. 89). Desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (Oliveira, 2008, p. 7). Como refere Oliveira (2002), o raciocínio dedutivo constitui "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (p. 178), sendo através dele que se validam as afirmações matemáticas. A sua importância é de tal ordem que Davis e Hersh (1995) afirmam mesmo que a dedução é o selo da Matemática.

O papel fundamental do raciocínio dedutivo é sobretudo de validação do conhecimento. No entanto, as novas descobertas, na maior parte dos casos, não surgem através de raciocínios dedutivos mas sim de outros tipos de raciocínio, nomeadamente de raciocínios indutivos e abdutivos. George Pólya (1990) valorizou de forma eloquente o papel do raciocínio indutivo. Como indica, a indução é a inferência de uma regra a partir da observação do que é constante em diversos casos particulares. Já a abdução é um processo de inferência que parte de um facto invulgar e que procura uma explicação para a sua ocorrência. O grande teórico do raciocínio abdutivo é Charles Sanders Peirce (1931–1958), que afirma que "[a] abdução, ao fim e ao cabo, não é senão conjetura… é o processo de escolher uma hipótese" (Vol. 7, p. 219).

É verdade que o raciocínio dedutivo tem um lugar fundamental na validação das afirmações matematicamente válidas, mas é o raciocínio indutivo e abdutivo que leva à descoberta dessas afirmações. Deste modo, os alunos devem aprender a raciocinar dedutivamente em Matemática mas devem igualmente aprender a raciocinar indutiva e abdutivamente (Rivera & Becker, 2009). Assim, é de grande importância saber como pode o professor, na sala de aula de Matemática, contribuir para que os alunos desenvolvam a sua capacidade de raciocínio. Para isso centrar-me-ei em dois processos fundamentais: generalizar, um

ISBN 978-84-945722-3-4

processo fundamental do raciocínio indutivo e abdutivo, e justificar, um processo fundamental do raciocínio dedutivo.

É de notar que é impossível aceder diretamente ao raciocínio matemático dos alunos – para o conhecer é necessário que estes o comuniquem, o que só é possível através de diferentes representações. Por isso, somente "ao observar as suas representações [dos alunos], os professores podem conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos" (NCTM, 2007, p. 76). Para além de permitirem dar a conhecer o raciocínio, as representações são um suporte essencial para a realização desse mesmo raciocínio. Sem representar de alguma maneira os conceitos matemáticos é impossível fazer inferências sobre eles.

Como indica Bruner (1999), estas representações podem ser ativas (objetos como materiais manipuláveis ou ações como "contar pelos dedos"), icónicas (imagens, figuras e diagramas) ou simbólicas (símbolos matemáticos, outros símbolos e linguagem natural). As representações assumem um papel decisivo na aprendizagem pois, como refere o NCTM (2007), "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75).

Modelos para o estudo do raciocínio na sala de aula

Durante muito tempo, os estudos em educação matemática sobre os processos de raciocínio centravam-se exclusivamente no raciocínio dedutivo (Balacheff, 1888; Galbraith, 1995; Hanna, 2002). A maior parte destes estudos tendiam a ver os raciocínios indutivo e abdutivo como obstáculos ao raciocínio matemático. Mais recentemente, registou-se uma grande mudança a este respeito – em vez de serem vistos como estando em conflito, estas diferentes formas de raciocínio passaram a ser vistas como complementares.

Assim, Lannin, Ellis e Elliot (2011) desenvolveram um modelo no qual a "ideia central" é que "raciocinar matematicamente é um processo dinâmico envolvendo conjeturar, generalizar, investigar porquê, e desenvolver a avaliar argumentos" (p. 12) Neste modelo destacam-se três polos, sendo o primeiro "conjeturar e generalizar", o segundo "investigar porquê" e o terceiro "justificar ou refutar". Trata-se de um modelo que combina aspetos dedutivos e com aspetos indutivos e abdutivos.

ISBN 978-84-945722-3-4

Um outro modelo é de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e procura enquadrar o raciocínio com dois outros processos fundamentais, representar e dar significado (figura 1). Deste modo, os autores procuram vincar que o raciocínio matemático apoia-se necessariamente em representações e requer atribuição de significados aos objetos e ações envolvidos. Este modelo tem por base todo o processo de realização de uma investigação ou resolução de um problema matemático, começando pela formulação de questões, passando para a formulação de conjeturas e estratégias de resolução (generalização), indo à aplicação dessas estratégias e teste das conjeturas, até ao processo de validação (através da justificação). Deste modo, a generalização e a justificação destacam-se como aspetos essenciais do raciocínio matemático.

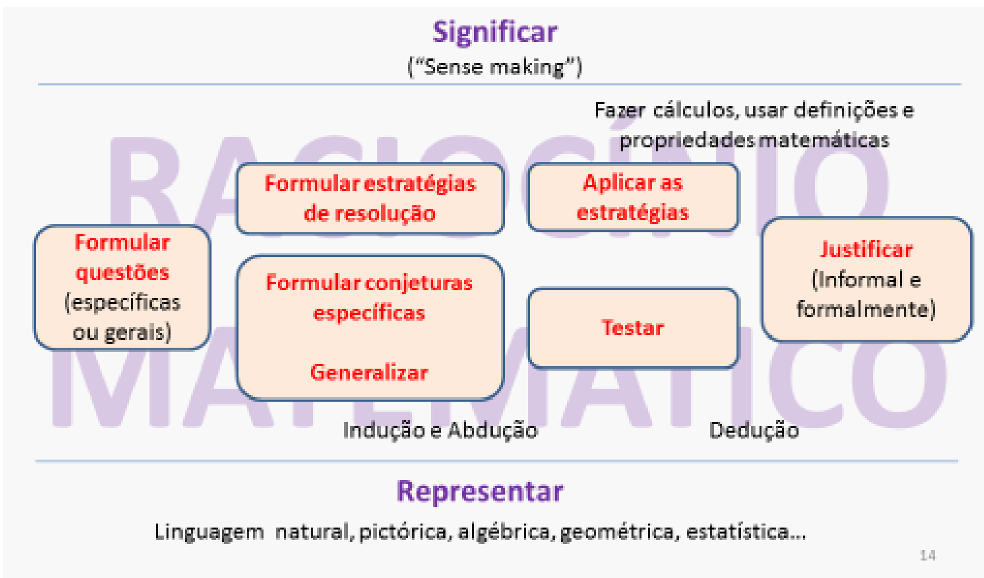


Figura 1 – Quadro conceptual para analisar o raciocínio matemático de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013).

Análise do raciocínio dos alunos

O raciocínio dos alunos pode ser comunicado oralmente ou por escrito. Vejamos alguns exemplos de raciocínios que se evidenciam em respostas escritas dos alunos a tarefas matemáticas. Assim, a figura 2 evidencia uma justificação por contraexemplo, um importante processo de justificação matemática. O aluno indica que a resposta à questão é negativa porque um caso pode ser dado em que a afirmação é falsa. É interessante notar que o aluno efetuou diversas mudanças de representação para dar a sua resposta. Primeiro,

ISBN 978-84-945722-3-4

converteu as frações ($\frac{7}{4}$ e $\frac{5}{2}$) para quocientes (7:4 e 5:2) e depois estes para numerais decimais (1,75 e 2,5). É nesta representação que o aluno considera que a justificação se torna convincente dado que 1,75 é sem qualquer dúvida menor que 2,5.

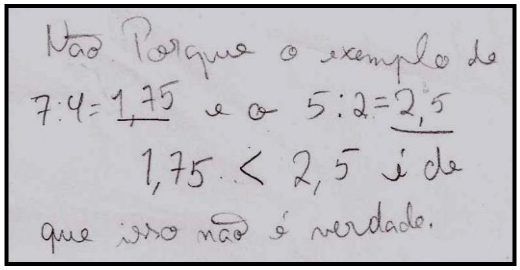
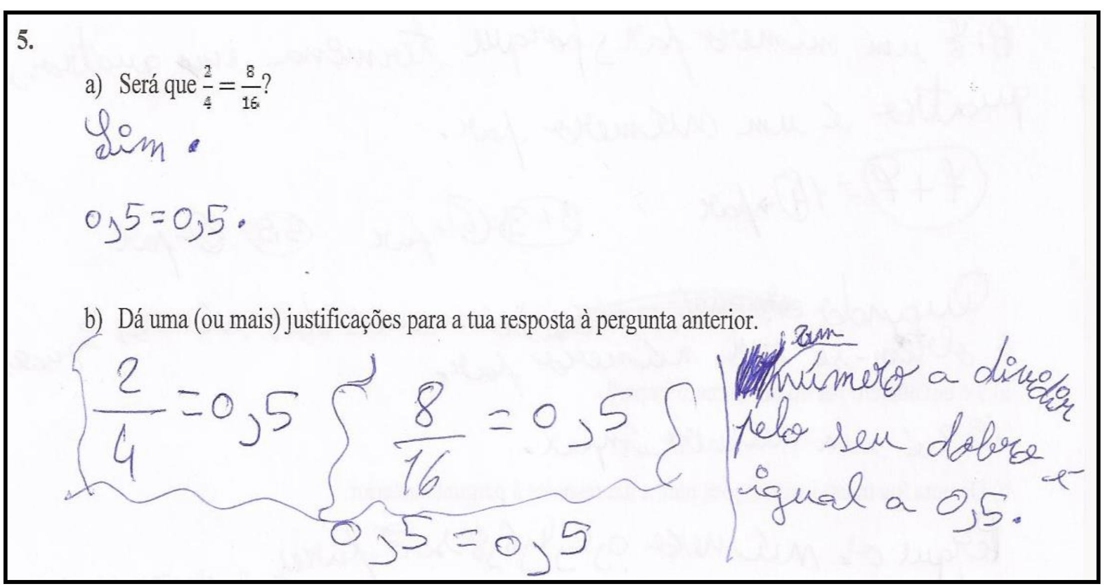

Não Porque o exemplo de
7:4=1,75 e o 5:2=2,5
1,75 < 2,5 é de
que isso não é verdade.

Figura 2 – Resposta de Marco (5.º ano) à questão “Se uma fração tem numerador e denominador maiores que uma outra fração, será necessariamente maior que esta segunda fração?”

Um outro exemplo de raciocínio dos alunos é dado nas respostas indicadas na figura 3. À primeira questão a aluna responde afirmativamente e, sem que tal lhe tenha sido perguntado, avança de imediato com uma justificação, baseada numa mudança de representação – $\frac{2}{4}$ é igual a 0,5 e $\frac{8}{16}$ é igual a 0,5, logo $\frac{2}{4}$ é igual a $\frac{8}{16}$, uma vez que duas quantidades iguais a uma terceira são iguais entre si. Na resposta à segunda questão, a aluna detalha mais a sua justificação e apresenta uma curiosa generalização: “Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5”.


5.

a) Será que $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$?

Sim.

0,5=0,5.

b) Dá uma (ou mais) justificações para a tua resposta à pergunta anterior.

$\frac{2}{4}$ =0,5 $\frac{8}{16}$ =0,5

0,5=0,5

Um número a dividir pelo seu dobro é igual a 0,5.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Figura 3 – Justificação e generalização de Catarina.

Papel do professor

O professor, dando atenção aos processos de raciocínio subjacentes à resolução de tarefas matemáticas, pode dar contributos importantes para o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Por exemplo, nos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico (1.º ao 6.º ano de escolaridade), pode pedir aos alunos para formularem e testarem conjeturas relativas a situações matemáticas simples bem como para explicarem ideias e processos e justificarem resultados matemáticos. Pode tornar explícito o uso de exemplos e contraexemplos e recorrer à análise exaustiva de casos como processo de justificação. Isso pode ser feito, por exemplo, através de ações como:

- Pedir a explicação de raciocínios matemáticos oralmente e por escrito.
- Solicitar exemplos, contraexemplos e analogias.
- Propor a investigação de regularidades e relações numéricas em tabuadas.
- Usar tabuadas para a formulação e teste de conjeturas.
- Perguntar, *Como fizeste? Porque consideras que o que fizeste está certo*?
- Perguntar, *O que acontecerá se...? Isto verificar-se-á sempre?*
- Solicitar a apresentação de argumentos assim como exemplos e contraexemplos.
- Através da apresentação de exemplos e de outros casos particulares e de perguntas como, *O que acontecerá a seguir? Será que isto é válido para outros os casos?*, pode procurar que os alunos façam generalizações.

Mais adiante na escolaridade, no 3.º ciclo (7.º ao 9.º ano) e no ensino secundário (10.º ao 12.º ano), o professor pode realizar essas mesmas ações e outras como:

- Pedir aos alunos para identificarem casos particulares, formularem generalizações e testarem a validade dessas generalizações.
- Proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjeturas a partir de dados obtidos na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjeturas).
- Salientar o papel das definições na dedução de propriedades, por exemplo no estudo dos quadriláteros.

ISBN 978-84-945722-3-4

- Colocar questões que conduzam à redução ao absurdo como método de demonstração.
- Pedir a fundamentação de afirmações através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos, ou a sua negação através de contraexemplos.

Conclusão

Para promover o raciocínio matemático dos alunos, o professor tem de conduzir uma prática onde surjam amplas oportunidades nesse sentido. Essas oportunidades dependem, no essencial, de dois aspetos: das características das tarefas propostas na sala de aula e do modo como essas tarefas são exploradas em diferentes momentos de trabalho. Relativamente às tarefas, estas, para além de pedirem explicitamente a realização de generalizações e a justificação de respostas ou processos de resolução, podem assumir natureza diversa e terem diferentes graus de desafio. Para isso o ensino deve valorizar tarefas que incluam questões de exploração e problemas, ou seja, questões para as quais os alunos não dispõem de um método de resolução imediato. Para favorecer o confronto entre diferentes estratégias e representações, é útil propor tarefas com questões que permitam uma variedade de processos de resolução. A aula exploratória (Ponte, 2005), onde predominam tarefas deste tipo, permite aos alunos grande protagonismo na realização das tarefas e na expressão dos seus raciocínios. Nesta aula o professor começa por propor uma tarefa (introdução), seguindo-se um período em que os alunos trabalham em grupo, em pares ou individualmente (trabalho autónomo), e culminando com um momento coletivo de apresentação e justificação de resultados (discussão). Assim, valorização explícita do raciocínio matemático na sala de aula pode ser feita naturalmente a partir deste tipo de trabalho. Trata-se, sobretudo, de introduzir uma nova ênfase no trabalho em Matemática, que pode levar os alunos não só a desenvolver o seu raciocínio mas também a assumir uma perspetiva muito mais positiva sobre o que é a Matemática como atividade humana.

Referências

Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège. Modélisation et simulation* (Tese de doutoramento, Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG; Université Joseph-Fourier - Grenoble I).

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d’Água.

ISBN 978-84-945722-3-4

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

Galbraith, P. (1995). Mathematics as reasoning. *The Mathematics Teacher, 88*(5), 412-417.

Hanna, G. (2002). Proof and its classroom role: A survey. In M. J. Saraiva, M. I. Coelho & J. M. Matos (Eds.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp. 75-104). Lisboa: SPCE.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K-Grade 8*. Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática, 100*, 3-9.

Peirce, C. S. (1931–1958) *Collected papers* (8 vols). In C. Hartshorne, P. Weiss & A. Burks (Eds.), Cambridge, MA: Harvard University Press.

Pólya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning* (edição original de 1954, Vol. 1). Princeton, NJ: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos. *Educação e Matemática, 100*, 89-96.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante, 22*(2), 55-81.

Rivera, F. D., & Becker, J. R. (2009). Algebraic reasoning through patterns: Findings, insights, and issues drawn from a three-year study on patterns are intended to help teach prealgebra and algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School, 15(4), 213-221*.

ISBN 978-84-945722-3-4